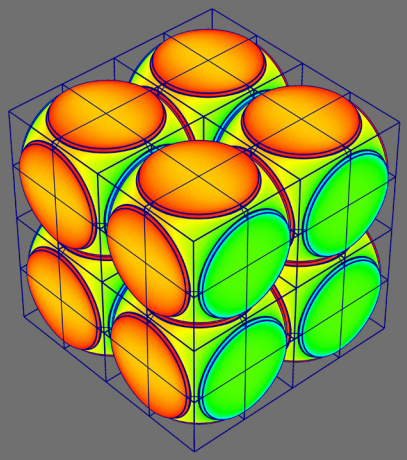
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование повреждаемости и долговечности композитных элементов конструкций с дефектами типа расслоения. Математическое моделирование и численные методы, 2017, No 3, с. 49–70.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/141/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
23.11.2026 20:41:21

УДК 539.3 DOI 10.18698/2309-3684-2017-3-4970

Конечно-элементное моделирование повреждаемости и долговечности композитных элементов конструкций с дефектами типа расслоения

© Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработана методика для моделирования повреждаемости при циклическом нагружении элементов конструкций из слоисто-волокнистых композиционных материалов с дефектами типа расслоения. Методика состоит из трех этапов, итерационно повторяющихся в цикле по времени: конечно-элементного моделирования макроскопического напряженно-деформированного состояния в конструкции с дефектами; моделирования микроскопического напряженно-деформированного состояния в окрестности расслоения; моделирования накопления повреждений в матрице, соединяющей слои армирующих волокон в окрестности дефекта. В модели учитывается криволинейная анизотропия композиционного материала в составе конструкций сложной геометрической формы. Приведен пример численного расчета фрагмента композитной конструкции несущей лопасти вертолета с учетом дефекта типа расслоения. Продемонстрирована возможность применения разработанной методики для моделирования повреждаемости в сложных композитных конструкциях. Конечно-элементное решение макроскопической задачи реализовано с помощью программной платформы SMCM, разработанной в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «СИМПЛЕКС») МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ключевые слова: *композиты, дефекты, расслоения, метод конечного элемента, химический критерий прочности, повреждаемость, циклическое нагружение, усталость, несущая лопасть винта*

Введение. В настоящее время композиты все более широко применяются в самолетостроении, вертолетостроении, судостроении, строительстве, ветряной энергетике, электронике [1–6]. В этих областях существуют особые требования к инженерным конструкциям — требования по надежности и долговечности при длительной эксплуатации. Композиты по сравнению с традиционными металлами и сплавами обладают более высоким уровнем содержания различных дефектов, в том числе свойственными только им дефектами типа расслоений, поэтому методы прогнозирования долговечности композитных конструкций отличаются от методик расчета традиционных инженерных конструкций и в настоящее время еще не стандартизированы, их разработка активно ведется в научных центрах [5–15]. В настоящей работе предложена методика прогнозирования процессов повреждаемости и долговечности конструкций из слоистых композитов при наличии в них дефектов типа расслоений, основанная на ко-

нечно-элементном анализе напряженно-деформированного состояния конструкций и использовании так называемого химического критерия длительной прочности [16, 17].

Моделирование напряженно-деформированного состояния в композитных конструкциях с дефектами. Рассмотрим конструкцию из слоисто-волокнистого композиционного (СВК) материала [18, 19], слои которого образованы волокнами, ориентированными под определенными углами друг к другу. Волокна в слоях соединены между собой матрицей (связующим). Между слоями композита могут располагаться дефекты типа расслоения, полагаем, что они имеют форму сильно сплющенного эллипсоида. Под действием вибрационных нагрузок, приложенных к элементу конструкции из СВК, размеры расслоения могут увеличиваться.

Предлагаемая методика прогнозирования долговечности конструкций из СВК с дефектами типа расслоения включает три этапа, итерационно повторяющихся в цикле по времени:

- конечно-элементное моделирование макроскопического напряженно-деформированного состояния (НДС) в конструкциях с дефектами;
- моделирование микроскопического НДС в слое связующего, который соединяет соседние в окрестности вершины дефекта типа расслоения;
- моделирование повреждаемости материала в окрестности дефекта.

Долговечность элемента конструкции из СВК определяется как момент времени достижения дефектом предельных размеров, назначаемых априори, например момента полного разделения конструкции на части.

Рассмотрим первый этап методики. Для расчета макроскопического НДС конструкций из композитов с дефектами рассмотрим постановку трехмерной задачи механики анизотропного деформируемого твердого тела [20] в декартовых координатах x_m, которые будем назвать глобальными:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j), \\
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}(z)\varepsilon_{kl}, \qquad (1) \\
&\Sigma_\sigma : \sigma_{ij} n_j = S_i, \qquad \Sigma_d : \sigma_{ij} n_j = 0, \qquad \Sigma_u : u_i = u_{ei}, \\
&\Sigma_S : \sigma_{kj} n_j = S_{ek}, \quad u_l = u_{el}, \quad k = 1, ..., J, \quad l = 1, ..., L, \quad J + L = 3.
\end{aligned}
$$

Система (1) состоит из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, силовых граничных условий на части поверхности Σ_σ, кинематических граничных условий на части поверхности Σ_u конструкции, смешанных граничных условий на части поверхности Σ_S и условия на внутренней поверхности дефекта Σ_d. В уравнениях (1) введены следующие обозначения: σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; u_j — компоненты вектора перемещений; $\nabla_j = \partial / \partial x_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам [21]; n_i — компоненты вектора нормали к поверхности; $C_{ijkl}(z, x_m)$ — компоненты тензора модулей упругости СВК, который на данном этапе расчета принимается однородным материалом, но зависит от параметра повреждаемости z и координат x_m из-за возможной криволинейной анизотропии; S_{ek} — компоненты вектора усилий; u_{el} — компоненты вектора перемещений на части Σ_u поверхности конструкции; u_{ei} — компоненты вектора перемещений на части Σ_u конструкции; S_i — компоненты вектора усилий на части Σ_σ поверхности.

Модель для расчета компонент тензора модулей упругости. Полагаем, что рассматриваемая конструкция из композитов обладает криволинейной анизотропией, т. е. существуют криволинейные ортогональные координаты q_i, связанные с глобальными декартовыми координатами x_m соотношением $q_i(x_m)$ (рис. 1). Координатная линия q_1 является ортогональной к срединной поверхности конструкции в точке пересечения с ней. Введем локальные декартовы координаты ξ_i, направленные по касательным к координатным линиям q_i в точке O. Координатные линии ξ_i образуют главные оси криволинейной анизотропии [21], в которых тензор модулей упругости $C^{(0)}_{ijkl}(z)$ является ортотропным и связан с компонентами $C_{ijkl}(z, x_m)$ в декартовых координатах x_m соотношениями

$$C_{ijkl}(z, x_m) = C^{(0)}_{i'j'k'l'}(z) Q_{ii'} Q_{jj'} Q_{kk'} Q_{ll'}, \qquad (2)$$

где $Q_{ii'} = \partial x_i / \partial q_{i'}$ — якобиева матрица [21].

