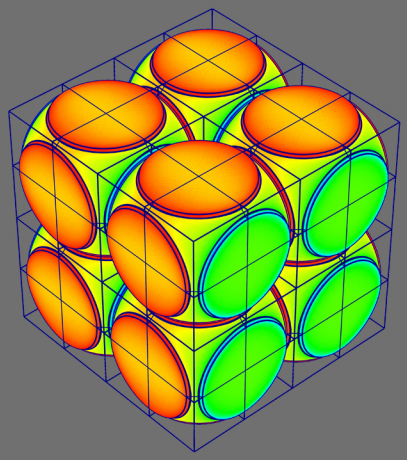
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении. Мате- матическое моделирование и численные методы, 2017, No 3, с. 20–37.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/139/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.187
14.11.2026 15:02:56

УДК 539.374 DOI 10.18698/2309-3684-2017-3-2035

Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении

© Ю.М. Темис[1, 2], А.Д. Худякова[1, 2]

[1] ЦИАМ им. П.И. Баранова, Москва, 111116, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена модель упругопластического деформирования конструкционных сплавов в условиях сложного неизотермического нагружения, основанная на теории пластического течения. Получены соотношения, позволяющие определить параметры модели по результатам испытаний образцов по программе жесткого симметричного циклического деформирования. Разработан алгоритм получения параметров пластичности по ограниченному набору экспериментальных данных. На основе разработанного алгоритма получены параметры пластичности для никелевого сплава IN738LC в широком диапазоне температур.

Ключевые слова: *пластичность, сложное деформирование, неизотермические условия, определение параметров*

Введение. Проблема оценки напряженно-деформированного состояния и ресурса деталей высоконагруженных конструкций является комплексной и тесно связана с проблемой разработки адекватных моделей неупругости, пригодных для практического применения и способных описывать сложные неизотермические процессы нагружения. Созданию таких моделей неупругости посвящено значительное число работ [1–9], в основном в них рассмотрены соотношения при изотермическом деформировании. Исследованию неизотермического деформирования и определению параметров рассматриваемых моделей посвящено ограниченное количество работ [1–3, 6, 9], что существенно усложняет применение таких моделей при инженерных расчетах. В настоящей работе предложен вариант модели инвариантной теории пластического течения [1, 2], предназначенный для описания упругопластического поведения металлических конструкционных сплавов при неизотермическом нагружении, и подробно рассмотрен алгоритм определения параметров этой модели.

Основные соотношения инвариантной теории пластичности для случая неизотермического нагружения. Согласно теории течения [1, 2], примем, что при деформировании материала приращения упругих деформаций $d\varepsilon_{ij}^{e}$ и пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^{p}$ независимы. Полное приращение деформаций $d\varepsilon_{ij}$ представим в виде

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}. \qquad (1)$$

Приращения упругих деформаций определим согласно обобщенному закону Гука.

Рассмотрим неизотермическое деформирование однородных и начально изотропных материалов, изменение объема которых происходит упруго. В этом случае тензоры пластических деформаций и их приращений образуют девиаторы.

В соответствии с инвариантной теорией пластичности [1, 2] в пространстве, образованном компонентами тензоров напряжений σ_{ij}, пластических деформаций ε_{ij}^{p} и температурой T рассмотрим поверхность деформирования, на которой находится точка, отображающая текущее состояние процесса неупругого деформирования. Для ряда материалов, свойства которых изотропно изменяются под действием температуры, эта поверхность имеет вид:

$$f(J_1,\, J_2,\, E_2,\, D,\, N,\, R,\, M,\, \chi,\, T) = 0; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &J_1 = \sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad J_2 = s_{ij}s_{ij}, \quad E_2 = \varepsilon_{ij}^{p}\varepsilon_{ij}^{p}, \qquad D = s_{ij}\varepsilon_{ij}^{p}, \\ &N = \xi_{ij}\xi_{ij}, \quad R = \varepsilon_{ij}^{p}\xi_{ij}, \quad M = s_{ij}\xi_{ij}, \quad d\chi = \left(d\varepsilon_{ij}^{p}\, d\varepsilon_{ij}^{p}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \dfrac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}$ — компоненты девиатора тензора напряжений; ξ_{ij} — компоненты структурного тензора, отвечающего за анизотропию, приобретенную в процессе упругопластического деформирования; $d\xi_{ij} = K(\chi, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p})\dfrac{d\varepsilon_{ij}{}^{p}}{d\varepsilon_{ip}}d\chi$; $K(\chi, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p})$ — функция материала; ε_{ip} — интенсивность пластических деформаций; χ — параметр Одквиста.

