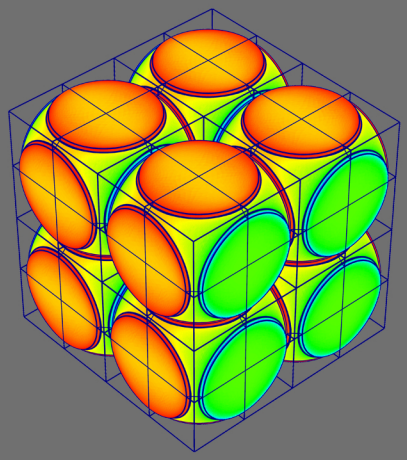
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М. Математическая модель крутильных ко- лебаний вращающегося цилиндрического слоя с учетом внутренней вязкой жидко- сти. Математическое моделирование и численные методы, 2017, No 4, с. 31–47.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/148/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.24
17.11.2026 03:53:43

УДК 539.3 DOI 10.18698/2309-3684-2017-4-3147

Математическая модель крутильных колебаний вращающегося цилиндрического слоя с учетом внутренней вязкой жидкости

© Х.Х. Худойназаров, Ш.М. Буркутбоев

Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова, Ташкент, 100095, Узбекистан

Предложена математическая модель крутильных колебаний вращающегося цилиндрического слоя с движущейся внутри вязкой жидкостью. Разработан алгоритм определения напряженно-деформированного состояния точек рассматриваемой системы. В качестве примера приведена задача о крутильных колебаниях бурильной колонны, вращающейся с постоянной угловой скоростью. Даны оценки влияния потока внутренней вязкой жидкости и центробежной силы инерции на напряженно-деформированное состояние системы.

Ключевые слова: *цилиндрической слой, вязкая жидкость, крутильные колебания, перемещение точки, напряжения, крутящий момент, вращение, угловая скорость*

Введение. В некоторых исследованиях при моделировании задач крутильных колебаний бурильной колонны для описания движений ее точек применяют классические уравнения колебаний стержневой теории [1–5], теории гибких криволинейных стержней [6, 7] или теории изгиба балок [8]. Учесть влияние протекающей внутри колонны промывочной жидкости в рамках этих теорий затруднительно. Кроме того, при проведении буровых работ вращательным способом в скважине постоянно циркулирует поток жидкости, являющийся средством для удаления продуктов разрушения.

С этой точки зрения представляют интерес исследования динамического деформирования цилиндрических слоев, моделирующих работу элементов разных инженерных конструкций, с учетом вращения и взаимодействия со средой, а также реологических, нелинейных и других свойств их материалов [8–10]. Большое внимание уделяется изучению нестационарного линейного и нелинейного взаимодействия с жидкостью и устойчивости [11] цилиндрических тел, а также распространению волн в них [12].

Однако для решения указанных задач для толстостенных элементов (например, бурильных колонн) нельзя применять теорию цилиндрических оболочек. В связи с этим ведутся многочисленные исследования направлений совершенствования моделей нестационарного взаимодействия цилиндрических тел [13], а также деформационных и прочностных их характеристик, в рамках моделей, которые ориентированы для работы в условиях контактного взаимодействия с окружающей средой

и под действием внешних динамических нагрузок, имеющих актуальные прикладные значения [14, 15].

Постановка задачи. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) рассмотрим задачу о крутильных колебаниях кругового упругого цилиндрического слоя с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами, вращающегося с постоянной угловой скоростью Ω и содержащего вязкую жидкость, которая движется со скоростью $\vartheta = \text{const}$. При крутильных колебаниях цилиндрического слоя его напряженно-деформированное состояние не зависит от угловой координаты θ напряжения $\sigma_{r\theta}(r, z, t)$, $\sigma_{z\theta}(r, z, t)$ и перемещение $U_\theta(r, z, t)$ отличны от нуля.

Уравнение движения цилиндрического слоя с учетом вращения имеет вид [10]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = \rho\left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2} - \Omega^2 U_\theta\right), \tag{1}$$

где ρ — плотность материала слоя.

Как известно, крутильное перемещение слоя U_θ выражается через потенциальную функцию поперечных волн ψ как $U_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$, которая позволяет использовать уравнение (1) в виде

$$\Delta\psi = \frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega^2\right)\psi, \tag{2}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$; $b = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения поперечных волн в материале слоя; μ — коэффициент сдвига; t — время.

Введем подвижную систему координат (r_1, θ_1, z_1), движущуюся вместе с жидкостью и связанную с неподвижной системой координат формулами

$$r = r_1,\ \theta = \theta_1,\ z = z_1 + \vartheta t. \tag{3}$$

Уравнение движения вязкой жидкости, протекающей со скоростью ϑ, примем в форме [14]:

$$\Delta_0\chi - \frac{1}{\nu'}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vartheta\frac{\partial}{\partial z}\right)\chi = 0, \tag{4}$$

где ν' — кинематический коэффициент вязкости; χ — потенциальная функция. При этом тангенциальная составляющая вектора скоро-

сти частиц жидкости и ненулевые компоненты тензора напряжений вязкой жидкости имеют вид:

$$V_\theta = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vartheta\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial\chi}{\partial r},\ P_{r\theta} = -\mu'\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vartheta\frac{\partial}{\partial z}\right) r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi,$$

$$P_{\theta z} = -\mu'\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vartheta\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z}, \qquad (5)$$

где $\mu' = \rho_1'\nu'$ — динамический коэффициент вязкости; ρ_1' — плотность жидкости.

Для решения задачи представим потенциалы ψ и χ в виде [16]

$$[\ \zeta(t,\ z)\ ] = \int\limits_{(l_1)}\int\limits_{(l_2)} \zeta^{(0)}(p,k)e^{pt+kz}dpdk, \qquad (6)$$

где $\zeta(t,\ z)$, $\zeta^{(0)}(p,\ k)$ — непрерывная функция в области $t \geq 0,\ z \geq 0$ и ее двухмерное преобразование ($\mathrm{Re}\, p > 0,\ \mathrm{Re}\, k > 0$ и $-\pi < \arg p < \pi,\ -\pi < \arg k < \pi$) соответственно; $l_1,\ l_2$ — неограниченные открытые контуры в комплексной плоскости; $p,\ k$ — параметры преобразования.