Для расчета компонент тензора модулей упругости СВК $C^{(0)}_{ijkl}(z)$ используем модель слоистого материала с периодической структурой [22, 23], ячейка периодичности которого состоит из N слоев (рис. 2),

а каждый слой с номером $\alpha = 1, ..., N$ представляет собой ортотропный однонаправленный материал с волокнами, ориентированными по оси $O\xi_3^{(\alpha)}$, повернутой на угол армирования ϕ_α вокруг оси $O\xi_1 = O\xi_1^{(\alpha)}$, где O — некоторая фиксированная точка, начало локальных $O\xi_i$ и собственной $O\xi_i^{(\alpha)}$ систем координат. Тогда компоненты тензора модулей упругости α-слоя в системе координат $O\xi_i$ вычисляются следующим образом:

$$C_{ijkl}^{(\alpha)}(z) = \hat{C}_{mnpq}^{(\alpha)}(z) Q_{im}^{\alpha} Q_{jn}^{\alpha} Q_{kp}^{\alpha} Q_{\ell q}^{\alpha}. \qquad (3)$$

Здесь $\hat{C}_{mnpq}^{(\alpha)}(z)$ — компоненты тензора модулей упругости однонаправленного слоя (1D-слоя) в собственной системе координат $O\xi_i^{(\alpha)}$, связанной с направлением армирующих волокон; Q_{im}^{α} — элементы матрицы поворота слоя с номером α.

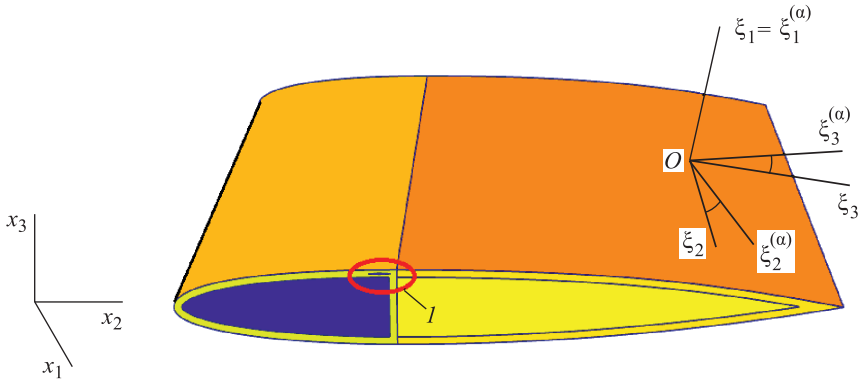


Рис. 1. Модель элемента композитной конструкции:
1 — дефект; x_m — глобальная система координат; q_i — криволинейная система координат; $\xi_i^{(\alpha)}$ — локальная декартова система координат

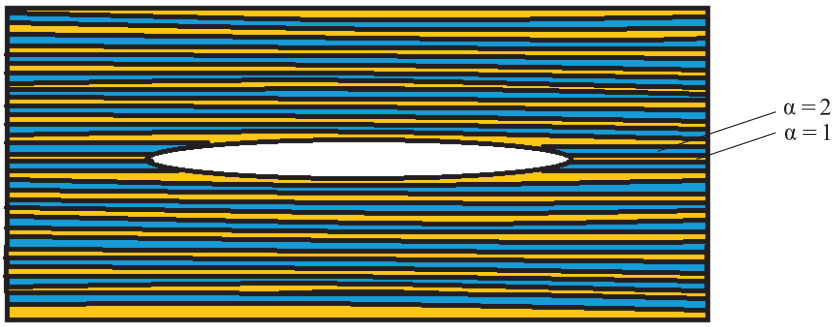


Рис. 2. Периодическая структура композита с дефектом типа расслоения

Матрица Q_{im}^{α} поворота слоя имеет вид

$$[Q^{\alpha}{}_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_{\alpha} & \sin\phi_{\alpha} \\ 0 & -\sin\phi_{\alpha} & \cos\phi_{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Для вычисления компонент тензоров модулей упругости $\hat{C}^{(\alpha)}_{mnpq}(z)$ 1D-слоя воспользуемся приближенной моделью смесевого типа [18, 24], в которой технические модули упругости 1D-слоя вычислим по смесевым формулам

$$E_L^{(\alpha)} = E_f'^{(\alpha)}\varphi_f^{(\alpha)} + E_m^{(\alpha)}(1-\varphi_f^{(\alpha)}),\ \ E_T^{(\alpha)} = \left(\frac{\varphi_f^{(\alpha)}}{E_f^{(\alpha)}} + \frac{1-\varphi_f^{(\alpha)}}{E_m^{(\alpha)}}\right)^{-1},$$

$$\nu_L^{(\alpha)} = \nu_f'^{(\alpha)}\varphi_f^{(\alpha)} + \nu_m^{(\alpha)}(1-\varphi_f^{(\alpha)}),\ \ \nu_T^{(\alpha)} = \nu_m^{(\alpha)}, \tag{5}$$

$$G_L^{(\alpha)} = \left(\frac{2\varphi_f^{(\alpha)}(1+\nu_f^{(\alpha)})}{E_f^{(\alpha)}} + \frac{2(1-\varphi_f^{(\alpha)})(1+\nu_m^{(\alpha)})}{E_m^{(\alpha)}}\right)^{-1},$$

где $E_L^{(\alpha)}$ — продольный модуль упругости 1D-слоя в направлении волокон слоя; $E_T^{(\alpha)}$ — поперечный модуль упругости 1D-слоя; $\nu_L^{(\alpha)}$, $\nu_T^{(\alpha)}$ — продольный и поперечный коэффициенты Пуассона 1D-слоя соответственно; $G_L^{(\alpha)}$ — продольный модуль сдвига; $G_T^{(\alpha)} = \dfrac{E_T^{(\alpha)}}{2(1+\nu_T^{(\alpha)})}$ — поперечный модуль сдвига 1D-слоя.

В формулах (5) также обозначены: $E_f'^{(\alpha)}$, $E_f^{(\alpha)}$ — продольный и поперечный модули упругости моноволокон, которые полагаются трансверсально-изотропными; $\nu_f'^{(\alpha)}$, $\nu_f^{(\alpha)}$ — продольный и поперечный коэффициенты Пуассона моноволокон; $E_m^{(\alpha)}$ и $\nu_m^{(\alpha)}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы; $\varphi_f^{(\alpha)}$ — относительное объемное содержание моноволокон в 1D-слое.

Модель позволяет рассматривать гибридные СВК, у которых волокна, матрица и содержание моноволокон $\varphi_f^{(\alpha)}$ различны в каждом 1D-слое. В некоторых слоях могут отсутствовать волокна, т. е. они представляют собой только матрицу. Будем полагать, что такие слои чередуются со слоями, содержащими волокна, и представляют собой связующее, соединяющее смежные 1D-слои.