Области упругого и упругопластического деформирования разделены поверхностью нагружения f_1, являющейся подповерхностью (2), при фиксированных значениях компонент пластической деформации ε_{ij}^{p}, параметра накопленной пластической деформации χ и структурного тензора ξ_{ij}:

$$f_1 = f(J_1,\, J_2,\, D,\, M,\, T;\, \underbrace{E_2,\, N,\, R,\, \chi}_{\text{const}}) = 0. \tag{4}$$

Условия активного нагружения имеют вид: $f_1 = 0 \wedge df_1 > 0$. Используя ассоциированный с поверхностью (4) закон пластического течения, согласно [1, 2], при активном нагружении получим:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = C_{ijkl}^{p} d\sigma_{kl} + \Psi_{ij}^{p} dT, \tag{5}$$

где $C_{ijkl}^{p} = -\frac{1}{\varphi}\sigma_{ij}^{0}\sigma_{kl}^{0}$; $\sigma_{ij}^{0} = \frac{\partial f_1}{\partial s_{ij}}$; $\Psi_{ij}^{p} = -\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial f_1}{\partial T}\right)\sigma_{ij}^{0}$; φ — функция упрочнения.

В работах [1, 2] показано, что, рассматривая различные варианты поверхности (2) на основе соотношений (1)–(5), можно построить различные модели упругопластического поведения материала без изменения структуры соотношений.

Определяющие соотношения модели. Для случая неизотермического нагружения рассмотрим следующий вид поверхности:

$$f = J_2 + 2a(\chi,T)M + a^2(\chi,T)N - \left(\sigma_T(\chi,T)\right)^2 = 0. \tag{6}$$

Здесь $a(\chi,T)$, $\sigma_T(\chi,T)$ — параметры материала, зависящие от накопленной пластической деформации χ и текущего значения температуры процесса T. С учетом результатов работы [2] уравнение поверхности нагружения (6) представим как

$$\sigma_{ij}^{0}\sigma_{ij}^{0} - 4\left(\sigma_T(\chi,T)\right)^2 = 0, \tag{7}$$

где $\sigma_{ij}^{0} = 2\left(s_{ij} - a(\chi,T)\xi_{ij}\right)$.

Для удобства дальнейших рассуждений запишем уравнение (7) в виде

$$\left(s_{ij} - a(\chi,T)\xi_{ij}\right)\left(s_{ij} - a(\chi,T)\xi_{ij}\right) = \left(\sigma_T(\chi,T)\right)^2. \tag{8}$$

Тогда условия активного нагружения (4) принимают вид

$$\sigma_{ij}^{0}\sigma_{ij}^{0} = 4\left(\sigma_T(\chi,T)\right)^2 \wedge \sigma_{ij}^{0}\left(ds_{ij} - \frac{\partial a(\chi,T)}{\partial T}\xi_{ij}dT\right) > 2\sigma_T(\chi,T)\frac{\partial\sigma_T(\chi,T)}{\partial T}dT, \tag{9}$$

а функция упрочнения

$$\varphi = -a(\chi,T)K\sigma_{ij}^{0}\sigma_{ij}^{0} - \left(\frac{\partial a(\chi,T)}{\partial\chi}\frac{N}{2K} + 2\sigma_T(\chi,T)\frac{\partial\sigma_T(\chi,T)}{\partial\chi}\right)\sqrt{\sigma_{ij}^{0}\sigma_{ij}^{0}}. \tag{10}$$

Примем, что для ряда материалов приращения компонент структурного тензора ξ_{ij} можно определить как

$$d\xi_{ij} = K(J_2)d\varepsilon_{ij}^{p}. \tag{11}$$

Здесь $K(J_2)$ — независящая от температуры процесса характеристика материала, определяемая в каждый момент времени только уровнем напряжений.

Определение параметров модели. Важнейшим этапом разработки любой модели поведения материала, предназначенной для дальнейшего практического использования, является этап создания алгоритмов идентификации параметров материала, входящих в соотношения модели.

Предложенная модель пластичности содержит три функции материала, характеризующие его пластические свойства и подлежащие экспериментальному определению: $K(J_2)$, $a(\chi,T)$ и $\sigma_T(\chi,T)$. Для определения этих функций используем петли жесткого симметричного изотермического циклического деформирования для разных фиксированных значений температур. При одноосном нагружении и постоянной температуре уравнение поверхности (8) и ее производная по χ принимают вид:

$$f_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\sigma_{11} - a\xi_{11}\right)^2 - (\sigma_T)^2 = 0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} = 3\left(\frac{2}{3}\sigma_{11} - a\xi_{11}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{d\sigma_{11}}{d\chi} - \frac{da}{d\chi}\xi_{11} - a\frac{d\xi_{11}}{d\chi}\right) - 2\sigma_T\frac{d\sigma_T}{d\chi}. \tag{13}$$

Функция $K(J_2)$ не зависит от накопленной пластической деформации, поэтому для ее определения целесообразно рассмотреть стабильный предельный цикл, в котором пластические свойства материала не изменяются в зависимости от χ. Введем обозначения для параметров материала $a(\chi,T)$ и $\sigma_T(\chi,T)$ в предельном цикле $a^{st} = a^{st}(T)$ и $\sigma_T^{st} = \sigma_T^{st}(T)$ соответственно:

$$\frac{da^{st}}{d\chi} = \frac{d\sigma_T^{st}}{d\chi} \equiv 0.$$

Для предельного цикла из уравнения (13) получаем:

$$\left(\frac{2}{3}\sigma_{11} - a^{st}\xi_{11}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{d\sigma_{11}}{d\chi} - a^{st}\frac{d\xi_{11}}{d\chi}\right) = 0. \tag{14}$$