Подстановка (6) в уравнения (2) и (4) приводит к модифицированным уравнениям Бесселя относительно $\psi^{(0)}$ и $\chi^{(0)}$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \left(\beta^2, \delta^2\right)\right]\left(\psi^{(0)},\ \chi^{(0)}\right) = 0. \qquad (7)$$

Здесь $\beta^2 = \frac{1}{b^2}\left(p^2 - \Omega^2\right) - k^2;\ \delta^2 = \frac{p + \vartheta k}{\nu'} - k^2.$

Общие решения уравнений (7), удовлетворяющие при $r = 0$ и $r \to \infty$ условиям ограниченности возмущений, имеют вид:

$$\psi^{(0)}(r) = B_1 I_0(\beta r) + B_2 K_0(\beta r);\ \chi^{(0)} = DI_0(\delta r), \qquad (8)$$

где $I_0(\beta r),\ K_0(\beta r)$ — модифицированные функции Бесселя; $B_1,\ B_2,\ D$ — постоянные интегрирования.

Представляя перемещение U_θ аналогично (6) с учетом (8), получим:

$$U_\theta^{(0)} = -\beta\left(B_1 I_1(\beta r) + B_2 K_1(\beta r)\right),\ V_\theta^{(0)} = -(p + \vartheta k)\,\delta\, DI_1(\delta r). \qquad (9)$$

Считается, что крутильные колебания возбуждаются усилием, действующим на внешней $r = r_2$ поверхности, изменяющимся по

заданному закону по координате z и времени t, т. е. граничное условие при $r = r_2$ имеет вид:

$$\sigma_{r\theta}(r_2,\, z,\, t) = f_{r\theta}(z,\, t), \tag{10}$$

где $f_{r\theta}$ — функция внешнего усилия.

На внутренней поверхности слоя $r = r_1$, контактирующей с вязкой жидкостью, должно выполняться динамическое условие, выражающее равенство касательных напряжений,

$$\sigma_{r\theta}(r_1,\, z,\, t) = -P_{r\theta}(r_1,\, z,\, t). \tag{11}$$

Предположим, что на колеблющейся контактной поверхности полностью отсутствует относительная скорость между частицами жидкости и близлежащими точками поверхности, т. е. кинематическое условие

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vartheta\frac{\partial}{\partial z}\right)U_\theta(r_1,\, z,\, t) = V_\theta(r_1,\, z,\, t). \tag{12}$$

Начальные условия задачи считаются нулевыми.

Вывод уравнений колебания. Преобразуем напряжения $\sigma_{r\theta}$, $P_{r\theta}$ и функцию $f_{r\theta}(z,\, t)$ по (6) в граничных условиях (10) и (11), а также выразим их через общее решение (8). В результате получим уравнения

$$\beta^2\left[B_1 I_2(\beta r_2) + B_2 K_2(\beta r_2)\right] = -\frac{1}{\mu} f_{r\theta}^{(0)}(k,\, p); \tag{13}$$

$$\beta^2\left[B_1 I_2(\beta r_1) + B_2 K_2(\beta r_1)\right] = -\frac{\mu'}{\mu}(p + \vartheta k)\delta^2 D I_2(\delta r_1). \tag{14}$$

С учетом (9) условие (12) принимает вид:

$$\delta D I_1(\delta\, r_1) = \beta\left[B_1 I_1(\beta r_1) - B_2 K_1(\beta r_1)\right]. \tag{15}$$

Используя стандартные разложения в ряды по степеням радиальной координаты r, модифицированных функций Бесселя I_1 и K_1, из (9) получим:

$$U_\theta^{(0)} = \frac{1}{r}B_{12} - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n+2}\left[B_{11} - B_{12}\left(\ln\frac{\beta r}{2} - \frac{1}{2}\left(\psi(n+1) + \psi(n+2)\right)\right)\right]\times \\ \times\frac{(r/2)^{2n+2}}{n!(n+1)!}, \tag{16}$$

где $\psi(n)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Примем за искомые величины перемещения и напряжения в точках некоторой промежуточной поверхности цилиндрического слоя, радиус которой определяется по формуле [13]:

$$\xi = \frac{r_1}{2}\left(\chi - \frac{r_1}{r_2}\right), \tag{17}$$

где постоянная χ удовлетворяет неравенству $2 + \frac{r_1}{r_2} \le \chi \le 2\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}$.

Заметим, что при значениях χ, равных соответственно

$$2 + \frac{r_1}{r_2},\ 1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1},\ 2\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}, \tag{18}$$

ξ может быть радиусом внутренней, срединной и внешней поверхности цилиндрического слоя.

В соответствии с формулой (17) положим, что в формуле (16) $r = \xi$, и введем новые функции, являющиеся главными частями преобразованного перемещения:

$$U_{\theta,1}^{(0)} = \frac{1}{\xi}B_2,\ U_{\theta,0}^{(0)} = -\frac{1}{2}\beta^2 B_{10},\ B_{10} = B_1 - B_2\left[\ln\frac{\beta\xi}{2} - \psi(1) - \frac{1}{2}\right]. \tag{19}$$

Подставив (19) в выражение (16), получим формулу для преобразованного перемещения $U_\theta^{(0)}$ через главные части $U_{\theta,0}^{(0)}$ и $U_{\theta,1}^{(0)}$:

$$U_\theta^{(0)}(r) = 2G_1\left(r,\ 1,\ \beta^{2n}\right)U_{\theta,0}^{(0)} + \xi\left[\frac{1}{r} + G_1\left(r,\ \eta_1,\ \beta^{2n+2}\right)\right]U_{\theta,1}^{(0)}, \tag{20}$$

где $G_m\left(r,\ \eta_k,\ \beta^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r/2)^{2n+m}}{n!(n+m)!}\eta_k\beta^{2n}$, $\eta_1(r) = \ln\frac{r}{\xi} + \frac{n}{2(n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k}$.

Выражение (20) на промежуточной поверхности $r = \xi$ при $n = 0$ принимает вид:

$$U_\theta^{(0)} = U_{\theta,1}^{(0)} + \xi U_{\theta,0}^{(0)}. \tag{21}$$

Из выражения (21) следует, что введенная функция $U_{\theta,1}^{(0)}$ имеет размерность перемещения, а функция $U_{\theta,0}^{(0)}$ — деформации.

