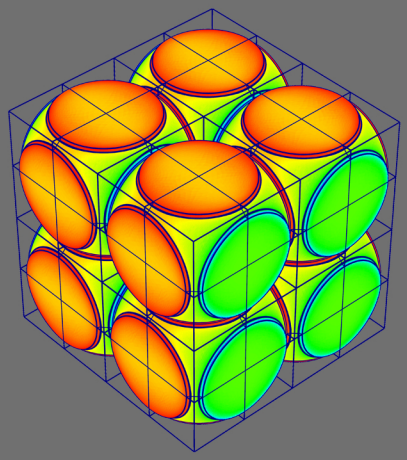
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Краснов И.К., Мозжорина Т.Ю., Джус Д.В. Численное статистическое модели- рование процесса обтекания летательных аппаратов потоком разреженного газа. Математическое моделирование и численные методы, 2017, No 3, с. 71–82.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/142/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.253
05.11.2026 07:44:41

УДК 519.688 DOI 10.18698/2309-3684-2017-3-7182

Численное статистическое моделирование процесса обтекания летательных аппаратов потоком разреженного газа

© И.К. Краснов, Т.Ю. Мозжорина, Д.В. Джус

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрено применение метода прямого статистического моделирования к задачам газовой динамики в разреженной области. Предложен аналитический метод задания и учета сложных граничных условий, связанных с геометрией находящегося в расчетной области тела. Разработан алгоритм рационального описания обтекаемого газом тела.

Ключевые слова: *прямое статистическое моделирование, метод Монте-Карло, аэродинамика разреженного газа*

Введение. Проблемам математического моделирования аэродинамики летательных аппаратов посвящены труды многих видных ученых [1–14]. Численные методы моделирования процессов обтекания газовым потоком высокоскоростных летательных аппаратов (ВЛА), движущихся на относительно небольших высотах [4–6], не применимы для исследования аэродинамики движения ВЛА в разреженных потоках, характерных для больших высот.

Распространенные в инженерной практике методы механики сплошной среды [4], являющиеся следствием уравнения Больцмана, адекватно описывают поведение газового потока только для ограниченной области значений числа Кнудсена $\mathrm{Kn} = \lambda / L$, зависящего от длины свободного пробега молекул λ и характерного размера L.

В условиях $\mathrm{Kn} > 0{,}1$, когда предположение о сплошности среды не выполняется, уравнения Навье — Стокса не позволяют получить решение, соответствующее физике процесса. В этом случае для описания динамики газового потока используется уравнение Больцмана. Другим способом описания газового потока при $\mathrm{Kn} > 0{,}1$ является метод прямого статистического моделирования (ПСМ) [8]. В работе [10] доказывается сходимость решения, полученного методом ПСМ к решению уравнения Больцмана.

Цель настоящей работы — усовершенствование метода ПСМ за счет рационального описания геометрии обтекаемой поверхности.

Математическая модель движения молекулярного потока. При отсутствии гипотезы о сплошности математическая модель в виде динамической системы многих частиц является наиболее подробным уровнем описания молекулярных систем, при котором движение молекул определяется системой дифференциальных уравнений

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{R}_i,$$

где m_i — масса i-й молекулы; $\vec{r}_i$ — координаты i-й молекулы; t — время; $\vec{F}_{ij}$ — силы межмолекулярного взаимодействия i-й и j-й молекул; $\vec{R}_i$ — результирующая сила внешнего воздействия на i-ю молекулу.

Помимо уравнений движения требуется задать начальные координаты и скорости каждой молекулы. Однако для очень разреженного газа решение подобной системы является сложной задачей из-за огромного числа молекул и, как следствие, уравнений, поэтому в данной статье рассматривается менее полное, кинетическое, описание разреженного газа.

В соответствии с этим описанием поведение системы определяется функцией распределения $f(t, \vec{r}, \vec{V})$ молекул по скоростям $\vec{V}$ и пространству $\vec{r}$ в момент времени t. Равенство $dN = f(t, \vec{r}, \vec{V}) d\vec{r} d\vec{V}$ определяет число частиц dN, координаты которых лежат в объеме $(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r})$, а скорости в интервале $(\vec{V}, \vec{V} + d\vec{V})$.