Если первый множитель левой части уравнения (14) обращается в ноль, то и второй инвариант тензора σ_{ij}^0 (9) также обращается в ноль. Это, согласно (10), приводит к обращению в ноль функции упрочнения, что недопустимо в рамках предложенных соотношений

при вычислении приращений пластических деформаций (5). Таким образом, из уравнения (14) получаем:

$$\frac{2}{3}\frac{d\sigma_{11}}{d\chi} - a^{st}\frac{d\xi_{11}}{d\chi} = 0.$$

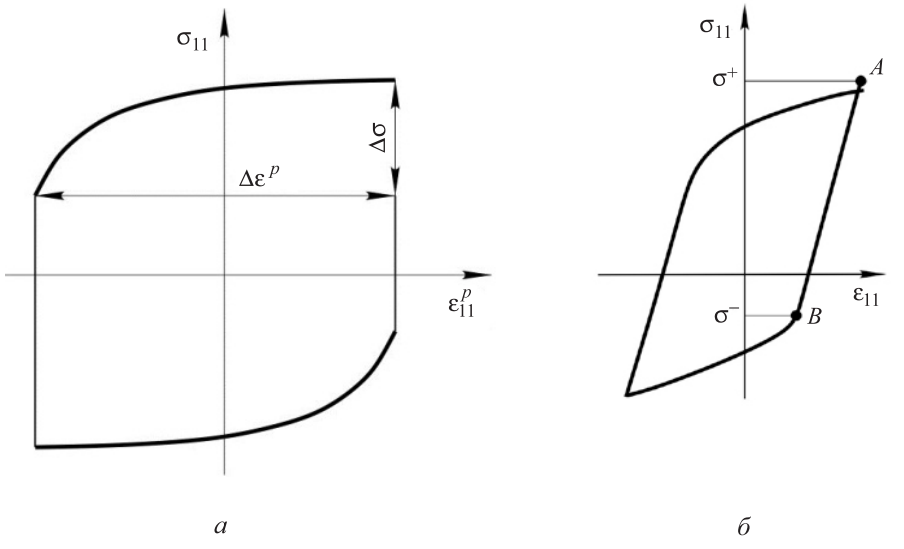
После несложных преобразований и учета (11) приходим к выражению

$$K(J_2) = \frac{2}{3a^{st}(T)}\frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}^{p}}. \qquad (15)$$

Предположим, что функция $K(J_2)$ является единой функцией для рассматриваемого материала и не зависит от температуры, и приведем выражение (15) к безразмерному виду следующим образом. Положим

$$a^{st}(T) = \frac{2}{3}E_X^{st}(T). \qquad (16)$$

Здесь $E_X^{st} = \Delta\sigma / \Delta\varepsilon^{p}$ — хордальный модуль кривой предельного стабильного симметричного цикла, построенного в координатах $\varepsilon_{11}^{p} - \sigma_{11}$, где $\Delta\sigma$ и $\Delta\varepsilon^{p}$ — размахи напряжений и деформаций в полуцикле при активном нагружении соответственно (рис. 1, *а*).



а *б*

Рис. 1. Определение параметров модели по данным жесткого симметричного изотермического циклического деформирования

Необходимо отметить, что такой выбор $a^{st}(T)$ накладывает ограничения на использование модели. Определение параметров может проводиться по набору экспериментальных кривых с различными размахами деформаций и напряжений соответственно, поэтому в общем случае хордальный модуль E_X^{st} определяет не только значение температуры, но и размах деформаций в цикле. Соотношения (15), (16) требуют, чтобы хордальные модули кривых предельных стабильных симметричных циклов совпадали для различных размахов деформаций и одного значения температуры.

Учитывая (16), из соотношения (15) получим зависимость касательного модуля обезразмеренной кривой деформирования от уровня напряжений

$$K(\tilde{J}_2)=\frac{1}{E_X^{st}(T)}\frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}^p}=\frac{\Delta\varepsilon_{11}^p d\sigma_{11}}{\Delta\sigma_{11}d\varepsilon_{11}^p}=\frac{d\tilde{\sigma}_{11}}{d\tilde{\varepsilon}_{11}^p}, \tag{17}$$

где $\tilde{\sigma}_{11}$, $\tilde{\varepsilon}_{11}^p$, $\tilde{J}_2$ — обезразмеренные величины; $\tilde{J}_2=\dfrac{3}{2\left(\Delta\sigma(T)\right)^2}J_2$.