Представление (20) найдено исходя из строгой математической постановки и общего ее решения. Аналогичные представления перемещений, полученные на основе чисто инженерных подходов, применены в работе [8]. Кроме того, если учесть, что главными частями быстро сходящихся при конкретных значениях радиальной координа-

ты r степенных рядов, входящих в выражения (20), фактически являются несколько первых членов, то сразу станет ясно, что введенные функции $U_{\theta,0}^{(0)}$ и $U_{\theta,1}^{(0)}$ — это главные части крутильного перемещения введенной характеристической поверхности слоя.

Из условия (15) найдем выражение постоянной:

$$D = \frac{\beta}{\delta\, I_1(\delta r_1)}\left[B_1 I_1(\beta r_1) - B_2 K_1(\beta r_1)\right]. \tag{22}$$

Уравнение (14) с учетом выражения (22) можно записать как

$$\beta^2\left[B_1 I_2(\beta r_1) + B_2 K_2(\beta r_1)\right] = -\frac{\mu'\delta\ (p+\vartheta k) I_2(\delta\, r_1)}{\mu I_1(\delta\, r_1)}\beta\left[B_{11} I_1(\beta r_1) - B_{12} K_1(\beta r_1)\right]. \tag{23}$$

Далее введем обозначение

$$R^{(0)} = -\frac{\mu'\delta(p+\vartheta k)}{\mu}\frac{I_2(\delta\, r_1)}{I_1(\delta\, r_1)}. \tag{24}$$

В квадратных скобках в правой части равенства (23) дано не что иное, как выражение крутильного перемещения точек слоя. Исходя из этого оператор $R^{(0)}$, введенный по формуле (24), является реакцией вязкой жидкости с характеристиками ρ', ν', μ', ϑ.

Таким образом, граничные условия задачи можно записать в виде

$$\beta^2\left[B_1 I_2(\beta r_1) + B_2 K_2(\beta r_1)\right] - R^{(0)}\beta\left[B_1 I_1(\beta r_1) - B_2 K_1(\beta r_1)\right] = 0,$$

$$\beta^2\left[B_1 I_2(\beta r_2) + B_2 K_2(\beta r_2)\right] = -\frac{1}{\mu} f_{r\theta}^{(0)}(k,p). \tag{25}$$

В уравнениях (25) разложим функции I_n и K_n $(n=1,2)$ в степенные ряды по степеням $r_i\,(i=1,2)$, и, выразив B_1 и B_2 через (19), получим уравнения крутильных колебаний вращающегося цилиндрического слоя, который взаимодействует с протекающей жидкостью, относительно главных частей перемещения в преобразованиях

$$2G_2\left(r_1,\,1,\,\beta^{2n+2}\right)U_{\theta,0}^{(0)} + \xi\left[\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{2}{r_1^2} + G_2\left(r_1,\,\eta_2(r_1),\,\beta^{2n+4}\right)\right]U_{\theta,1}^{(0)} +$$

$$+R^{(0)}\left[2G_1\left(r_1,\,1,\,\beta^{2n}\right)U_{\theta,0}^{(0)} + \xi\left(\frac{1}{r_1} + G_1\left(r_1,\,\eta_1(r_1),\,\beta^{2n+2}\right)\right)U_{\theta,1}^{(0)}\right] = 0, \tag{26}$$

$$2G_2\left(r_1,\,1,\,\beta^{2n+2}\right)U_{\theta,0}^{(0)} + \xi\left(\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{2}{r_2^2} + G_2\left(r_2,\,\eta_2(r_2),\,\beta^{2n+4}\right)\right)U_{\theta,1}^{(0)} = \frac{1}{\mu} f_{r\theta}^{(0)}(k,p),$$

где $\eta_2(r_i) = \ln\frac{r_i}{\xi} + \frac{n^2+n-1}{2(n+1)(n+2)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

В выражении (27), используя стандартные разложения в ряды Бесселевых функций и ограничиваясь первым слагаемым, получим:

$$R^{(0)} = -\frac{r_1\rho_1'(p+\vartheta k)^2}{4\mu}. \tag{27}$$

Введем функции $U_{\theta,0}$, $U_{\theta,1}$ и операторы λ_2^n по формулам

$$\left[U_{\theta,0}, U_{\theta,1}\right] = \int\limits_{(l_1)}\int\limits_{(l_2)} \left[U_{\theta,0}^{(0)}, U_{\theta,1}^{(0)}\right] e^{pt+kz}\,dpdk; \tag{28}$$

$$\lambda_2^n(\zeta) = \int\limits_{(l_1)}\int\limits_{(l_2)} \left[\beta^{2n}(\zeta)\right] e^{pt+kz}\,dpdk. \tag{29}$$

На основании выражения (7) для $\beta^2 = \frac{1}{b^2}\left(p^2 - \Omega^2\right) - k^2$ можно заключить, что операторы λ_2^n в переменных $(z,\ t)$ равны

$$\lambda_2^n = \left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega^2\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{30}$$

Подставляя формулы (28) и (29) в (26), получим:

$$\varphi_{11}U_{\theta,0} + \varphi_{12}U_{\theta,1} = 0,\ \ \varphi_{21}U_{\theta,0} + \varphi_{22}U_{\theta,1} = -\frac{1}{\mu}f_{r\theta}(z,\ t), \tag{31}$$

где

$$\varphi_{1i} = 2G_1\left(r_i, k_1, \lambda_2^n\right),\ \ \varphi_{2i} = \xi\left[\frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{2}{r_i^2} + \frac{1}{r_i}\delta_{1i}R + G_1\left(r_i, k_2, \lambda_2^n\right)\right] (i = 1, 2).$$

Здесь также $k_1 = \frac{r_i}{2}\lambda_2 + (n+2)\delta_{1i}R;\ \ k_2 = \lambda_2\frac{r_i}{2}\eta_{2,n}(r_i) + (n+2)\eta_{1,n}(r_i)\delta_{1i}R;$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Аналогично (30), записав оператор $R^{(0)}$ в переменных $(z,\ t)$, получим оператор, выражающий реакцию внутренней вязкой жидкости на крутильные колебания цилиндрического слоя,

$$R = -\frac{r_1\rho_1'}{4\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\vartheta\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} + \vartheta^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{32}$$

Система уравнений (31) включает общие уравнения крутильных колебаний гидроупругой системы цилиндрический слой — вязкая

жидкость относительно главных частей перемещения точек промежуточной поверхности слоя. При значениях постоянного χ, определяемых формулами (18), уравнения системы (31) являются уравнениями крутильных колебаний рассматриваемой гидроупругой системы относительно главных частей перемещения точек внутренней, срединной или внешней поверхности цилиндрического слоя соответственно. Полученные уравнения в своих структурах учитывают реакции внутренней вязкой жидкости, движущейся с постоянной скоростью, в их правых частях учтены внешние усилия, приложенные к внешней поверхности цилиндрического слоя.