Дифференцируя $f(t, \vec{r}, \vec{V})$ как сложную функцию, получим:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \nabla_r f + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \nabla_V f,$$

где ∇_r и ∇_V — операторы градиента по $\vec{r}$ и по $\vec{V}$ соответственно.

Координаты $\vec{r}$ и $\vec{V}$ вдоль траектории частиц связаны уравнениями движения

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Здесь m — масса частиц, причем поскольку частицы не взаимодействуют друг с другом, их скорости вдоль траекторий сохраняются, и сила $\vec{F} = \vec{0}$. Однако если все частицы находятся в некотором внешнем силовом поле с потенциалом $U(\vec{r})$, то $\nabla_r U \neq \vec{0}$. С учетом изложенного получаем окончательный вид кинетического уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \nabla_r f + \frac{\vec{F}}{m} \nabla_V f = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega (f' f_1' - f f_1) d\vec{V}_1 d\vec{V}' d\vec{V}'_1.$$

Необходимо отметить, что вид функции ω зависит от модели взаимодействия частиц. Конкретный вид этой функции приведен

в монографиях по кинетической теории газов [4, 9]. Уравнение Больцмана является сложным интегродифференциальным уравнением.

Эффективный подход описания кинетики частиц при наличии взаимодействия между частицами был предложен Л. Больцманом еще в 1872 г. Согласно его теории, скорость изменения функции распределения за счет столкновений учитывается с помощью интеграла $St(f)$ столкновений. В этом случае

$$\frac{df}{dt} = St(f).$$

Конкретный вид интеграла $St(f)$ столкновений зависит от выбора модели взаимодействия частиц. В практике численного моделирования динамики разреженных газов используется интеграл столкновений для случая, когда одновременное взаимодействие трех частиц маловероятно, и учитываются только парные столкновения. Рассмотрим одну из возможных форм записи интеграла столкновений:

$$St(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega'(f' f_1' - f f_1) d\vec{V}_1 d\vec{V}' d\vec{V}_1',$$

где $f = f(t,\vec{r},\vec{V})$, $f_1 = f(t,\vec{r},\vec{V}_1)$, $f' = f(t,\vec{r},\vec{V}')$, $f_1' = f(t,\vec{r},\vec{V}_1')$ — функции распределения частиц по пространству; ω' — функция, определяющая долю частиц, за счет столкновения поменявших скорости с $\vec{V}$ и $\vec{V}_1$ на $\vec{V}'$ и $\vec{V}'_1$; $\vec{V}$ и $\vec{V}_1$ — скорости взаимодействующих молекул до столкновения; $\vec{V}'$ и $\vec{V}_1'$ — скорости тех же частиц после столкновения.

Предположение о сплошности среды не выполняется в условиях околоземного пространства при газовых течениях на микро-, нано- и других уровнях. В то же время использование более общего уравнения Больцмана для расчета поведения ансамбля молекул сопряжено с трудоемким вычислительным процессом, а учет самых простых граничных условий для модельных геометрий приводит к интегродифференциальным уравнениям, требующим последующего численного решения [4]. Таким образом, необходим вычислительно эффективный и физически адекватный метод расчета поведения частиц в рассматриваемых областях.

Модифицированный численный статистический алгоритм. Метод прямого статистического моделирования (метод прямого моделирования Монте-Карло) [7] предполагает рассмотрение газа как множества отдельных частиц с вектором скорости $\vec{V}$, положение которых в пространстве определяется радиус-вектором $\vec{r}$. В качестве расчетной области удобно (но необязательно) выбрать параллелепи-

пед, вмещающий в себя обтекаемое тело и интересующую область окружающего пространства. Расчетная область некоторым образом разбивается на ячейки, в ней задаются положение и структура тела, обтекаемого потоком, и временной шаг моделирования Δt. Моделирование выполняется по итерационной схеме, каждый i-й цикл которой состоит из нескольких этапов.

1. Генерация частиц в расчетную область в соответствии с заданными макроскопическими параметрами окружающей среды (вектора скорости набегающего потока $\vec{V}_\infty$, концентрации молекул *n и температуры* T). *В этом случае* производится розыгрыш скорости молекул на границе расчетной области в соответствии с распределением Максвелла.