Определим параметры $a(\chi,T)$ и $\sigma_T(\chi,T)$. Зафиксируем температуру и рассмотрим произвольный симметричный жесткий цикл в координатах осевых деформаций ε_{11} и напряжений σ_{11} (рис. 1, *б*). Из уравнения (12) аналогично [1, 2] для точек *A* и *B* получим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}\sigma^+ - a\xi=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sigma_T;\\[2ex] \dfrac{2}{3}\sigma^- - a\xi=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sigma_T.\end{cases} \tag{18}$$

Здесь σ^+, σ^- — значения осевых напряжений *A* и *B* соответственно; $\xi=\xi_{11}$ в точках *A* и *B* (компоненты структурных тензоров в этих точках совпадают, так как приращения пластических деформаций на отрезке *AB* не происходит).

Решая систему (18) относительно σ_T и a, получаем:

$$\sigma_T=\frac{\sigma^+-\sigma^-}{\sqrt{6}},\quad a=\frac{\sigma^++\sigma^-}{3\xi}. \tag{19}$$

Для первоначально изотропного материала до начала активного нагружения пределы текучести на растяжение и сжатие равны, значит $\sigma^+ + \sigma^- = 0$. При этом $\xi = 0$, поэтому соотношение для a не определено. Значение $a(0,T)$ можно найти следующим образом:

$$a(0,T)=\left(\frac{\partial\sigma^{+}}{\partial\chi}+\frac{\partial\sigma^{-}}{\partial\chi}\right)/\sqrt{6}K\left(\tilde{J}_2^{+}\right), \tag{20}$$

где $\sigma^{+}=\sigma^{+}(\chi)$, $\sigma^{-}=\sigma^{-}(\chi)$ — функциональные зависимости, определенные по данным циклического нагружения; $\tilde{J}_2^{+}=(\sigma^{+})^2/\Delta\sigma_{11}^2$.

Соотношения (17), (19) и (20) позволяют определить параметры пластичности материала по данным простого циклического жесткого симметричного деформирования при фиксированных значениях температуры.

Параметры $a(\chi,T)$ и $\sigma_T(\chi,T)$ для промежуточных значений температуры вычислим с учетом того, что $a(\chi,T)$ определяет положение центра поверхности (8), а $\sigma_T(\chi,T)$ — ее размеры.

Тогда при фиксированных значениях пластических деформаций, параметра Одквиста и компонент структурного тензора ξ_{ij} в пространстве напряжений существует семейство поверхностей нагружения, радиус и положение центра которых определяются текущим значением температуры. Зависимость $\sigma_T(\chi,T)$ для промежуточных значений температур $T_1<T<T_2$ определяем, используя зависимость предела текучести от температуры $\sigma_{yield}(T)=\sqrt{3/2}\sigma_T(0,T)$ и полученные, согласно (19), для фиксированных значений температур зависимости $\sigma_T(\chi,T_1)$, $\sigma_T(\chi,T_2)$:

$$\begin{aligned}\sigma_T(\chi,T)&=\frac{\sigma_{yield}(T_2)-\sigma_{yield}(T)}{\sigma_{yield}(T_2)-\sigma_{yield}(T_1)}\sigma_T(\chi,T_1)+\\&+\frac{\sigma_{yield}(T)-\sigma_{yield}(T_1)}{\sigma_{yield}(T_2)-\sigma_{yield}(T_1)}\sigma_T(\chi,T_2),\qquad T_1<T<T_2.\end{aligned} \tag{21}$$

Для определения $a(\chi,T)$, используя зависимости $a(\chi,T_1)$, $a(\chi,T_2)$ и зависимость хордального модуля в предельном цикле от температуры $E_X^{st}(T)$, получим:

$$\begin{gathered}a(\chi,T)=\frac{E_X^{st}(T_2)-E_X^{st}(T)}{E_X^{st}(T_2)-E_X^{st}(T_1)}a(\chi,T_1)+\frac{E_X^{st}(T)-E_X^{st}(T_1)}{E_X^{st}(T_2)-E_X^{st}(T_1)}a(\chi,T_2),\\T_1<T<T_2.\end{gathered} \tag{22}$$

Параметры пластичности никелевого сплава IN738LC. В качестве примера рассмотрим алгоритм определения параметров модели никелевого сплава IN738LC. Кривые циклического деформирова-

ния взяты из работы [10]. Размахи деформаций и номера имеющихся циклов приведены в таблице. На рис. 2 в координатах $\varepsilon_{11}^{p} - \sigma_{11}$ представлены предельные циклы.