Ниже приведем некоторые частные случаи относительно геометрии цилиндрического слоя, свойств жидкости и ее движения, в которых уравнения системы (31):

- при $\rho_1' = 0$ и $\Omega = 0$ превращаются в уравнения крутильных колебаний кругового цилиндрического упругого слоя [13];
- при $r_1 = 0$ и $\rho_1' = 0$ превращаются в уравнения крутильных колебаний вращающегося стержня кругового поперечного сечения [15];
- при $r_2 = r_1(1+\varepsilon)$, (где ε — малая величина, $\varepsilon > 0$) превращаются в уравнения крутильных колебаний круговой цилиндрической тонкостенной оболочки с учетом вращения и движущейся со скоростью $\upsilon = \text{const}$ вязкой жидкости;
- при $\Omega = \vartheta = 0$, превращаются в уравнения крутильных колебаний цилиндрического слоя, заполненного покоящейся вязкой жидкостью.

Формулы для определения напряженно-деформированного состояния системы. Данный подход наряду с уравнениями колебания через искомые функции позволяет выразить все ненулевые компоненты напряжения и перемещения. Применив обратное преобразование к выражению преобразованного перемещения (20), получим

$$U_\theta = 2G_1\left(r,\, 1,\, \lambda_2^n\right)U_{\theta,0} + \xi\left(\frac{1}{r} + G_1\left(r,\, \eta_1(r),\, \lambda_2^{n+1}\right)\right)U_{\theta,1}. \qquad (33)$$

Аналогично ненулевые компоненты тензора напряжений в слое и жидкости выразим через главные части перемещения в виде

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(2G_2\left(r,\, 1,\, \lambda_2^{n+1}\right)U_{\theta,0} + \xi\left(\frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{2}{r^2} + G_2\left(r,\, \eta_2(r),\, \lambda_2^{n+2}\right)\right)U_{\theta,1}\right), \qquad (34)$$

$$\sigma_{z\theta} = \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(2G_1\left(r,\, 1,\, \lambda_2^n\right)U_{\theta,0} + \xi\left(\frac{1}{r} + G_1\left(r,\, \eta_1(r),\, \lambda_2^{n+1}\right)\right)U_{\theta,1}\right),$$

$$G_2\left(r_1,\, n+2,\, \lambda_3^{n+1}\right) p_{r\theta} =$$

$$= \mu' G_2\left(r,\, 1,\, \lambda_3^{n+2}\right)\zeta\left(2G_1\left(r,\, 1,\, \lambda_2^{n}\right)U_{\theta,0} + \xi\left(\frac{1}{r} + G_1\left(r,\, \eta_1(r),\, \lambda_2^{n+1}\right)\right)U_{\theta,1}\right),$$

где $\lambda_3^n = \left(\dfrac{1}{\nu'}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vartheta\dfrac{\partial}{\partial t}\right) - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^n$, $\zeta = \dfrac{\partial}{\partial t} + \vartheta\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Формулы для перемещения (33) и напряжений (34) позволяют с требуемой точностью определить напряженно-деформированное состояние произвольного сечения цилиндрического слоя для произвольного момента времени через $U_{\theta,0}$ и $U_{\theta,1}$.

Приближенные уравнения колебания. В соответствии с выражениями (30) и (32) система уравнений (31) для операторов λ_2^n и R включает дифференциальные уравнения с частными производными бесконечно высокого порядка относительно главных частей $U_{\theta,0}$ и $U_{\theta,1}$ крутильного перемещения точек цилиндрического слоя. В таком виде применение их в инженерных расчетах затруднено. Следовательно, необходимо сократить количество членов в бесконечных рядах, т. е. ограничиться нулевым $(n=0)$, первым $(n=1)$ или другими приближениями.

Будем считать выполненными условия относительно границ области применения усеченных уравнений колебания цилиндрической оболочки [13] и для уравнений системы (31). Тогда, ограничиваясь нулевым приближением уравнений, будем иметь приближенные уравнения крутильных колебаний цилиндрического слоя, вращающегося с постоянной угловой скоростью и движущейся вязкой жидкостью:

$$\left[\left(\frac{r_1^2}{4b^2} - \frac{r_1^2\rho_1'}{4\mu}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{r_1^2\rho_1'\vartheta}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} - \left(\frac{r_1^2}{4} + \frac{r_1^2\rho_1'\vartheta^2}{4\mu}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{r_1^2}{4b^2}\Omega^2\right]U_{\theta,0} +$$

$$+\xi\left[\left(\frac{1}{2b^2} - \frac{\rho_1'}{4\mu}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\rho_1'\vartheta}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_1'\vartheta^2}{4\mu}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\Omega^2}{2b^2} - \frac{2}{r_1^2}\right]U_{\theta,1} = 0,$$

$$\left[\frac{r_2^2}{4b^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{r_2^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{r_2^2}{4b^2}\Omega^2\right]U_{\theta,0} + \tag{35}$$

$$+\xi\left[\frac{1}{2b^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\Omega^2}{2b^2} - \frac{2}{r_2^2}\right]U_{\theta,1} = \frac{1}{\mu}f_{r\theta}(z,\, t).$$

С помощью системы (35) можно решать прикладные задачи.