2. Моделирование движения частиц без столкновений (между собой). На этом этапе для каждой частицы определяется новое положение по формуле $\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \vec{v}_{i-1}\Delta t$, если за время Δt частица не сталкивается с обтекаемым телом. Здесь $\vec{r}_i$ — радиус-вектор, определяющий положение частицы в расчетной области на i-й итерации; $\vec{v}_{i-1}$ — вектор скорости частицы на $(i-1)$-й итерации; Δt — шаг по времени.

Если же столкновение происходит в момент τ, то каждая частица, для которой определен факт столкновения с телом, претерпевает изменение своего вектора скорости в соответствии с выбранной моделью взаимодействия с границей. В простой модели зеркального отражения вектор скорости частицы изменяется по формуле $\vec{v}_i^{\,w} = \vec{v}_i - 2\vec{n}(\vec{v}_i, \vec{n})$, где $\vec{v}_i^{\,w}$ — скорость частицы, отраженной от обтекаемой поверхности; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности тела. На данном этапе также можно учитывать обмен импульсами между телом и частицей для последующего вычисления аэродинамических характеристик обтекаемого тела. Тогда новое положение частицы определяется по формуле $\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \vec{v}_{i-1}\tau + \vec{v}_{i-1}^{\,w}(\Delta t - \tau)$.

3. Удаление частиц, покинувших пределы расчетной области. После того как для каждой частицы определено новое положение, проверяется попадание ее в расчетную область. Те частицы, которые выходят за пределы области, удаляются.

4. Моделирование соударений частиц между собой. На данном этапе вычисляются новые значения скоростей частиц в результате соударений. Важной особенностью метода ПСМ является учет соударений между частицами только в одной ячейке расчетной области, а также отсутствие необходимости детерминированного расчета столкновения для каждой пары частиц в ячейке (как в методах молекулярной динамики [8]). Все частицы в расчетной области сортиру-

ются по ячейкам разбиения. Пара для столкновения выбирается вероятностно, без учета конкретных положений частиц в ячейке. В классическом методе мажорантной частоты для каждой пары соударяющихся частиц определяется вероятность P_{ij} соударения за единицу времени

$$P_{ij} = \frac{\sigma_{ij}\vec{v}_r \Delta t}{W},$$

где σ_{ij} — сечение столкновения; $\vec{v}_r$ — относительная скорость частицы; W — объем ячейки. Для каждой пары частиц в ячейке определяется вероятность их столкновения и сравнивается со случайным числом $\sim R[0; 1]$. Соударение считается произошедшим, если P_{ij} оказалась больше случайного числа. После этого скорости двух частиц преобразуются в соответствии с выбранной моделью молекул, например моделью жестких сфер.

5. Проверка условий окончания процесса моделирования. В процессе моделирования наступает момент, когда число частиц в ячейках практически перестает изменяться, т. е. наступает стационарный режим течения газа (течение устанавливается). Процесс моделирования прекращается при выполнении n итераций после установления стационарного режима течения, либо при достижении максимального времени моделирования $t_{\max}$, либо при выполнении других условий. Полученное распределение микрочастиц в пространстве используется для вычисления макроскопических характеристик потока и аэродинамических характеристик обтекаемого тела, например, макроскопического вектора скорости $\vec{V}$, с помощью осреднения на одной итерации по характеристикам микрочастиц, принадлежащих той же ячейке, что и точка, в которой необходимо вычислить макропараметр

$$\vec{V} = \frac{\Sigma\vec{v}_i}{k},$$

где k — количество микрочастиц в ячейке и последующего осреднения по числу итераций в установившемся режиме.

Хотя метод прямого моделирования не является непосредственной дискретизацией уравнения Больцмана, результаты его применения можно трактовать как численное решение этого уравнения. При этом доказана сходимость метода ПСМ к решению уравнения Больцмана [7].

При применении метода к расчету обтекания космических летательных аппаратов разреженным потоком требуется выбрать способ задания тела в расчетной области. В данной работе предлагается ме-

тод задания тела и расчета взаимодействия частиц с ним на основе блочной твердотельной геометрии, предполагающей рассмотрение тела как рекурсивной композиции примитивных геометрических объектов, в которой тело может быть примитивом, объединением или пересечением тел, дополнением к телу.