Экспериментальные данные жесткого симметричного циклического деформирования образцов из никелевого сплава IN738LC

T, °C	Размах полных деформаций $\Delta\varepsilon$, %	Номер цикла	Номер цикла, принимаемого в качестве предельного
24	1,20	1; 85	85
	1,40	1; 13	13
	1,60	1; 24	24
750	1,32	30	30
	1,52	1; 5; 10; 20	20
	1,72	1; 9	9
850	1,20	1; 26	26
	1,64	1; 12	12

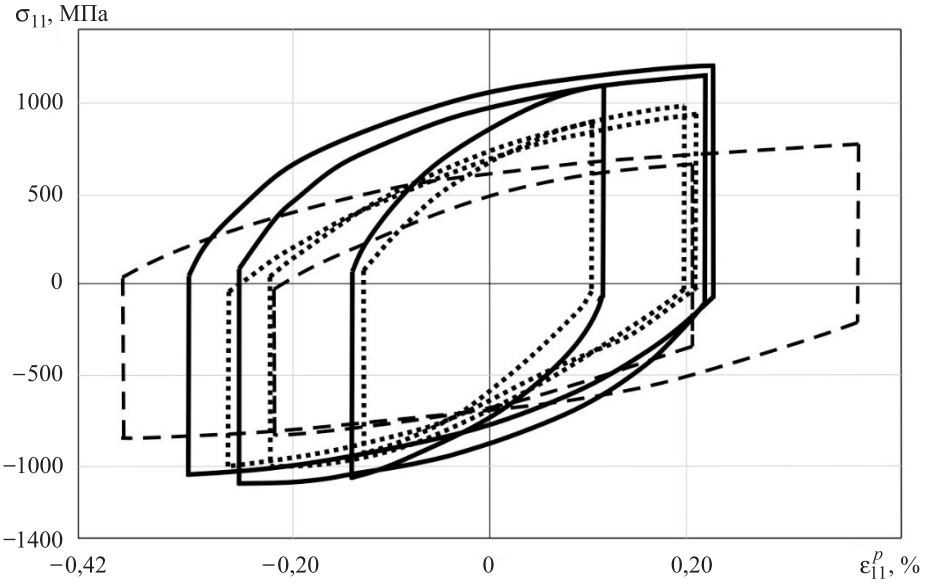


Рис. 2. Экспериментальные кривые деформирования циклов [10], принятых в качестве предельных для сплава IN738LC при:
— 24° C; ····· — 750° C; – – — 850° C

Эти циклы получены в результате экспериментов на жесткое симметричное циклическое изотермическое деформирование с размахами полных деформаций в диапазоне 1,2…1,72 %. Для IN738LC величина хордального модуля кривой деформирования (см. рис. 2) характеризуется в большей степени температурой процесса, нежели размахом де-

формаций. Так, для нечетных полуциклов (полуциклов растяжения), хордальные модули кривых при 24° С лежат в диапазоне 215…380 ГПа ($\Delta\varepsilon = 1,2$ %, $\Delta\varepsilon^p = 0,25$ % и $\Delta\varepsilon = 1,6$ %, $\Delta\varepsilon^p = 0,53$ % соответственно), для 750° С — в диапазоне 170…320 ГПа ($\Delta\varepsilon = 1,32$, $\Delta\varepsilon^p = 0,23$ и $\Delta\varepsilon = 1,72$, $\Delta\varepsilon^p = 0,48$ соответственно). При 850° С эти модули кривых находятся в диапазоне 105…150 ГПа ($\Delta\varepsilon = 1,2$, $\Delta\varepsilon^p = 0,43$ % и $\Delta\varepsilon = 1,64$ %, $\Delta\varepsilon^p = 0,75$ % соответственно). Исходя из этого, представляется возможным применять разработанную модель для описания поведения сплава IN738LC.

Для каждого из трех значений температуры строим по кривым полуциклов растяжения (см. рис. 2) усредненную кривую. Для этого определяем средние значения минимального $\sigma_{\min}$ и максимального $\sigma_{\max}$ напряжений кривых полуциклов растяжения для каждого значения температуры:

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{\min}^{(i)}, \quad \sigma_{\max} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{\max}^{(i)}, \tag{23}$$

где N — количество экспериментальных кривых; $\sigma_{\min}^{(i)}$ и $\sigma_{\max}^{(i)}$ — минимальные и максимальные значения σ_{11} i-й кривой соответственно для данного уровня температуры. При необходимости используем линейную экстраполяцию для продления кривых до достижения $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$. Вводим равномерную сетку по оси напряжений $\{\sigma_k\}_{k=1}^{M-1}$ (M — количество узлов сетки) на отрезке $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$. Для каждого уровня напряжений $\sigma_{\min} \le \sigma_k \le \sigma_{\max}$ определяем координаты точки усредненной кривой: $\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_k^{p(i)}, \sigma_k\right\}$. Соединяя полученные точки, путем линейной интерполяции получаем усредненную кривую (рис. 3, *а*). На рис. 3, *б* представлены усредненные кривые, построенные для материала IN738LC.

Величины хордальных модулей построенных кривых составляют 255 ГПа для 24° С ($\Delta\varepsilon^p = 0,43$ %), 216 ГПа для 750° С ($\Delta\varepsilon^p = 0,4$ %) и 115 ГПа для 850° С ($\Delta\varepsilon^p = 0,6$ %).

Так как согласно соотношению (17), $K(\tilde{J}_2)$ представляет собой зависимость касательного модуля обезразмеренной кривой деформирования от уровня напряжений, обезразмерим полученные выше усредненные кривые и построим их в одной системе координат $\tilde{\varepsilon}_{11}^p - \tilde{\sigma}_{11}$, связанной с нижней точкой каждой из кривых.