Тогда

$$\phi_\alpha = 0\,, \qquad \varphi_f^{(\alpha)} = 0, \qquad \alpha = 2,\ 4,\ 6, \ldots . \tag{6}$$

Обозначим $h^{(\alpha)}$ относительные толщины всех 1D-слоев. Тогда общее содержание матрицы в композите

$$\varphi_m = \sum_{\alpha=1}^{N} h^{(\alpha)}(1-\varphi_f^{(\alpha)}). \tag{7}$$

С помощью упругих констант 1D-слоя вычисляются тензоры упругих податливостей $\hat{\Pi}_{ijkl}^{(\alpha)}$ слоя в собственных системах координат $O\xi_i^{(\alpha)}$:

$$(\hat{\Pi}_{ijkl}^{(\alpha)}) = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{1111}^{(\alpha)} & \hat{\Pi}_{1122}^{(\alpha)} & \hat{\Pi}_{1133}^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 \\ & \hat{\Pi}_{2222}^{(\alpha)} & \hat{\Pi}_{2233}^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \hat{\Pi}_{3333}^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\hat{\Pi}_{1313}^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & 2\hat{\Pi}_{2323}^{(\alpha)} & 0 \\ & & & & & 2\hat{\Pi}_{1212}^{(\alpha)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_T^{(\alpha)}} & -\dfrac{\nu_T^{(\alpha)}}{E_T^{(\alpha)}} & -\dfrac{\nu_L^{(\alpha)}}{E_L^{(\alpha)}} & 0 & 0 & 0 \\ & \dfrac{1}{E_T^{(\alpha)}} & -\dfrac{\nu_L^{(\alpha)}}{E_L^{(\alpha)}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \dfrac{1}{E_L^{(\alpha)}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dfrac{1}{2G_L^{(\alpha)}} & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & \dfrac{1}{2G_L^{(\alpha)}} & 0 \\ & & & & & \dfrac{1}{2G_T^{(\alpha)}} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

При отсутствии повреждений тензор модулей упругости 1D-слоя в собственной системе координат $O\xi_i^{(\alpha)}$ является обратным тензору упругих податливостей: $\hat{C}_{ijkl}^{(\alpha)} = (\hat{\Pi}_{ijkl}^{(\alpha)})^{-1}$.

Модели накопления повреждений в однонаправленных материалах рассмотрены во многих работах, среди них [6, 9, 13, 24–26]. Для задач моделирования распространения дефектов типа расслоений достаточно учесть только один из двух основных механизмов повреждаемости 1D-слоев — микроразрушение матрицы в окрестности моноволокон, вследствие которого происходит снижение упругопрочностных свойств 1D-слоя при межслойных сдвигах в поперечном к моноволокнам направлении. Разрушения моноволокон при исследовании процессов расслоения можно не рассматривать, поскольку они происходят при более высоком уровне напряжений в конструкции.

Будем полагать, что из-за микрорастрескивания матрицы в окрестности моноволокон происходит изменение параметра повреждаемости $z^{(\alpha)}$. Если $z^{(\alpha)}$ достигает значения 1, происходит частичное разрушение 1D-слоя, вследствие чего все значения компонент тензора модулей упругости $\hat{C}_{ijkl}^{(\alpha)}$, кроме упругого модуля $\hat{C}_{1111}^{(\alpha)}$, в направлении моноволокон слоя обнуляются. Тогда выражение для компонент тензора модулей упругости нити в собственной системе координат для всех этапов деформирования вплоть до разрушения можно записать как

$$\hat{C}_{ijkl}^{(\alpha)} = \left(\left(1 - h(z^{(\alpha)} - 1)\right)(\hat{\Pi}_{ijkl}^{(\alpha)})^{-1} + h(z^{(\alpha)} - 1)E_L \delta_{\alpha i}\delta_{\alpha j}\delta_{\alpha k}\delta_{\alpha l}\right), \ \alpha = 1, 3, 5, ..., \quad (9)$$

где $h(z^{(\alpha)} - 1)$ — функция Хевисайда; $h(z^{(\alpha)} - 1) = 0$, если $z^{(\alpha)} < 1$, и $h(z^{(\alpha)} - 1) = 1$, если $z^{(\alpha)} \geq 1$.

Для слоев, содержащих только матрицу без волокон, значение параметра повреждаемости $z^{(\alpha)} \geq 1$ приводит к обулению всех компонент тензора модулей упругости данного слоя

$$\hat{C}_{ijkl}^{(\alpha)} = \left(1 - h(z^{(\alpha)} - 1)\right)(\hat{\Pi}_{ijkl}^{(\alpha)})^{-1}, \qquad \alpha = 2, 4, 6, \ldots . \quad (10)$$

Для вычисления компонент тензора модулей упругости $C_{ijkl}^{(0)}(z)$ всего СВК в системе координат $O\xi_i$ используем формулы метода асимптотического осреднения слоистых периодических структур [23, 27]:

$$C_{ijkl}^{(0)}(z) = < H_{ijkl}^{(\alpha)}(\mathrm{z}) >, \quad (11)$$

где обозначены компоненты тензора $H_{ijkl}^{(\alpha)}(\mathrm{z})$

$$H_{IJKL}^{(\alpha)}(\mathrm{z}) = C_{IJKL}^{(\alpha)} + C_{IJk1}^{(\alpha)} C_{k1i1}^{(\alpha)-1} < C_{i1p1}^{(\alpha)-1} >^{-1} < C_{p1j1}^{(\alpha)-1} C_{j1KL}^{(\alpha)} > - C_{IJk1}^{(\alpha)} C_{k1i1}^{(\alpha)-1} C_{i1KL}^{(\alpha)}, \quad (12)$$

$$H_{IJk1}^{(\alpha)}(\mathrm{z}) = C_{IJj1}^{(\alpha)} C_{j1i1}^{(\alpha)-1} < C_{i1k1}^{(\alpha)-1} >^{-1},$$

а также введено обозначение для среднего по всей ячейке периодичности СВК

$$< H_{ijkl}^{(\alpha)}(\mathrm{z})>=\sum_{\alpha=1}^{N} h^{(\alpha)} H_{ijkl}^{(\alpha)}(\mathrm{z}). \qquad (13)$$

Заметим, что $< H_{ijkl}^{(\alpha)} >=< H_{klij}^{(\alpha)} >$, но $H_{ijkl}^{(\alpha)} \neq H_{klij}^{(\alpha)}$.

Получив компоненты тензора модулей упругости $C_{ijkl}(z, x_m)$ СВК, вычислим эффективный тензор упругих податливостей $\Pi_{ijkl}(z, x_m)$ СВК, являющийся обратным к C_{ijkl}:

$$\Pi_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}. \qquad (14)$$

Затем определим девять технических упругих констант СВК: $E_\alpha = \dfrac{1}{\Pi_{\alpha\alpha\alpha\alpha}}$ — эффективные модули Юнга; $\nu_{\alpha\beta} = -E_\alpha \Pi_{\alpha\alpha\beta\beta}$ — эффективные коэффициенты Пуассона; $G_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\alpha\beta}$ — эффективные модули сдвига.

Моделирование микроскопического напряженно-деформированного состояния в окрестности расслоения. Рассмотрим второй этап методики. Для того чтобы определить условия возможного роста расслоения, в силу специфики дефекта типа расслоения, у которого фронт расположен в матрице, соединяющей соседние однонаправленные слои, необходимо вычислить микроскопическое НДС в матрице окрестности края расслоения. Для этого найдем компоненты тензоров концентрации напряжений $B_{ijkl}^{(\alpha)}$, связывающие напряжения $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ в слоях СВК с макроскопическими напряжениями σ_{kl} в СВК композите по формулам

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = B_{ijkl}^{(\alpha)} \sigma_{kl}, \qquad \alpha = 1, ..., N. \qquad (15)$$

Компоненты тензора концентрации напряжений $B_{ijkl}^{(\alpha)}$ в СВК вычисляются по формулам [27]

$$\begin{aligned}
B_{IJKL}^{(\alpha)} &= H_{IJMN}^{(\alpha)} \Pi_{MNKL} + H_{IJp1}^{(\alpha)} \Pi_{p1KL}, \\
B_{IJk1}^{(\alpha)} &= H_{IJMN}^{(\alpha)} \Pi_{MNk1} + H_{IJp1}^{(\alpha)} \Pi_{p1k1}, \\
B_{i1KL}^{(\alpha)} &= H_{i1MN}^{(\alpha)} \Pi_{MNKL} + H_{i1p1}^{(\alpha)} \Pi_{p1KL}, \\
B_{i1k1}^{(\alpha)} &= H_{i1MN}^{(\alpha)} \Pi_{MNk1} + H_{i1p1}^{(\alpha)} \Pi_{p1k1}.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Тензор концентрации напряжений в отличие от тензоров модулей упругости, упругих податливостей, теплопроводности не является симметричным по парам индексов ($B^{(\alpha)}_{ijkl} \neq B^{(\alpha)}_{klij}$) и имеет 36 компонент.