В качестве примитивов выбраны полупространство, шар, внутренность бесконечного цилиндра и внутренность бесконечного конуса с заданными параметрами положения в пространстве, ориентира и характеристик (например, центр и радиус шара, направление и положение оси, радиус цилиндра), предусмотрена возможность расширения набора примитивов. Комбинируя примитивы с помощью операций над множествами $\cup$, $\cap$, $\neg$, можно описать широкий класс геометрических объектов, в том числе близких к реально обтекаемым телам. Такой подход к описанию геометрии реальных объектов зарезарекомендовал себя в различных системах проектирования и численного моделирования. В качестве примера на рис. 1 приведено тело, полученное в результате пересечения шара и четырех полупространств.

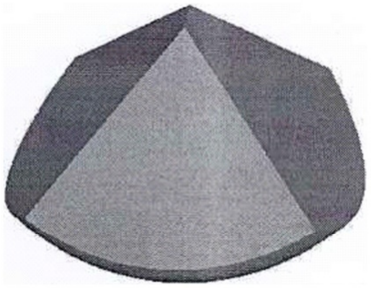


Рис. 1. Тело, полученное в результате комбинирования исходных примитивов

Как и структура данных для задания тела, алгоритм расчета столкновения частицы с таким телом рекурсивен. Для каждого примитивного объекта вводится функция $\tau(p, B)$, которая для любой частицы p, обладающей вектором скорости и положением, возвращает набор интервалов (след частицы на теле):

$$\left[\left(\{t_1, n_1\};\{t_2, n_2\}\right),\ldots,\left(\{t_{2n-1}, n_{2n-1}\};\{t_{2n}, n_{2n}\}\right)\right].$$

Здесь каждая пара значений t определяет промежуток времени, в течение которого траектория частицы проходит внутри тела. Для каждого значения t определяется положение частицы в этот момент времени и вектор нормали к поверхности объекта в соответствующей точке. Для тел, ограниченных поверхностями второго порядка, след состоит из одного интервала, один или два конца которого могут быть бесконечными $\left[\left(\{t_1, n_1\};\{t_2, n_2\}\right)\right]$.

Для сложных объектов (объединений, пересечений и дополнений) следы преобразуются следующим образом:

- след пересечения равен пересечению следов;
- след объединения равен объединению следов;

• след дополнения равен дополнению к следу, при этом все нормали обращаются.

Для определения факта столкновения частицы со сложным телом требуется вычислить след частицы на этом теле. Если при этом результат операции непустой и равен $(-t', 0)$, то считается, что на предыдущем шаге частица столкнулась с телом и углубилась в него на расстояние vt'. Тогда положение частицы изменяется по формуле $\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \vec{v}_{i-1}t'$, а скорость преобразуется с учетом ранее вычисленной нормали в точке столкновения.

Алгоритм позволяет быстро получить простую реализацию трассировщика лучей для визуализации описанных тел, хотя существуют более эффективные алгоритмы для отрисовки объектов блочной твердотельной геометрии (алгоритм Голдфизера, метод марширующих кубиков). За счет реализации алгоритма на языке Haskell вычисление нормалей происходит только в случае соударения частицы с конкретным примитивом, входящим в тело. Таким образом, достигается высокая композиционность алгоритма при невысоких вычислительных издержках.

Существуют разные способы повышения вычислительной эффективности метода прямой симуляции [1, 11], главным образом, связанные с повышением локальности обрабатываемых данных и параллелизацией вычислений по пространству. На этапе соударения взаимодействие частиц в каждой ячейке происходит независимо от других ячеек, следовательно, этот шаг алгоритма ПСМ на каждой итерации можно выполнять параллельно на нескольких вычислительных конвейерах.

Результаты численного моделирования. Основная особенность представленной реализации ПСМ заключается в использовании трассировки лучей для точного определения точек пересечения траекторий частиц с телом по аналитическому описанию структуры тела как композиции примитивов. На этапе столкновений используется обычная регулярная сетка, что позволяет быстро выполнять сортировку. Таким образом, влияние традиционно трудоемкого этапа сортировки молекул на общее время вычислений снижается.