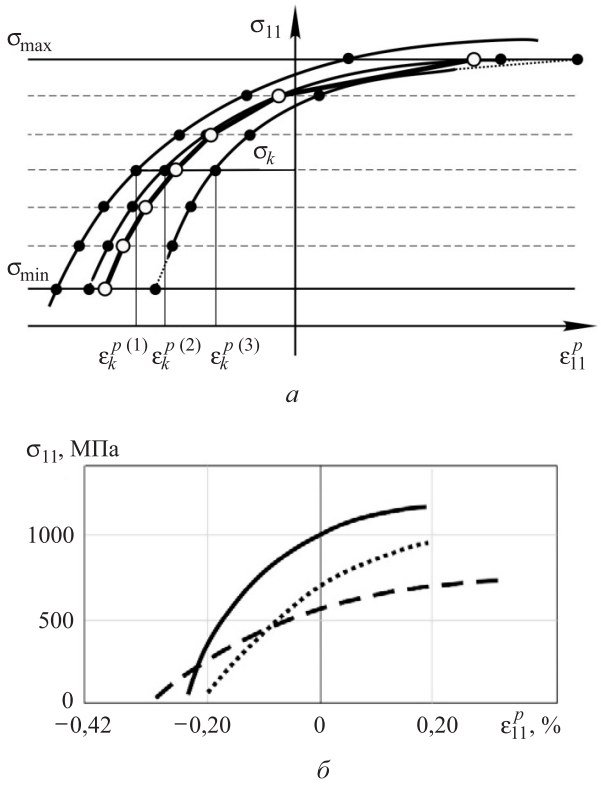


Рис. 3. Схема построения усредненной кривой (*а*) и усредненные кривые предельных циклов для сплава IN738LC (*б*) при: — 24° С; ····· — 750° С; – – — 850° С; –○– — полученные точки усредненной кривой

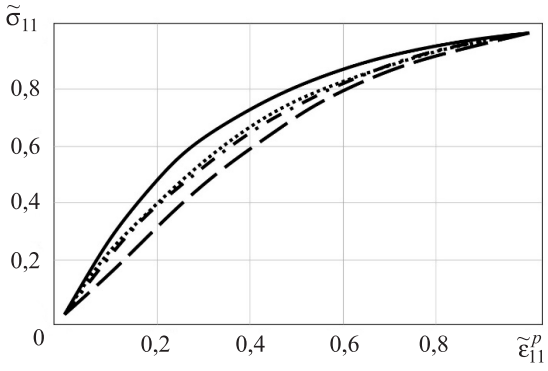
Кривые совпадают между собой в допустимых пределах, что позволяет построить единую для всех температур усредненную обезразмеренную кривую (рис. 4, *а*). Функциональную зависимость $K(\tilde{J}_2)$ для материала IN738LC определяем по этой кривой, записывая соотношение (17) в конечных приращениях

$$K(\tilde{J}_2) = K\left(\tilde{\sigma}_{11}^2\right) = \frac{\Delta\tilde{\sigma}_{11}}{\Delta\tilde{\varepsilon}_{11}^p}. \tag{24}$$

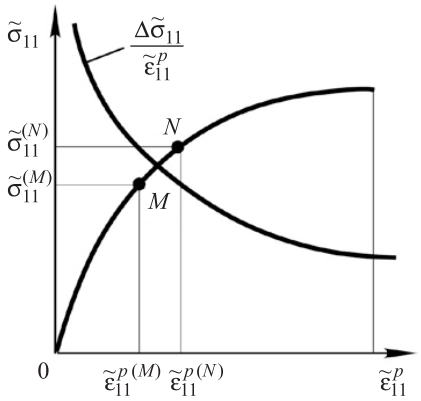
Тогда в точке M каждой усредненной кривой деформирования (рис. 4, *б*) значение $K(\tilde{J}_2)$ вычисляем по формуле

$$K(\tilde{J}_2)\big|_M = K\left(\left(\tilde{\sigma}_{11}^{(M)}\right)^2\right) = \frac{\tilde{\sigma}_{11}^{(N)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(M)}}{\tilde{\varepsilon}_{11}^{p(N)} - \tilde{\varepsilon}_{11}^{p(M)}}, \tag{25}$$

где $\tilde{\sigma}_{11}^{(M)}$, $\tilde{\sigma}_{11}^{(N)}$ и $\tilde{\varepsilon}_{11}^{p(M)}$, $\tilde{\varepsilon}_{11}^{p(N)}$ — значения напряжений и пластических деформаций в точках M и N соответственно. Полученная зависимость $K(\tilde{J}_2)$ изображена на рис. 5.