Динамический расчет бурильной колонны с учетом влияния потока внутренней жидкости. Ниже исследуем влияние протекающей жидкости и угловой скорости вращения на напряженно-деформированное состояние бурильной колонны на основе выведенных уравнений колебания цилиндрического слоя. Предположим, что внешная поверхность колонны свободна от нагрузок. Тогда, полагая $f_{r\theta}(z,\,t)=0$ в правой части второго уравнения (35), пренебрегая некоторыми членами как малыми величинами по сравнению с другими и вводя безразмерные переменные по формулам

$$t=\frac{l}{b}t^*,\ \ z=lz^*,\ \ \Omega=\frac{b}{l}\Omega^*,\ \ \vartheta=b\vartheta^*,\ \ r=\xi r^*,\ \ r_1=\xi r_1^*,$$

$$r_2=r\xi_2^*,\ \ U_{\theta,0}=U,\ \ U_{\theta,1}=\xi V, \tag{36}$$

получим

$$\frac{\xi^2 r_1^2}{4l^2}\left[\left(1-\frac{\rho_1'}{\rho}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2\rho_1'\vartheta}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}-\left(1+\frac{\rho_1'\vartheta^2}{\rho}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Omega^2\right]U-\left[\frac{\xi^2\Omega^2}{2l^2}+\frac{2}{r_1^2}\right]V=0,$$

$$\frac{\xi^2 r_2^2}{4l^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Omega^2\right]U-\left[\frac{\xi\Omega^2}{2l^2}+\frac{2}{r_2^2}\right]V=0, \tag{37}$$

где l — длина колонны.

При этом напряженно-деформированное состояние бурильной колонны определяется через искомые функции U и V по формулам

$$U_\theta=U+V,\ \ \sigma_{z\theta}=\frac{r\xi}{l}\frac{\partial U}{\partial z},\ \ \sigma_{r\theta}=\frac{\xi^2 r^2}{4l^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\Omega^2\right)-\frac{2}{r^2}V. \tag{38}$$

Из формулы (37) получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=C\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+D\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial z}+EU, \tag{39}$$

где

$$C=\frac{(1-K)\rho+\rho_1'U_1^2}{(1-K)\rho-\rho_1'};\ \ D=\frac{2\rho_1'U_1}{(1-K)\rho-\rho_1'};$$

$$E=\frac{(1-K)\rho\Omega^2}{(1-K)\rho-\rho_1'};\ \ K=\frac{r_2^4}{r_1^4}\frac{\xi^2 r_1^2\Omega^2+4l^2}{\xi^2 r_2^2\Omega^2+4l^2}.$$

Пусть бурильная колонна вращается под действием крутящего момента $M=\text{const}$, приложенного на верхнем ее конце. Тогда на

нижнем конце колонны возникает реактивный момент M_1, обусловленный трением долота о породы. При этом имеют место следующие граничные условия:

$$J_0 \frac{\partial U}{\partial z} = M \quad \text{при } z = 0, \qquad J_0 \frac{\partial U}{\partial z} = M_1 \quad \text{при } z = l, \tag{40}$$

где $J_0 = \pi\left(r_2^4 - r_1^4\right)/2$ — осевой момент инерции бурильной колонны.

Начальные условия имеют вид:

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \Omega, \quad \text{при } t = 0. \tag{41}$$

Решение поставленной задачи осуществим численно методом конечных разностей. Для этого заменим дифференциальное уравнение (39) конечными разностями по неявной схеме с весовыми коэффициентами [17]:

$$U_{i+1}^{n+1} + m_i U_i^{n+1} + n_i U_{i-1}^{n+1} = f_i^n, \quad (i = 1, \ ..., \ N, \ n > 0). \tag{42}$$

Здесь

$$m_i = \left(1 + \frac{2C\sigma_1\tau^2}{\Delta^2} - E\sigma_1\tau^2\right)\Big/ a_i; \ \ n_i = 1; \ \ a_i = -\left(\frac{C\sigma_1\tau^2}{\Delta^2} + \frac{D\tau}{4\Delta}\right);$$

$$f_i = \Bigg[2U_i^n - U_i^{n-1} + \frac{C(1-\sigma_1-\sigma_2)\tau^2}{\Delta^2}\left(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n\right) + \frac{C\sigma_2\tau^2}{\Delta^2}\left(U_{i+1}^{n-1} - 2U_i^{n-1} + U_{i-1}^{n-1}\right) -$$

$$- \frac{D\tau}{4\Delta}\left(U_{i+1}^{n-1} - U_{i-1}^{n-1}\right) + E(1-\sigma_1-\sigma_2)\tau^2 U_i^n + E\sigma_2\tau^2 U_i^{n-1}\Bigg]\Big/ a_i;$$

τ — шаг по времени; Δ — шаг по координате; σ_1, σ_2 — весовые коэффициенты.

При этом граничные (40) и начальные условия (41) принимают вид:

$$U_0^{n+1} = U_1^{n+1} + M / J_0, \ \ U_{N+1}^{n+1} = U_N^{n+1} + M_1 / J_0; \tag{43}$$

$$U_{i-1}^0 = U_i^0 = U_{i+1}^0 = 0, \ \ U_i^1 = \tau\Omega. \tag{44}$$

Численные результаты. Полученная система алгебраических уравнений (42)–(44) решена методом прогонки. Численная реализация задачи осуществлена для стальной колонны при следующих значениях ее физико-механических и геометрических параметров: $\rho = 7850$ кг/м^3; $\nu = 0,25$; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\xi = 0,061$ м; $r_1 = 0,975\xi$; $r_2 = 1,025\xi$; $l = 100$ м. Результаты представлены на рис. 1–6.