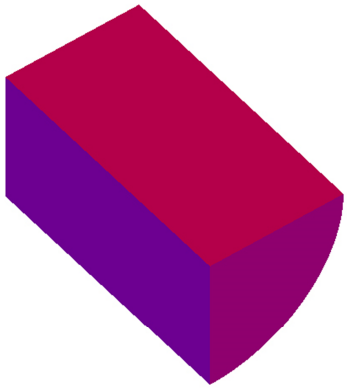


Рис. 2. Геометрия усеченного цилиндра

В качестве тестового случая для испытания эффективности представленной реализации рассмотрим приведенную в статье [8] задачу обтекания усеченного цилиндра (рис. 2) потоком с $\vec{V}_\infty$, направ-

ленной вдоль оси цилиндра. Исходя из того, что в статье [8] рассмотрена осесимметричная задача, а представленная реализация работает с полностью трехмерной постановкой, для эффективности цилиндр был усечен еще двумя плоскостями до четверти и размещен по границе Ω.

С использованием технологии CSG (Constructive Solid Geometry) этот же цилиндр описан следующим образом:

```
body = intersect
(intersect
(intersect (plane (0, 0, 1) 0) (plane (0, 1, 0) 0))
(intersect (plane (1, 0, 0) 5) (plane (–1, 0, 0) 5)))
(cylinder (1, 0, 0) (0, 0, 0) 0.01)
```

Ниже приведем параметры течения.

Газ ..... Аргон
Концентрация молекул, n ..... 10^{21}
Температура стенки, T, K 100
Скорость набегаемого невозмущенного потока, $\vec{V}_\infty$ ..... (1000, 0, 0)
Модель рассеивания ..... Диффузная
Температура поверхности тела, T_w, K 300
Число Кнудсена, Kn 0,01

Причем число Kn находится на нижней границе практической применимости ПСМ.

В работе [12] для аналогичной задачи обтекания усеченного цилиндра при использовании сеточного подхода для геометрии тела (рис. 3) указывается время расчета в 31 ч при шести потоках исполнения. Временной шаг выбран равным $\Delta t = 1{,}87 \times 10^{-7}$.

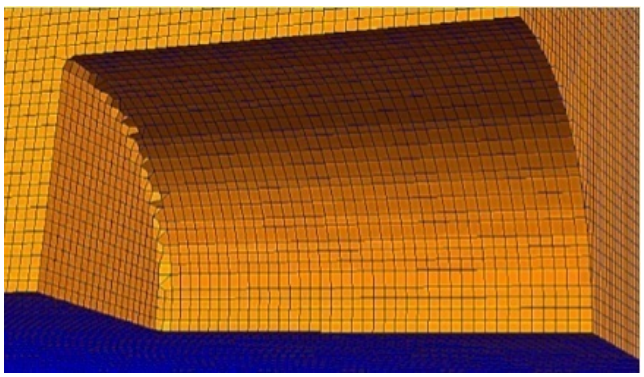


Рис. 3. Обычная сетка для усеченного цилиндра

Представленная реализация алгоритма с использованием трассировки лучей иррегулярной сетки позволила выполнить ту же задачу за 23 ч 47 мин при четырех потоках исполнения. Время сбора статистики после установления составило $t_s/3$, где t_s — время установ-

ления потока. Основной прирост производительности, очевидно, происходит из-за разных подходов к задаче отслеживания частиц в ячейках. Таким образом, применение аналитического подхода к задаче учета граничных условий в ПСМ позволило получить выигрыш по времени счета в 23 % при использовании меньшего числа потоков исполнения. Результаты вычислений — поля ρ/ρ_∞ и T/T_∞ (где ρ — плотность среды) в сравнении с эталонными данными [8] — представлены на рис. 4, 5. Полученные результаты демонстрируют хорошее совпадение с данными, приведенными в статье [8]. Все изображения и геометрии тел построены в Para View. Также было проведено тестирование алгоритма учета геометрии тела с помощью трассировки лучей на телах другой формы, результаты которого в данной статье не были рассмотрены.