В собственной системе координат $O\xi^{(\alpha)}_i$-слоя напряжения $\hat{\sigma}^{(\alpha)}_{ij}$ вычисляются следующим образом:

$$\hat{\sigma}^{(\alpha)}_{ij} = \sigma^{(\alpha)}_{mn} Q^{\alpha}{}_{im} Q^{\alpha}{}_{in},$$

где $\sigma^{(\alpha)}_{mn}$ определяются по формуле (15).

Параметр повреждаемости на основе «химического» критерия длительной прочности. Перейдем к третьему этапу методики. Расчет накопления повреждений в матрице описывается параметром повреждаемости $z^{(\alpha)}$, для нахождения которого используем «химический» критерий длительной прочности [16, 17]. Согласно данному критерию, параметр повреждаемости $z^{(\alpha)}(t)$ состоит из двух частей, характеризующих обратимые и необратимые повреждения:

$$z^{(\alpha)}(t) = z^{(\alpha)}_r(t) + z^{(\alpha)}_d(t). \tag{17}$$

Параметр обратимых повреждений $z^{(\alpha)}(t)$ выбираем в следующем виде:

$$z^{(\alpha)}_r(t) = \frac{\sigma^2_{u-}}{3\sigma^2_S} + K_0 \int_0^t \frac{\sigma^2_{u-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\gamma}} - \Gamma_0^2 \left(\int_0^t \frac{\sigma_{u-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta}} \right)^2. \tag{18}$$

Здесь обозначены первый и второй инварианты тензора напряжений

$$\sigma = \hat{\sigma}^{(\alpha)}_{11} + \hat{\sigma}^{(\alpha)}_{22} + \hat{\sigma}^{(\alpha)}_{33},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big((\hat{\sigma}^{(\alpha)}_{11} - \hat{\sigma}^{(\alpha)}_{22})^2 + (\hat{\sigma}^{(\alpha)}_{11} - \hat{\sigma}^{(\alpha)}_{33})^2 + (\hat{\sigma}^{(\alpha)}_{22} - \hat{\sigma}^{(\alpha)}_{33})^2 + 6(\hat{\sigma}^{(\alpha)2}_{12} + \hat{\sigma}^{(\alpha)2}_{13} + \hat{\sigma}^{(\alpha)2}_{23}) \Big)^{1/2}, \tag{19}$$

а также функция, образованная этими двумя инвариантами,

$$\sigma^2_{u-} = \frac{\sigma^2_u}{1 + B_0 V(\sigma)}. \tag{20}$$

Здесь также σ_S, B, K_0, Γ_0, γ, β — набор констант модели. Константа B_0 вычисляется через пределы статической прочности при сжатии и сдвиге:

$$B_0 = \left(\frac{\sigma_C^2}{3\sigma_S^2} - 1 \right) \frac{1}{\sigma_C}. \qquad (21)$$

В модели между пределами статической прочности выполняются соотношения $\sigma_C > \sqrt{3}\sigma_S$, $\sigma_C > 0$, $\sigma_S > 0$, $\sigma_T = \sqrt{3}\sigma_S$.

В модели (20) введена непрерывная положительная функция от первого инварианта $V(\sigma)$, описывающая гладкий переход накопления повреждений в областях растяжения и сжатия:

$$V(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma > 0; \\ -\sigma, & \text{если} \quad -\sigma_C < \sigma < 0; \\ \sigma_C, & \text{если} \quad \sigma < -\sigma_C. \end{cases} \qquad (22)$$

При кратковременном нагружении $(t \approx 0)$ модель параметра повреждаемости (18) позволяет учесть различие накопления повреждений в области растяжения и сжатия:

$$\sigma_u^2 = 3\sigma_S^2 \left(1 + B_0 V(\sigma)\right). \qquad (23)$$

Согласно этому критерию, в области растяжения $(\sigma > 0)$ поверхность прочности совпадает с поверхностью прочности по критерию Мизеса: $\sigma_u^2 = 3\sigma_S^2$, в области сжатия $(-\sigma_C < \sigma < 0)$ происходит увеличение предела прочности $\sigma_u^2 = 3\sigma_S^2(1 + B_0\sigma)$, а в области «сверхсжатия» $(\sigma < -\sigma_C)$ поверхность прочности снова совпадает с поверхностью прочности по критерию Мизеса, но с измененным пределом прочности $\sigma_u^2 = \sigma_C^2$. Как и по критерию Мизеса, при всестороннем сжатии или растяжении при выполнении условия $\sigma_u = 0$ и разрушения не происходит.

Для необратимой части повреждений $z_d^{(\alpha)}(t)$ имеет место выражение

$$z_d^{(\alpha)}(t) = D_0 \int_0^t \sigma_{u-}^2(\tau) d\tau - W_0 \int_0^t \sigma_{u-}(\tau) \int_0^\tau e^{-q(\tau - x)} \sigma_{u-}(x) dx d\tau, \qquad (24)$$

где D_0, W_0, q — константы модели.

Параметр повреждаемости при циклическом нагружении. Рассмотрим случай циклического нагружения композитной конструкции, когда компоненты векторов усилий S_{ek} и перемещений u_{el}, а также тензоров напряжений $\hat{\sigma}_{ij}^{(\alpha)}$, $\sigma_{mn}^{(\alpha)}$, σ_{mn} могут быть представлены в гармоническом виде:

$$\Omega = \Omega^0 \chi(t), \quad \Omega = \{S_{ek}, u_{el}, \hat{\sigma}_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{mn}^{(\alpha)}, \sigma_{mn}, \sigma_u, \sigma, u_k\}, \tag{25}$$

$$\chi(t) = \frac{1}{\overline{p} + p_a}\left(\overline{p} + \sum_{j=0}^{\infty}(p_j{}' \cos\omega_j t + p_j{}'' \sin\omega_j t)\right),$$

$$p_a = \sum_{j=0}^{\infty}(p_j{}'^2 + p_j{}''^2)^{1/2},$$

где Ω^0 — амплитуда колебаний; $\overline{p}$, $p_j{}'$, $p_j{}''$ — константы; ω_j — частоты колебаний.

При условии $|\overline{p}| > |p_a|$ (чисто асимметричный цикл колебаний) параметр повреждаемости $z_r^{(\alpha)}(t)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$z_r^{(\alpha)}(t) = \sigma_u^{02} B(t),$$

$$B(t) = \frac{\tilde{f}_0}{3\sigma_S^2} + B_3(t)\tilde{f}_1 - B_4(t)\tilde{f}_2, \tag{26}$$

$$B_3(t) = \frac{K_0}{1-\gamma} t^{1-\gamma} + tD_0, \qquad B_4(t) = \frac{\Gamma_0^2}{(1-\beta)^2} t^{2-2\beta} + t\frac{W_0}{q}.$$

Здесь

$$\tilde{f}_0 = \frac{1}{1 + B_1 V(\sigma^0)}, \quad \tilde{f}_1 = \left\langle \frac{\chi^2(t)}{1 + B_1 V\left(\sigma^0 \chi(t)\right)} \right\rangle,$$

$$\tilde{f}_2 = \left\langle \frac{\chi(t)}{\left(1 + B_1 V\left(\sigma^0 \chi(t)\right)\right)^{1/2}} \right\rangle^2. \tag{27}$$

Осреднение осуществляется по максимальному периоду цикла колебаний

$$\langle g \rangle = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_{\min}} g(t)dt, \tag{28}$$

где $\omega_{\min}$ — наименьшая частота нагружения из частот ω_j.