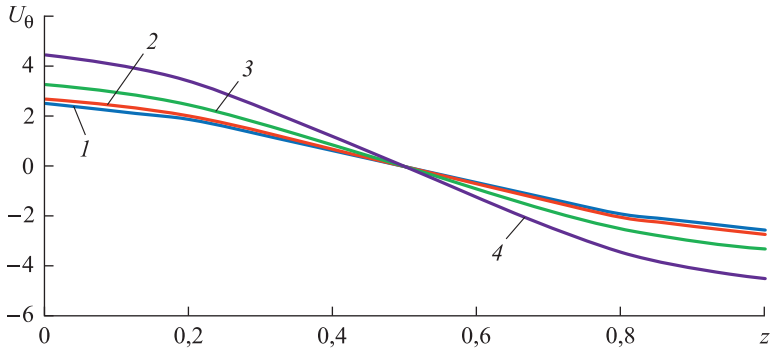


Рис. 1. Зависимость перемещения U_θ от координаты в момент времени $t = 1,2$ при $M_1 = M$, отсутствии внутренней жидкости $(\rho_1' = 0)$ и следующих значениях угловой скорости:

1 — $\Omega = 0$; *2* — $\Omega = 0,5$; *3* — $\Omega = 1$; *4* — $\Omega = 1,5$

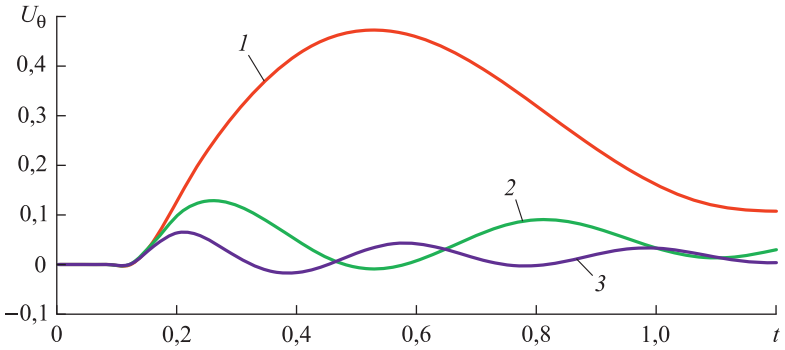


Рис. 2. Зависимость перемещения U_θ от времени в сечении $z = 0,1$ вращающейся бурильной колонны при $M_1 = M$; $\rho_1' = 1500$, $\Omega = 1$ и следующих значениях скорости жидкости:

1 — $\vartheta = 0,001$; *2* — $\vartheta = 0,005$; *3* — $\vartheta = 0,01$

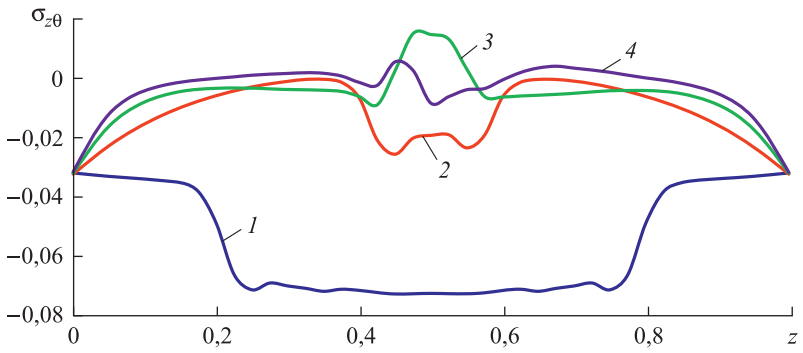


Рис. 3. Зависимость напряжения $\sigma_{z\theta}$ от координаты в момент времени $t = 0,8$ при $M_1 = M$; $\rho_1' = 1500$, $\Omega = 1$ и следующих значениях скорости жидкости:

1 — $\vartheta = 0,001$; *2* — $\vartheta = 0,005$; *3* — $\vartheta = 0,01$; *4* — $\vartheta = 0,05$

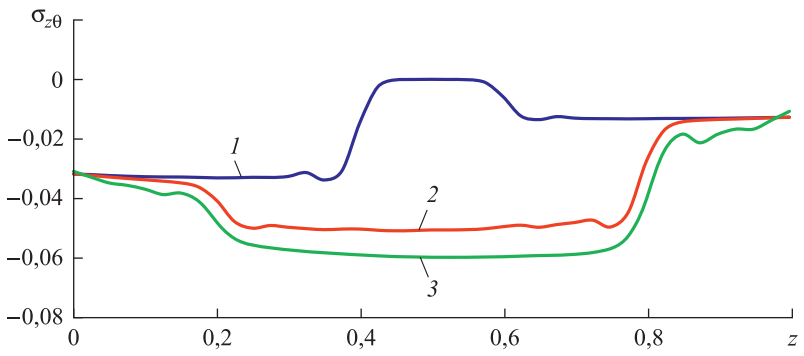


Рис. 4. Зависимость напряжения $\sigma_{z\theta}$ от координаты без учета жидкости $(\rho_1' = 0)$ при $M_1 = 0,4M$; $\Omega = 0,25$ и значениях:
1 — $t = 0,4$; *2* — $t = 0,8$; *3* — $t = 1,2$

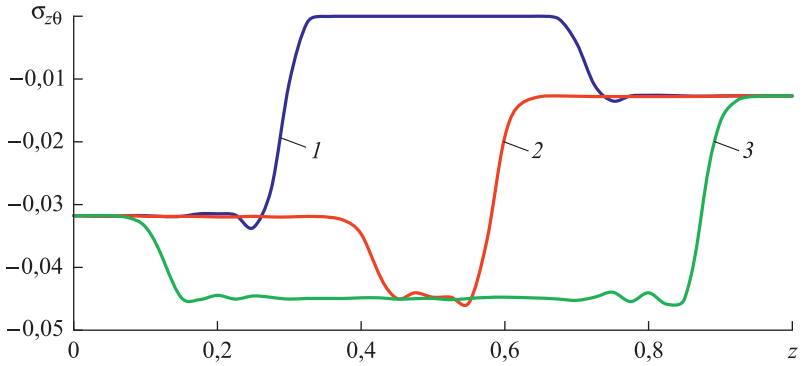


Рис. 5. Зависимость напряжения $\sigma_{z\theta}$ от координаты с учетом покоящейся вязкой жидкости $(\vartheta = 0;\ \rho_1' = 1500)$ при $M_1 = 0,4M$; $\Omega = 0,25$ и значениях:
1 — $t = 0,4$; *2* — $t = 0,8$; *3* — $t = 1,2$