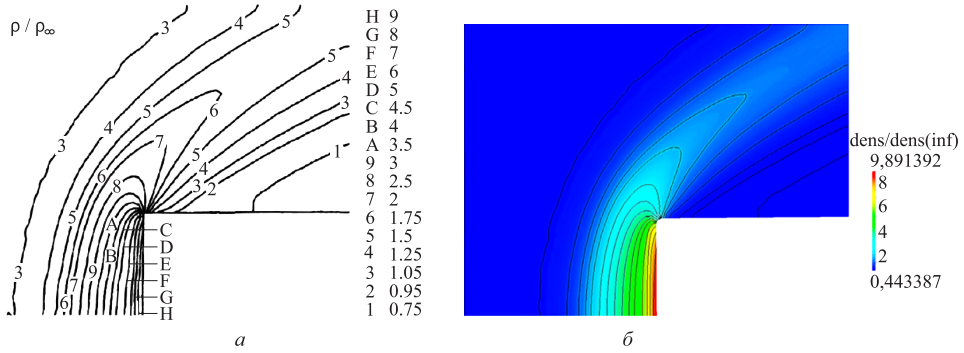


Рис. 4. Поле ρ/ρ_∞ вокруг цилиндра:
а — эталон [8]; *б* — результат

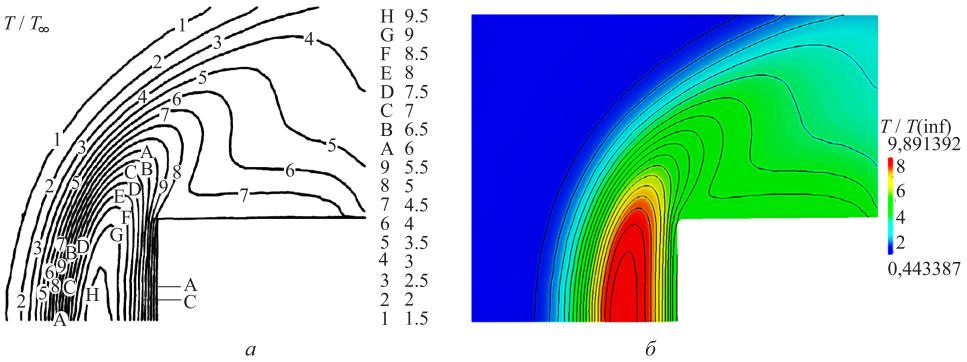


Рис. 5. Поле T/T_∞ вокруг цилиндра:
а — эталон [8]; *б* — результат

Заключение. Предложена модификация метода прямого статистического моделирования для расчета течений разреженных газов в диапазоне чисел Кнудсена от 0,1…10, которая заключается в анали-

тическом описании обтекаемых тел сложной формы на основе блочной твердотельной геометрии и разработке численной реализации алгоритма трассировки лучей. Тестовые расчеты показывают более высокую производительность предложенного метода при сохранении приемлемой точности по сравнению с известными алгоритмами.

Результаты работы заключены в новом расчетном методе, который несколько отличается от метода, использованного в работе [8], и позволяет рассчитывать аэродинамические характеристики тел в разреженных газах более разнообразных форм.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоцерковский О.М. *Численное моделирование в механике сплошных сред*. Москва, 1994, 448 с.

[2] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Сыздыков Е.К. Развитие метода ленточно-адаптивных сеток на основе схем TVD для решения задач газовой динамики. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № 2, с. 87–97.

[3] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. *Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2011, 280 с.

[4] Черчиньяни К. *Теория и приложения уравнения Больцмана*. Москва, 1978, 495 с.

[5] Bird G.A. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Oxford, Oxford University Press, 1994, 479 c.

[6] Rapaport D.C. *The art of molecular dynamics simulation*. Cambridge, Cambridge University Press, 1995, 549 c.

[7] Wagner W. A convergence proof for Bird's direct simulation Monte Carlo method for the Boltzmann equation. *Journal of Statistical Physics*, 1992, vol. 66, iss. 3–4, pp. 1011–1044.

[8] Мальцев Р.В. *Усовершенствованный метод прямого статистического моделирования для решения современных задач динамики разреженных газов*. Москва, 1996, 125 с.

[9] Богданов А.В., Гришин И.А., Захаров В.В., Лукьянов Г.А., Ханларов Г.О. Алгоритмы двухуровневой параллелизации для решения нестационарных задач молекулярной газовой динамики. *Математическое моделирование*, 2000, т. 12, № 6, с. 95–101.

[10] Scanlon T.J. An open source, parallel DSMC code for rarefied gas flows in arbitrary geometries. *Computers and fluids*, 2010, vol. 39 (10), pp. 2078–2089.

[11] Хлопков Ю.И. *Статистическое моделирование в вычислительной аэродинамике*. Москва, Азбука-2000, 2006, 158 с.

[12] Belotserkovskii O.M., Khlopkov Y.I. *Monte Carlo methods of fluids and gas*. London, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010, 268 p.

[13] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 8, с. 75–91.