а



б

Рис. 4. Обезразмеренные усредненные кривые предельного цикла для IN738LC (*а*) и определение $\Delta\tilde{\sigma}_{11} / \Delta\tilde{\varepsilon}^p_{11}$ по усредненной кривой (*б*):
— 24° С; ····· — 750° С; – – — 850° С; –·– — единая усредненная кривая

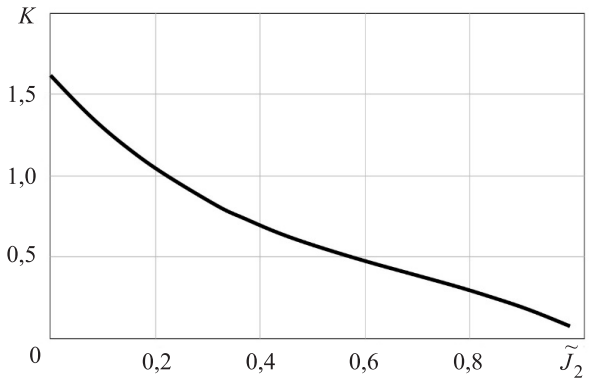


Рис. 5. Зависимость $K(\tilde{J}_2)$ для никелевого сплава IN738LC

Определим функциональные зависимости $a(\chi, T)$ и $\sigma_T(\chi, T)$ для трех значений температур, используя соотношения (18), (19). Для этого необходимо располагать значениями накопленной пластической деформации χ и компонент структурного тензора ξ в точке A (см. рис. 1, *а*) каждого рассматриваемого цикла, номера которых представлены в таблице, а также значениями σ^+ и σ^- в точках A и B для этих циклов.

При циклическом одноосном деформировании приращение накопленной пластической деформации в цикле с номером n определим по формуле $\Delta\chi_n \approx \sqrt{6}\Delta\varepsilon_n^p$, где $\Delta\varepsilon_n^p$ — размах пластических деформаций в рассматриваемом цикле. Таким образом, для получения значения накопленной пластической деформации χ_N, достигнутого к началу N-го цикла, можно использовать соотношение

$$\chi_N \approx \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_0^p + \sqrt{6}\sum_{n=1}^{N-1}\Delta\varepsilon_n^p, \tag{26}$$

где $\varepsilon_0^p = \varepsilon_{11} - \dfrac{\sigma_{11}}{E(T)}$ — значение пластической деформации; ε_{11}, σ_{11} — осевые напряжения и деформации в точке A первого цикла; $E(T)$ — модуль упругости материала, зависящий от температуры. Для использования формулы (26) размахи пластических деформаций в промежуточных циклах определим путем линейной интерполяции, построив на основе имеющихся данных зависимость размаха пластических деформаций от номера цикла для известных кривых. Такой проблемы не возникает при наличии петель деформирования во всем диапазоне циклов: от первого до цикла, выбранного в качестве стабильного. В этом случае размахи пластических деформаций на полуциклах известны, и значения χ_N можно получить, используя соотношение

$$\chi_N = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_0^p + \sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\Delta\varepsilon_n^{p(+)} + \Delta\varepsilon_n^{p(-)}\right), \tag{27}$$

где $\Delta\varepsilon_n^{p(+)}$, $\Delta\varepsilon_n^{p(-)}$ — размахи пластических деформаций на цикле с номером n в полуциклах растяжения и сжатия соответственно. Для восстановления петель циклического деформирования также может быть использована трехпараметрическая модель [11].

Величину ξ_0, значение ξ_{11} в точке A первого цикла определяем по первоначальной кривой деформирования, используя формулу (11) и функцию $K(\tilde{J}_2)$. Значение ξ_{11} в точке A предельного стабильного цикла ξ^{st} можно определить из соотношения (19) с учетом выражения (16):

$$\xi^{st} = \frac{\sigma^{+(st)} + \sigma^{-(st)}}{2E_X^{st}}, \tag{28}$$

$\sigma^{+(st)}$, $\sigma^{-(st)}$ — величины σ^+ и σ^- (см. рис. 1, *б*) для предельного стабильного цикла. Значение ξ_{11} в точке *A* для циклов, отличных от первого и предельного, получаем аналогично χ_N, строя линейную зависимость этого значения от номера цикла. Как и для накопленной пластической деформации, при наличии всех петель промежуточные значения ξ_{11} могут быть определены более точно с использованием формулы (11).

Определив значения накопленной пластической деформации в нужных точках имеющихся циклов, строим графики $\sigma^+(\chi)$ и $\sigma^-(\chi)$ для каждого из трех значений температур, на основании которых, используя соотношение (19), получаем зависимости $\sigma_T(\chi, T)$ для трех значений температур (рис. 6 и 7, *б* соответственно).