Для ассиметричного цикла колебаний нагружение происходит только в области сжатия ($\overline{p} < -p_a$) или только растяжения ($\overline{p} > p_a$), поэтому интегралы (27) можно упростить

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_0 \left\langle \chi^2(t) \right\rangle = \tilde{f}_0 f_1(r), \quad \tilde{f}_2 = \tilde{f}_0 \left\langle \chi(t) \right\rangle^2 = \tilde{f}_0 f_2(r),$$

$$f_0(r) = 1, \qquad f_1(r) = \frac{1}{8}(3 + 2r + 3r^2), \qquad f_2(r) = \frac{(1+r)^2}{4}, \qquad (29)$$

где r — коэффициент асимметрии цикла, $r = \dfrac{\overline{p} - p_a}{\overline{p} + p_a}$.

Преобразуем выражение для параметра повреждаемости $z_r^{(\alpha)}(t)$:

$$z_r^{(\alpha)}(t) = \frac{\sigma_u^{02}}{1 + B_1 V(\sigma^0)} B(t),$$
$$B(t) = \frac{1}{3\sigma_S^2} + B_3(t) f_1 - B_4(t) f_2. \qquad (30)$$

Далее будем пренебрегать эффектами необратимых повреждений, т. е. положим, что $W_0 = D_0 = 0$.

Моделирование накопления повреждений в композитной несущей лопасти вертолета. Для численного решения макроскопической задачи (1) был применен метод конечного элемента [14, 28, 29]. Программная реализация решения этой трехмерной задачи механики была осуществлена с помощью программной платформы SMCM, разработанной в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «СИМПЛЕКС») МГТУ им. Н.Э. Баумана. Для визуализации трехмерных полей перемещений и напряжений в трехслойной пластине использовался программный модуль Netgazer, также разработанный в НОЦ «СИМПЛЕКС».

В качестве примера применения разработанной методики была рассмотрена задача о моделировании распространения усталостного разрушения при изгибе фрагмента композитной конструкции несущей лопасти вертолета с учетом дефектов (см. рис. 1). Фрагмент конструкции состоит из закругленного носка и лонжерона, находящегося в срединной и хвостовой части [1] (см. рис 1). Носок является полым и имеет только композитную обшивку. Лонжерон — композитный. Хвостовая часть имеет две обшивки и сотовый заполнитель, в качестве которого был выбран алюминиевый. Все обшивки полагались изготовленными из углепластикового композита, ячейка периодичности которого содержала 8 слоев ($N = 8$) и имела схему армирования угле-

родными волокнами [0°/45°/–45°/90°] (углы ϕ_α слоев с номерами $\alpha = 1, 3, 5, 7$ равны 0°, 45°, –45° и 90° соответственно. Матрица (связующее) была выбрана эпоксидной.

Значения эффективных технических упругих констант композита, рассчитанные по формулам (14) для углепластиковых волокон на эпоксидном связующем, а также значения технических упругих констант сотового заполнителя приведены в табл. 1. Методика расчета характеристик сотового заполнителя представлена в работе [30]. Упругие и прочностные характеристик матрицы даны в табл. 2.

Таблица 1

Эффективные технические упругие константы углепластикового композита [0°/45°/–45°/90°] (1) и сотового заполнителя (2)

№	E_1, ГПа	E_2, ГПа	E_3, ГПа	G_{12}, ГПа	G_{13}, ГПа	G_{23}, ГПа	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
1	47,752	9,039	47,752	3,831	10,431	3,831	0,315	0,158	0,059
2	7,625	0,631	0,631	0,556	0,556	0,170	0,145	0,145	0,251

Таблица 2

Упругие и прочностные характеристки эпоксидной матрицы

Характеристика	E, ГПа	ν	σ_T, ГПа	σ_C, ГПа	Γ_0, $\text{ГПа}^{-1}\text{с}^{\beta-1}$	K_0, $\text{ГПа}^{-2}\text{с}^{2\gamma-2}$	β	γ
Значения	3,1	0,31	0,075	0,175	0,02044	$4{,}89744\cdot10^{-3}$	0,05	0,05

Граничные условия: на одном торце элемента конструкции лопасти $x_1 = 0$ были заданы условия жесткого защемления $u_i = u_{ei} = 0$, на другом $x_1 = L$ — условия симметрии $\sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$, $u_1 = 0$. На верхней поверхности лопасти задавалось равномерное распределенное давление, изменяющееся по циклическому закону (25) с амплитудой колебаний $p_a = 0{,}385$ МПа и коэффициентом асимметрии $k = 1$. Остальные части поверхности лопасти были свободны от нагрузок.

Геометрические размеры элемента конструкции лопасти:

Длина, м 1,6
Ширина, м 0,5
Толщина обшивок, мм 4,0

Предполагалось, что в элементе конструкции имеется одиночный дефект типа расслоения с начальной формой в виде эллипсоида, длина наибольшей полуоси которого составляла 0,015 м, а наименьшей — $0{,}5\cdot10^{-3}$ м. Конечно-элементная сетка в окрестности дефекта показана на рис. 3, в ней 4,437 млн конечных элементов и 847 тыс. узлов.

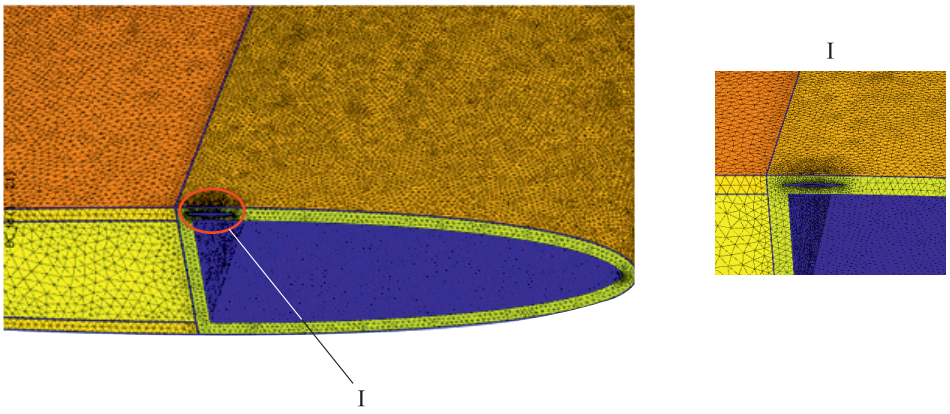


Рис. 3. Конечно-элементная сетка, использованная при расчетах макроскопического НДС в элементе конструкции лопасти вертолета

В расчете время изменялось экспоненциально $t_k = 3(10^{0,08m} - 1)$, с, где $m = 0, 1, \ldots$ — номер итерации усталостного разрушения.