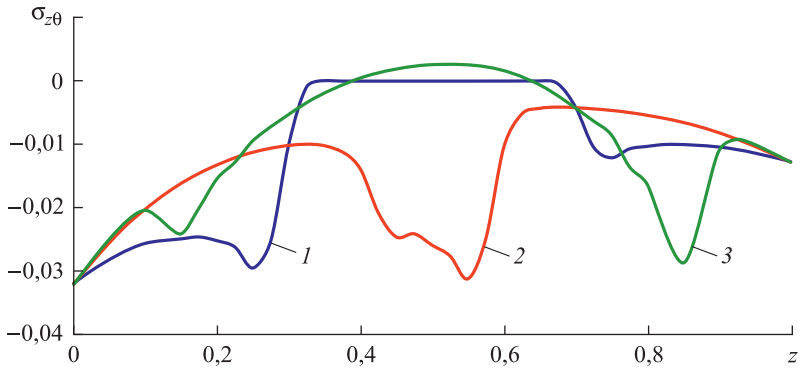


Рис. 6. Зависимость напряжения $\sigma_{z\theta}$ от координаты с учетом движущейся вязкой жидкости $(\vartheta = 0,0005;\ \rho_1' = 1500)$ при $M_1 = 0,4M$; $\Omega = 0,25$ и значениях:
1 — $t = 0,4$; *2* — $t = 0,8$; *3* — $t = 1,2$

Полученные графики изменения перемещения по координате во вращающейся бурильной колонне без учета жидкости (см. рис. 1) показывают, что увеличение угловой скорости приводит к увеличению амплитуды колебаний. На концах колонны при $\Omega = 1{,}5$ амплитуда перемещения увеличивается в 1,9 раза по сравнению с $\Omega = 0$. В центральном сечении $z = 0{,}5$ значение перемещения равно нулю при различных значениях угловой скорости. Это соответствует случаю $M_1 = M$. При других соотношениях между M_1 и M эта точка пересечения кривых смещается влево (при $M_1 > M$) и вправо (при $M_1 < M$). С удалением от этого сечения перемещение принимает антисимметричные значения.

Влияние протекающей жидкости приводит к изменению скорости волны в бурильной колонне, наблюдается существенное уменьшение амплитуды перемещения (см. рис. 2). Например, в сечение $z = 0{,}1$ при $\vartheta = 0{,}01$ максимальное значение перемещения в 11 раз меньше, чем в случае $\vartheta = 0{,}001$.

Увеличение скорости жидкости приводит к затуханию напряжений и перемещения. Когда волна достигает наблюдаемое сечение, это приводит сначала к резкому увеличению напряжения, которое постепенно затухает, например, при перемещении в сечение $z = 0{,}5$ при $\vartheta = 0{,}01$ значение напряжений в 5 раз меньше, чем в случае $\vartheta = 0{,}001$.

На рис. 3 приведены распределения напряжения $\sigma_{z\theta}$ по длине колонны для разных значений скорости жидкости. Видно, что касательное напряжение распределено симметрично относительно центрального сечения колонны $(z = 0{,}5)$ вне зависимости от скорости жидкости и наибольшее его значение при наименьшей $(\vartheta = 0{,}001)$ скорости жидкости (см. рис. 3, линия *1*).

На рис. 4–6 отображены графики напряжения $\sigma_{z\theta}$ в зависимости от продольной координаты z при $M_1 = 0{,}4M$; $\Omega = 0{,}25$ и при различных значениях безразмерного времени t $(0{,}4;\ 0{,}8;\ 1{,}2)$, а также с учетом $\rho_1' = 0$ (см. рис. 4), наличия покоящейся $\vartheta = 0$ (см. рис. 4) и движущейся $\vartheta = 0{,}0005$ (см. рис. 6) жидкости с плотностью $\rho_1' = 1000$ кг/м^3.

Представленные графики показывают, что напряжение $\sigma_{z\theta}$ во всех сечениях колонны является сжимающим и его наибольшие значения (по модулю) наблюдаются в заключенных между равноудаленными от концов колонны сечениях. Например, в интервале $0{,}2 < z < 0{,}8$ при отсутствии жидкости, в интервале $0{,}15 < z < 0{,}85$ с учетом покоящейся жидкости. При протекающей жидкости такая

закономерность отсутствует, напряжение $\sigma_{z\theta}$ меняется в зависимости от моментов времени.

Заключение. В работе предложена новая математическая модель крутильных колебаний цилиндрического слоя, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси и взаимодействующего с протекающей жидкостью. На основе полученных уравнений исследовано влияние протекающей жидкости на колебания бурильной колонны. Установлено, что учет протекающей жидкости приводит к существенному уменьшению амплитуды колебаний и запаздыванию распространяющихся волн.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гуляев В.И., Худолий С.Н., Глушакова О.В. Самовозбуждение крутильных колебаний колонн глубокого бурения. *Проблемы прочности*, 2009, № 6, с. 31–43.

[2] Han J.-H., Kim Y.-J., Karkoub M. Modeling of wave propagation in drill strings using vibration transfer matrix methods. *Journal of the Acoustical Society of America*, September 2013, no. 134 (3), pp. 1920–1931.

[3] Ulitin G.M. Stability of the column of a rotor-type drilling rig. *Strength of Materials*, January 2002, vol. 34, iss. 1, pp. 94–98.
URL: https://link.springer.com/article/10.1023/A%3A1014882621157 (дата обращения 19.12.2017).

[4] Улитин Г.М., Петтик Ю.В. Крутильные колебания бурильных колонн при прихватах. *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво)*. Полтава, ПолтНТУ, 2009, вип. 3 (25), т. 2, с. 214–218.

[5] Улитин Г.М., Петтик Ю.В. Крутильные удары в двухступенчатых бурильных колоннах. *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія Гірничо-геологічна*, 2012, вип. 16 (206), с. 144–148.

[6] Гуляев В.И., Андрусенко Е.Н. Чувствительность сил сопротивления перемещению бурильной колонны к геометрическим несовершенствам траектории криволинейной скважины. *Проблемы прочности*, 2011, № 3, с. 19–34.

[7] Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Худолий С.Н. Компьютерное моделирование динамики конструкций установок глубокого бурения. *Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського*, 2009, вип. 4, с. 208–216.

[8] Païdoussis M.P. *Fluid–structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1.* London, Academic Press, 1998, 572 p.

[9] Ritto T.G., Soize C., Sampaio R. Non-linear dynamics of a drill-string with uncertain model of the bit-rock interaction. *International Journal Non-Linear Mechanics*, 2009, pp. 865–876.

[10] Rand O., Stavsky Y. Free vibrations of spinning composite cylindrical shells. *International Journal Solids and Structures*, 1991, vol. 28, no. 7, pp. 831–843.