[14] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Строганов А.С. Численное моделирование сопряженных аэрогазодинамических и термомеханических

процессов в композитных конструкциях высокоскоростных летательных аппаратов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 3–24.

Статья поступила в редакцию 30.06.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Краснов И.К., Мозжорина Т.Ю., Джус Д.В. Численное статистическое моделирование процесса обтекания летательных аппаратов потоком разреженного газа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 3, с. 71–82.

Краснов Игорь Константинович окончил МВТУ им Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 работ в области моделирования систем массового обслуживания, теории распознавания образов, теории теплообмена в твердых телах. e-mail: igorkrsnv@yandex.ru

Мозжорина Татьяна Юрьевна окончила МАИ. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области моделирования характеристик газотурбинных двигателей, моделирования полета пассажирских самолетов, оптимизации силовых установок в системе летательного аппарата. e-mail: mozzhorina@mail.ru

Джус Дмитрий Владимирович окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: математическое моделирование в области газовой динамики.

Numerical statistical simulation of the process of rarefied gas flow over an aircraft

© I.K. Krasnov, T.Yu. Mozzhorina, D.V. Dzhus

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the application of the direct statistical simulation method to the problems of gas dynamics in a rarefied region. An analytical method for assignment and taking into account complex boundary conditions associated with the geometry of the body located in the computational domain is proposed. An algorithm for the rational description of a body streamlined by a gas is developed.

Keywords: *direct statistical simulation, Monte Carlo method, rarefied gas aerodynamics*

REFERENCES

[1] Belotserkovsky O.M. *Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred* [Numerical simulation in continuous mechanics]. Moscow, 1994, 448 p.

[2] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Syzdykov E.K. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2011, no. 2, pp. 87–97.

[3] Dimitrienko Yu.I., Kotenev V.P., Zakharov A.A. *Metod lentochnykh adaptivnykh setok dlya chislennogo modelirovaniya v gazovoy dinamike* [Method of band adaptive nets for numerical simulation in gas dynamics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2011, 280 p.

[4] Cercignani C. *Theory and application of the Boltzmann equation.* London, Chatto and Windus Publ., 1975, 415 p. [In Russ.: Cherchinani C. Theoriya i prilozheniya uravneniya Boltzmana. Moscow, Mir Publ., 1978, 496 p.].
[5] Bird G.A. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Oxford, Oxford University Press Publ., 1994, 479 p.
[6] Rapaport D.C. *The art of molecular dynamics simulation*. Cambridge, Cambridge University Press Publ., 1995, 549 p.
[7] Wagner W. *Journal of Statistical Physics*, 1992, vol. 66, no. 3–4, pp. 1011–1044.
[8] Maltsev R.V. *Usovershenstvovannyy metod pryamogo statisticheskogo modelirovaniya dlya resheniya sovremennykh zadach dinamiki razrezhennykh gazov* [An improved direct statistical simulation technique for solving modern problems of rarefied gas dynamics]. Moscow, 1996, 125 p.
[9] Bogdanov A.V., Grishin I.A., Zakharov V.V., Lukyanov G.A., Khanlarov G.O. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2000, vol. 12, no. 6, pp. 95–101.
[10] Scanlon T.J. *Computers and fluids*, 2010, vol. 39 (10), pp. 2078–2089.
[11] Khlopkov Yu.I. *Statisticheskoe modelirovanie v vychislitelnoy aerodinamike* [Statistical modeling in computational aerodynamics]. Moscow, Azbuka-2000 Publ., 2006, 158 p.
[12] Belotserkovsky O.M., Khlopkov Y.I. *Monte Carlo methods of fluids and gas*. London, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010, 268 p.
[13] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2015, no. 8, pp. 75–91.
[14] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Stroganov A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3, pp. 3–24.

Krasnov I.K. graduated from Bauman Moscow State Technical University, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, author of over 50 research works in the field of queuing system simulation, the theory of pattern recognition, the theory of heat exchange in solids. e-mail: igorkrsnv@yandex.ru.

Mozzhorina T.Yu. graduated from Moscow Aviation Institute, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, author of 20 research works in the field of simulation of the characteristics of gas turbine engines, simulation of the passenger aircraft flight, optimization of power plants in the aircraft system.
e-mail: mozzhorina@mail.ru.

Dzhus D.V. graduated from Bauman Moscow State Technical University. Science research interests: mathematical simulation in the field of gas dynamics.