На рис. 4 –7 представлены некоторые результаты расчета напряженно-деформированного состояния конструкции несущей лопасти вертолета в задаче изгиба с дефектом типа расслоения. На рис. 4 показано распределение поперечных перемещений u_2 в композитном элементе конструкции. На рис. 5 и 6 приведено распределение изгибных макронапряжений σ_{11}, максимальные значения которых возникают в окрестности жестко заделанного края. Их локальный максимум имеет место в окрестности дефекта. На рис. 7 представлено распределение параметра повреждаемости $z^{(2)}(0)$, определяющего уровень повреждаемости между слоями волокон в матрице, в элементе композитной конструкции лопасти вертолета в момент времени $t = 0$. Максимальные значения параметра повреждаемости достигаются на внешних обшивках в окрестности лонжерона в той части, где расположен дефект типа расслоения.

На рис. 8 показана кривая значений параметра повреждаемости $z^{(2)}(x_m, t)$ в точке $x_m = x_m^*$ максимального значения статического параметра повреждаемости $z^{(2)}(x_m, 0) = z^{(2)}(0)$ для элемента композитной конструкции лопасти винта. С течением времени происходит накопление повреждений под действием циклического давления. При достижении значения $z^{(2)}(x_m, t) = 1$ дефект типа расслоения начинает увеличиваться в размере. При рассмотренных условиях нагружения рост дефекта начался с момента времени $2,5 \cdot 10^8$ с.

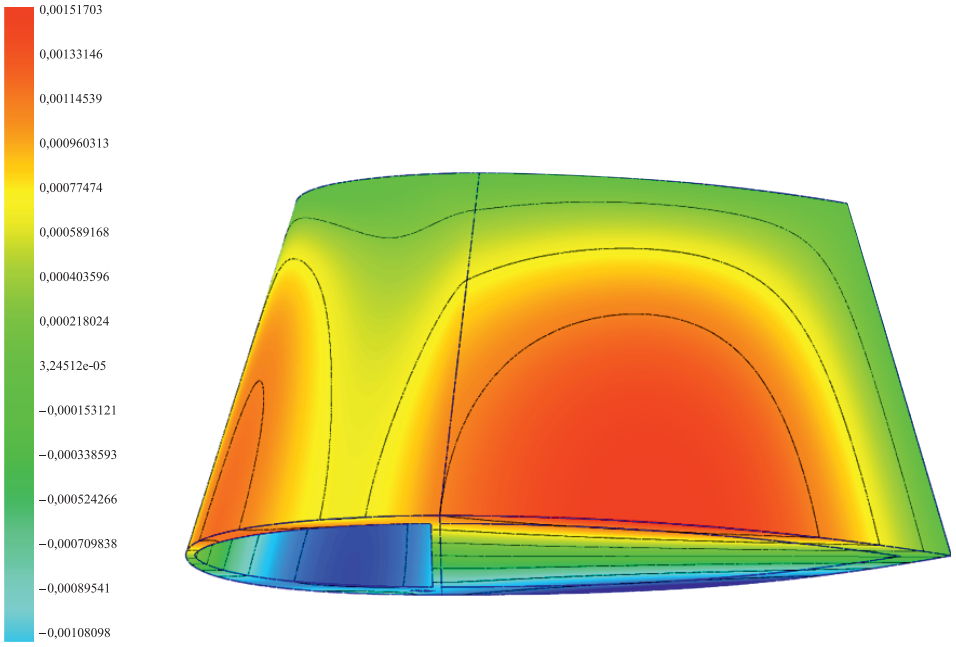


Рис. 4. Распределение поперечных перемещений u_2 (м)

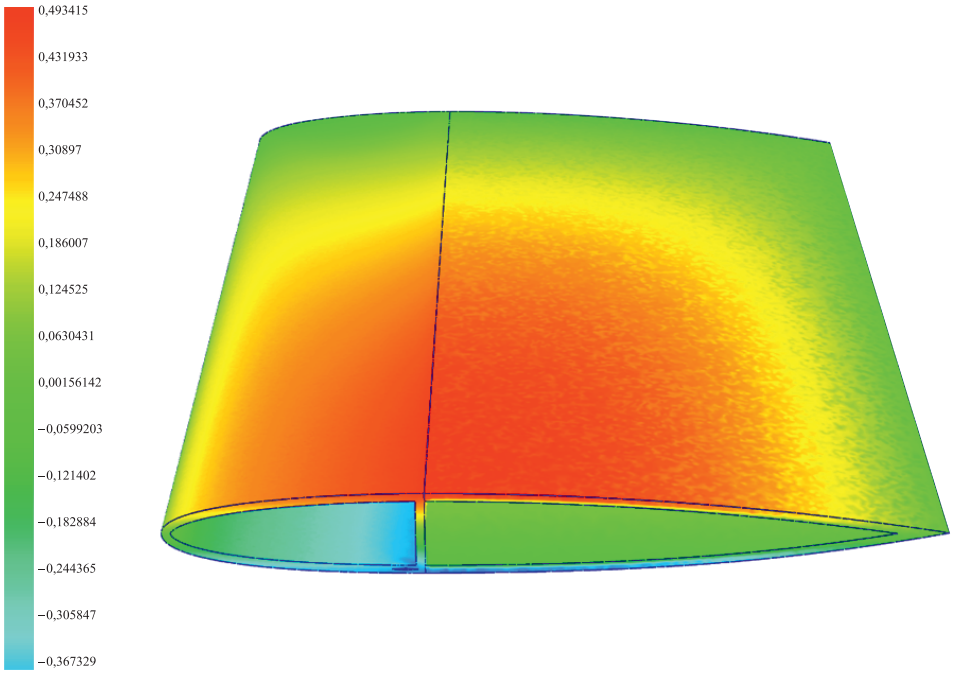


Рис. 5. Распределение изгибных напряжений σ_{11} (ГПа) в элементе композитной конструкции лопасти вертолета

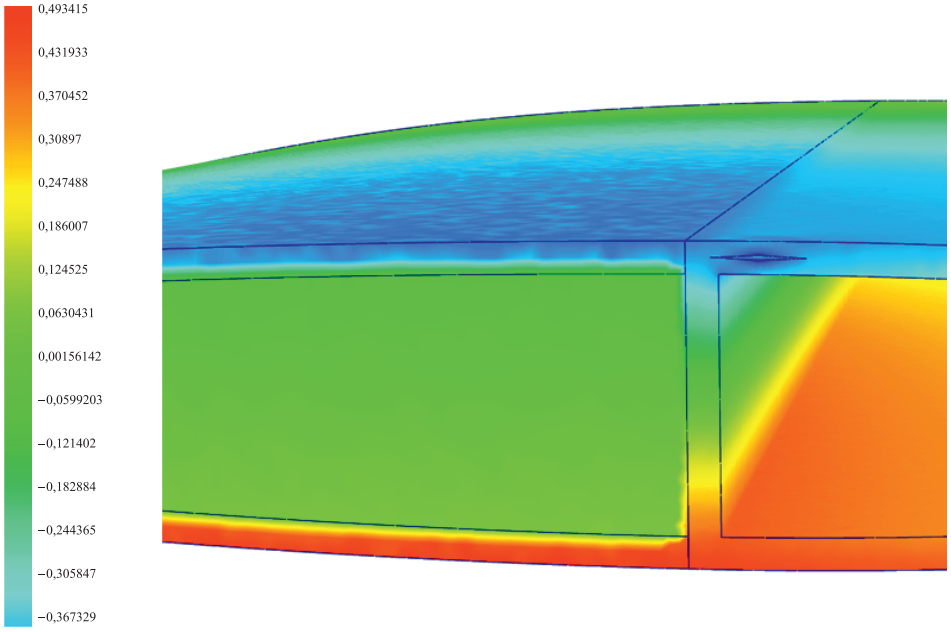


Рис. 6. Распределение изгибных напряжений σ_{11} (ГПа) в хвостовой секции лопасти в окрестности дефекта в момент времени $t = 0$