[11] Бочкарёв С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2010, т. 3, № 2, с. 24–33.

[12] Блинкова А.Ю. Моделирование нелинейных волн деформаций в физически линейных вязкоупругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. *Вестник СГТУ*, 2012, № 1 (68), т. 4, с. 7–15.

[13] Худойназаров Х.Х. *Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой*. Ташкент, Изд-во им. Абу Али ибн Сино, 2003, 326 с.

[14] Гузь А.Н. Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью. *Прикладная механика*, 1980, № 10, с. 10–20.

[15] Худойназаров Х.Х., Абдирашидов А., Буркутбоев Ш.М. Моделирование крутильных колебаний вязкоупругого круглого стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1 (9), с. 38–51.

[16] Снеддон И. *Преобразование Фурье*. Москва, Иностранная литература, 1955, 667 с.

[17] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Вычислительная теплопередача*. Москва, Эдиториал УРСС, 2003, 784 с.

Статья поступила в редакцию 08.02.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М. Математическая модель крутильных колебаний вращающегося цилиндрического слоя с учетом внутренней вязкой жидкости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4, с. 31–47.

Худойназаров Хайрулла Худойназарович окончил Самаркандский государственный университет. Д-р техн. наук, профессор Ташкентского государственного технического университета имени Ислама Каримова. Автор более 150 научных работ в области механики деформируемого твердого тела.
e-mail: khayrullakhudoynazarov@gmail.com

Буркутбоев Шерзод Мамасолиевич окончил Самаркандский государственный университет. Старший научный сотрудник-соискатель Ташкентского государственного технического университета имени Ислама Каримова. Автор 28 научных работ. e-mail: sherzodb@rambler.ru

Mathematical modeling of the rotating cylindrical shell torsional vibrations factored in the internal viscous fluid

© Kh.Kh. Khudoynazarov, Sh.M. Burkutboyev

Tashkent State Technical University named after Islam Karimov,
Tashkent, 100095, Uzbekistan

The article introduces a mathematical model of the rotating cylindrical shell torsional vibrations with the viscous fluid flowing inside. We have developed an algorithm for defining the stress-strain state of the considered system's points. As an example we examine the problem of torsional vibrations of the drill column rotating with constant angular velocity. The article estimates the influence of the internal viscous fluid flow and the centrifugal inertia force on the stressed-strain state of the system.

Keywords: *cylindrical shell, viscous fluid, torsional vibrations, displacement of point, strain, torque, rotation, angular velocity*

REFERENCES

[1] Gulyaev V.I., Khudoliy S.N., Glushakova O.V. *Problemy prochnosti — Strength of Materials*, 2009, no. 6, pp. 31–43.

[2] Han J.-H., Kim Y.-J., Karkoub M. *Journal of the Acoustical Society of America*, September 2013, no. 134 (3), pp. 1920–1931.
[3] Ulitin G.M. *Strength of Materials*, January 2002, vol. 34, iss. 1, pp. 94–98. Available at: https://link.springer.com/article/10.1023/A%3A1014882621157 (accessed December 19, 2017).
[4] Ulitin G.M., Pettik Yu.V. *Zbirnik naukovikh prats (galuzeve mashinobuduvannya, budivnitstvo) — Industrial Machine Building, Civil Engineering*, Poltava, Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University Publ., 2009, no. 3 (25), vol. 2, pp. 214–218.
[5] Ulitin G.M., Pettik Yu.V. *Naukovi pratsi Donetskogo natsionalnogo tehnichnogo universitetu. Ser. Girnicho-geologichna (Proceedings of Donetsk National Technical University. Series: Mining and Geology)*, 2012, no. 16 (206), pp. 144–148.
[6] Gulyaev V.I., Andrusenko E.N. *Problemy prochnosti — Strength of Materials*, 2011, no. 3, pp. 19–34.
[7] Gulyaev V.I., Gaydaychuk V.V., Khudoliy S.N. *Zbirnik naukovikh prats Ukraïnskogo naukovo-doslidnogo ta proektnogo institutu stalevikh konstruktsiy imeni V.M. Shimanovskogo (Proceedings of V. Shimanovsky Ukrainian Research and Design Institute of Steel Construction)*, 2009, no. 4, pp. 208–216.
[8] Païdoussis M.P. *Fluid–structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1*. London, Academic Press, 1998, 572 p.
[9] Ritto T.G., Soize C., Sampaio R. *International Journal Non-Linear Mechanics*, 2009, pp. 865–876.
[10] Rand O., Stavsky Y. *International Journal Solids and Structures*, 1991, vol. 28, no. 7, pp. 831–843.
[11] Bochkarev S.A. *Vychislitelnaya mekhanika sploshnykh sred — Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 24–33.
[12] Blinkova A.Yu. *Vestnik SGTU — Vestnik Saratov State Technical University*, 2012, no. 1 (68), vol. 4, pp. 7–15.
[13] Khudoynazarov Kh.Kh. *Nestatsionarnoe vzaimodeystvie tsilindricheskikh obolochek i sterzhney s deformiruemoy sredoy* [Transient interreaction of cylindrical shells and bars with deformable medium]. Tashkent, Abu Ali ibn Sino Publ., 2003, 326 p.
[14] Guz A.N. *Prikladnaya mekhanika — International Applied Mechanics*, 1980, no. 10, pp. 10–20.
[15] Khudoynazarov Kh.Kh., Abdirashidov A., Burkutboev Sh.M. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1 (9), pp. 38–51.
[16] Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. New York, McGraw-Hill Publ., 1951, 439 p. [In Russ.: Sneddon I. Preobrazovanie Fure. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1955, 667 p.].
[17] Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitelnaya teploperedacha* [Computational heat transfer]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003, 784 p.

Khudoynazarov Kh.Kh. graduated from Samarkand State University, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Tashkent State Technical University named after Islam Karimov. Author of over 150 scientific works in the field of deformable solid mechanics.
e-mail: khayrullakhudoynazarov@gmail.com

Burkutboyev Sh.M. graduated from Samarkand State University. Senior Research Fellow, external doctoral candidate, Tashkent State Technical University named after Islam Karimov. Author of 28 scientific works. e-mail: sherzodb@rambler.ru