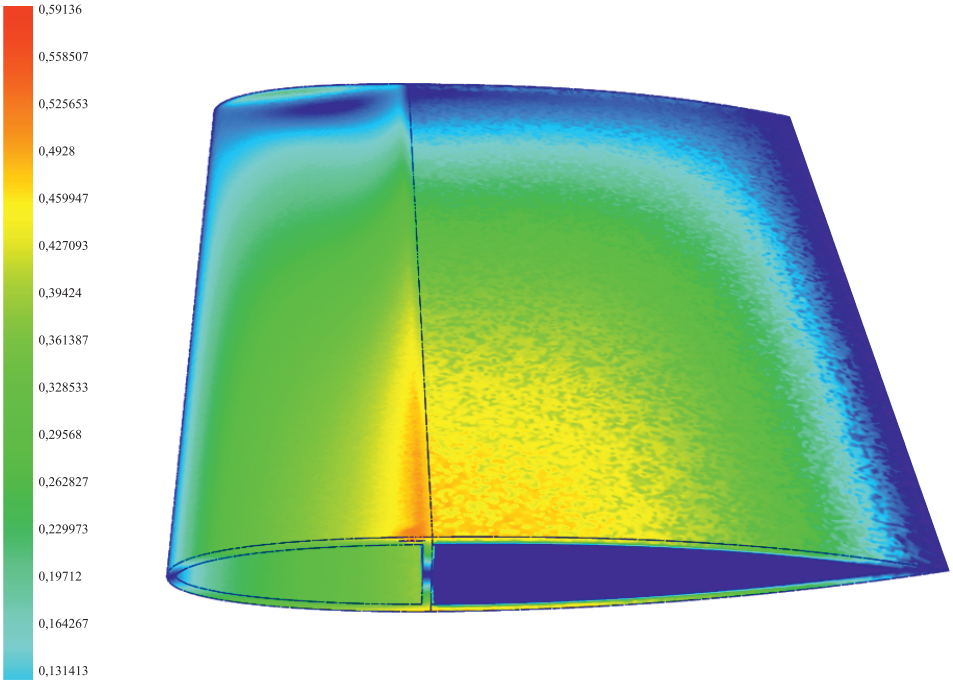


Рис. 7. Распределение параметра повреждаемости $z^{(2)}(0)$ в элементе композитной конструкции лопасти вертолета в момент времени $t = 0$

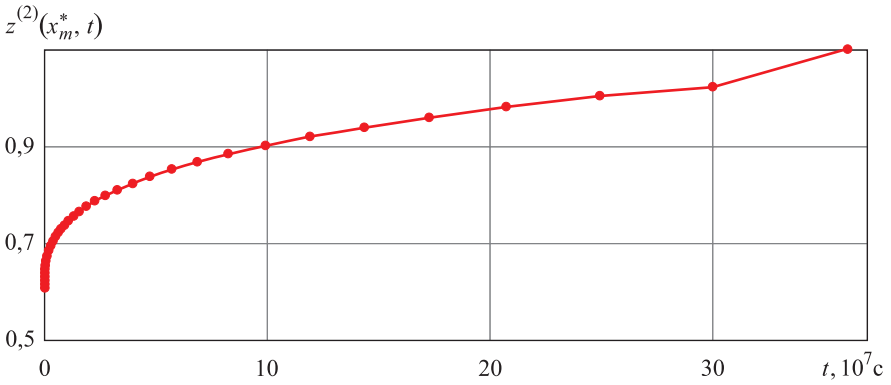


Рис. 8. Кривая накопления повреждений $z^{(2)}(x_m^*, t)$ в элементе конструкции композитной лопасти вертолета под действием циклического давления

Заключение. Разработана методика для моделирования повреждаемости в элементах конструкций из композиционных материалов с дефектами и прогнозирования. Методика включает в себя 3D-расчет макроскопического напряженно-деформированного состояния с дефектами типа расслоения, расчет микроскопического НДС и модель для расчета накопления повреждаемости в окрестности расслоения при воздействии циклических нагрузок.

Рассмотренный пример расчета фрагмента композитной конструкции несущей лопасти вертолета с учетом дефекта типа расслоения показал возможность применения разработанной методики для моделирования повреждаемости в сложных композитных конструкциях.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 15-08-04893.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Постнов В.И., Плетинь И.И., Вешкин Е.А., Старостина И.В., Стрельников С.В. Технологические особенности производства тонколистовых обшивок лопастей вертолета из конструкционного стеклопластика ВПС-53К. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2016, т. 18, № 4 (3), с. 619–627.

[2] Jensen F.M., Falzon B.G., Ankersen J., Stang H. Structural testing and numerical simulation of a 34 m composite wind turbine blade. *Composite Structures*, 2006, vol. 76, pp. 52–61.

[3] Kong C., Bang J., Sugiyama Y. Structural investigation of composite wind turbine blade considering various load cases and fatigue life. *Energy*, 2005, vol. 30, iss. 11–12, pp. 2101–2114.

[4] Ngoc Anh Vu, Jae Woo Lee, Nam Tuan Phuong Le, Song Thanh Thao Nguyen. A fully automated framework for helicopter rotor blades design and analysis including aerodynamics, structure, and manufacturing. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016, vol. 29, iss. 6, pp. 1602–1617. DOI 10.1016/j.cja.2016.10.001

[5] Friedmann P.P., Glaz B., Palacios R. A moderate deflection composite helicopter rotor blade model with an improved cross-sectional analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, vol. 46, no. 10, pp. 2186–2200. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2008.09.017

[6] Degrieck J., Van Paepegem W. Fatigue damage modelling of fibre-reinforced composite materials. Review. *Applied Mechanics Review*, 2001, vol. 54, no. 4, pp. 279–300.

[7] Heslehurst R.B. *Defects and damage in composite materials and structures*. CRC Press, 2014, 154 p.

[8] Joffre T., Miettinen A., Wernersson E., Isaksson P., Gamstedt E. Effects of defects on the tensile strength of short-fibre composite materials. *Mechanics of Materials*, 2014, vol. 75, pp. 125–134. DOI 10.1016/j.mechmat.2014.04.003

[9] Lemanski S.L., Wang J., Sutcliffe M.P.F., Potter K.D., Wisnom M.R. Modelling failure of composite specimens with defects under compression loading. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2013, vol. 48, pp. 26–36. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.12.007 (дата обращения 22.11.2017).

[10] Jiwei Dong, Ningfei Huo. A two-scale method for predicting the mechanical properties of 3D braided composites with internal defects. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 1–10.

[11] Ai S.G., Fang D.N., He R.J., Pei Y.M. Effect of manufacturing defects on mechanical properties and failure features of 3D orthogonal woven C/C composites. *Composites Part B: Engineering*, 2015, vol. 71, pp. 113–121.

[12] Ribeiro F.M.F., Campilho R.D.S.G., Carbas R.J.C., da Silva L.F.M. Strength and damage growth in composite bonded joints with defects. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 100, pp. 91–100.

[13] Gowayed Y., Ojard G., Prevost E., Santhosh U., Jefferson G., Gowayed Y., Ojard G., Prevost E., Santhosh U., Jefferson G. Defects in ceramic matrix composites and their impact on elastic properties. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 167–175.

[14] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Федонюк Н.Н. Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных конструкций с дефектами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 11, с. 3–23.

[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2 (10), с. 3–23.

[16] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Европин С.В. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. В 2 ч. Ч. 1. Численное моделирование накопления повреждений. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2013, № 11, с. 3–11.

[17] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.P. Long-term strength of reinforced composites. *Mechanics of Composite Materials*, 1989, vol. 25, iss. 1, pp. 13–18. URL: https://doi.org/10.1007/BF00608446 (дата обращения 22.11.2017).

[18] Браутман Л., Крок Р., Сендецки Дж., ред. *Композиционные материалы. В 8 т. Т. 2. Механика композиционных материалов.* Москва, Мир, 1978, 564 с.

[19] Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М., ред. *Композиционные материалы*. Москва, Машиностроение, 1990, 512 с.

[20] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4.* Основы механики твердых сред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[21] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[22] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[23] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во Московского университета, 1984, 336 с.

[24] Dimitrienko Yu.I. A structural thermo-mechanical model of textile composite materials at high temperatures. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.

[25] Dimitrienko Y. Modeling of the mechanical properties of composite materials at high temperatures. In 2 parts. Part 1. Matrix and fibres. *Applied Composite Materials*, 1997, vol. 4, no. 4, pp. 219–237.

[26] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Effect of thermomechanical erosion on heterogeneous combustion of composite materials in high-speed flows. *Combustion and Flame*, 2000, vol. 122, no. 3, pp. 211–226.

[27] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Федонюк Н.Н. Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волокнистых полимерных композиционных материалов. *Наука и образование*, 2014, № 11, с. 748–770. DOI 10.7463/1114.0734246

[28] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 26–46.

[29] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. URL: http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf (дата обращения 22.11.2017).

[30] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым заполнителем. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 5 (56), с. 66–81.

Статья поступила в редакцию 04.05.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование повреждаемости и долговечности композитных элементов конструкций с дефектами типа расслоения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 3, с. 49–70.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 370 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 14 работ в области механики композитов. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Finite element modeling of damageability and durability of composite structures with local delaminations

© Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The study centers around a technique developed for modeling damageability of laminated composite structures with defects of the delamination type under cyclic loading. The procedure consists of 3 stages iteratively repeated in time: finite element simulation of a macroscopic stress-strain state of the structure with defects; simulation of the microscopic stress-strain state near the defects; modeling the damage accumulation in the matrix, which connects the layers of reinforcing fibers near the defect. The model takes into account the curvilinear anisotropy of the composite material in the structure of complex geometric shapes. The study gives an example of a numerical calculation of a fragment of a composite structure of a helicopter carrier blade, taking into consideration the defect of the delamination type. The results suggest that there is a possibility of using the developed technique for damageability modeling in complex composite structures. The finite-element solution of the macroscopic problem is found by means of the SMCM software platform developed at the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Software Development (SEC "SIMPLEX") of Bauman Moscow State Technical University.

Keywords: *composites, defects, delaminations, finite element method, chemical strength criterion, damageability, cyclic loading, fatigue, helicopter carrier blade*

REFERENCES

[1] Postnov V.I., Pletin I.I., Veshkin E.A., Starostina I.V., Strelnikov S.V. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk — Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2016, vol. 18, no. 4 (3), pp. 619–627.

[2] Jensen F.M., Falzon B.G., Ankersen J., Stang H. *Composite Structures*, 2006, vol. 76, pp. 52–61.

[3] Kong C., Bang J., Sugiyama Y. *Energy*, 2005, vol. 30, no. 11–12, pp. 2101–2114.

[4] Ngoc Anh Vu, Jae Woo Lee, Nam Tuan Phuong Le, Song Thanh Thao Nguyen. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016, vol. 29, no. 6, pp. 1602–1617. DOI: 10.1016/j.cja.2016.10.001

[5] Friedmann P.P., Glaz B., Palacios R. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, vol. 46, no. 10, pp. 2186–2200. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2008.09.017

[6] Degrieck J., Van Paepegem W. *Applied Mechanics Review*, 2001, vol. 54, no. 4, pp. 279–300.

[7] Heslehurst R.B. *Defects and damage in composite materials and structures*. CRC Press, 2014, 154 p.

[8] Joffre T., Miettinen A., Wernersson E., Isaksson P., Gamstedt E. *Mechanics of Materials*, 2014, vol. 75, pp. 125–134. DOI 10.1016/j.mechmat.2014.04.003

[9] Lemanski S.L., Wang J., Sutcliffe M.P.F., Potter K.D., Wisnom M.R. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2013, vol. 48, pp. 26–36. Available at: http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.12.007 (accessed November 22, 2017).

[10] Jiwei Dong, Ningfei Huo. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 1–10.
[11] Ai S.G., Fang D.N., He R.J., Pei Y.M. *Composites Part B: Engineering*, 2015, vol. 71, pp. 113–121.
[12] Ribeiro F.M.F., Campilho R.D.S.G., Carbas R.J.C., da Silva L.F.M. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 100, pp. 91–100.
[13] Gowayed Y., Ojard G., Prevost E., Santhosh U., Jefferson G., Gowayed Y., Ojard G., Prevost E., Santhosh U., Jefferson G. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 167–175.
[14] Dimitrienko Yu.I., Yurin Iu.V., Fedonyuk N.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 11, pp. 3–23.
[15] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2 (10), pp. 3–23.
[16] Dimitrienko Yu.I., Yurin Iu.V., Evropin S.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2013, no. 11, pp. 3–11.
[17] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.P. *Mechanics of Composite Materials*, 1989, vol. 25, no. 1, pp. 13–18. Available at: https://doi.org/10.1007/BF00608446 (accessed November 22, 2017).
[18] Brautman L. Kroc R., Sendetsky J., eds. *Composite Materials. In 8 vols. Vol. 2. Mechanics of Composite Materials.* New York, 1975. [In Russ.: Brautman L. Kroc R., Sendetsky J., ed. Kompozitsionnye materialy. V 8 tomakh. Tom 2. Mechanica kompozictionnyh materialov. Moscow, Mir Publ., 1978, 564 p.].
[19] Vasilev V.V., Tarnopolskiy Yu.M., ed. *Kompozitsionnye materialy* [Composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990, 512 p.
[20] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[21] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 1. Tenzorny analiz* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 367 p.
[22] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems in mechanics of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.
[23] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MSU Publ., 1984, 336 p.
[24] Dimitrienko Yu.I. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.
[25] Dimitrienko Y. *Applied Composite Materials*, 1997, vol. 4, no. 4, pp. 219–237.
[26] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. *Combustion and Flame*, 2000, vol. 122, no. 3, pp. 211–226.
[27] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Fedonyuk N.N. *Nauka i obrazovanie — Science and Education*, 2014, no. 11, pp. 748–770. DOI 10.7463/1114.0734246
[28] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 26–46.

[29] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220.
URL: http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf (accessed 22.11.2017).

[30] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Prozorovskii A.A., Erasov V.S., Iakovlev N.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2014, no. 5 (56), pp. 66–81.

Dimitrienko Yu.I., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Software Development (SEC "SIMPLEX"), Bauman Moscow State Technical University, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, BMSTU. Author of over 370 research papers in the field of continuum mechanics, computational mechanics, composite mechanics and thermomechanics, mathematical modeling in material science, computational gas dynamics. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Yurin Yu.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Research Fellow of the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Software Development (SEC "SIMPLEX"), Bauman Moscow State Technical University. Author of 14 research papers in the field of composite mechanics. e-mail: yvyurin@yandex.ru