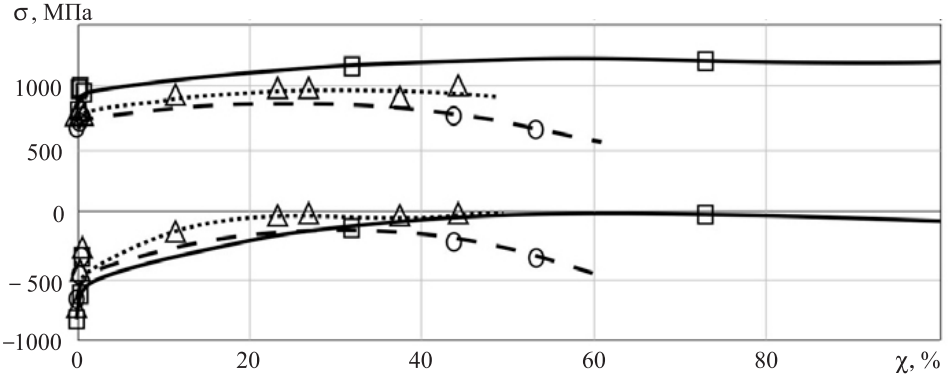
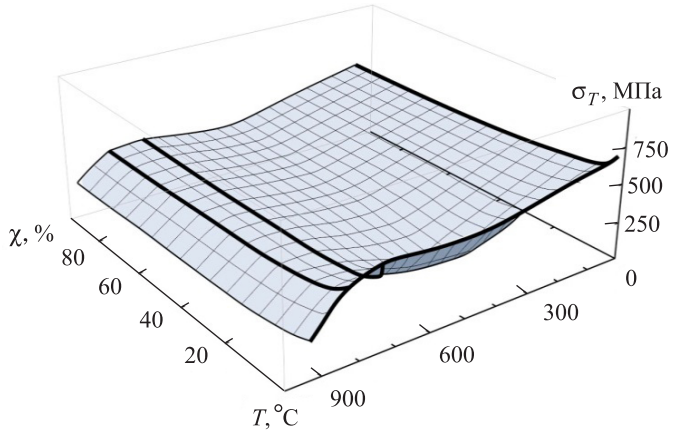
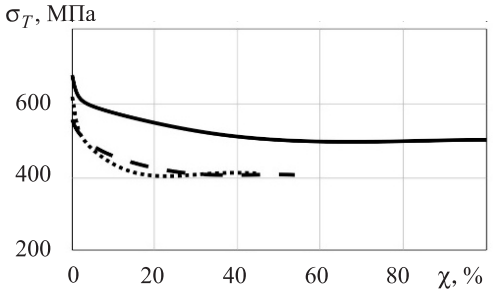


Рис. 6. Зависимости $\sigma^+(\chi)$ и $\sigma^-(\chi)$ для никелевого сплава IN738LC:
—, □ — 24° C; ·····, △ — 750° C; – –, ○ — 850° C

На рис. 7, *а* в виде поверхности представлена зависимость $\sigma_T(\chi, T)$ для всех значений температур в интервале $24°\text{C} \le T \le 950°\text{C}$, сплошными черными линиями отмечены графики опорных зависимостей $\sigma_T(\chi, T)$ при $T = 24°\text{C}$, $T = 750°\text{C}$, $T = 850°\text{C}$ и $\sigma_{yield}(T)$. Для построения поверхности $\sigma_T(\chi, T)$ по опорным зависимостям была использована формула (21) при $T_1 = 24°\text{ C}$, $T_2 = 750°\text{C}$ и при $T_1 = 750°\text{C}$, $T_2 = 850°\text{C}$ соответственно. Для $850°\text{C} < T \le 950°\text{C}$ была использована формула $\sigma_T(\chi, T) = \dfrac{\sigma_{yield}(T)}{\sigma_{yield}(T_1)} \sigma_T(\chi, T_1)$, $T_1 = 850°\text{ C}$.



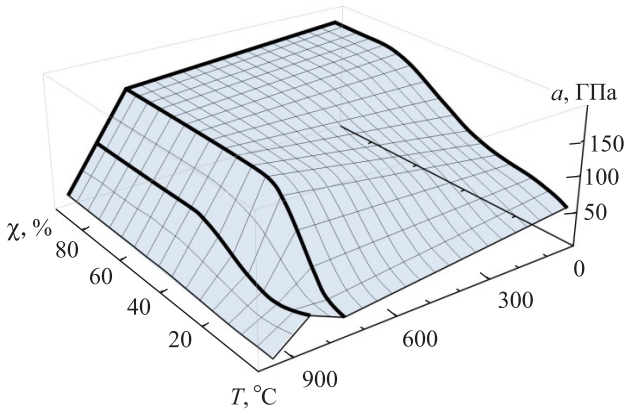
а



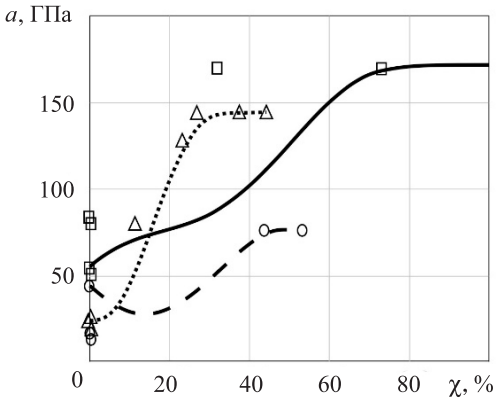
б

Рис. 7. Параметр пластичности $\sigma_T(\chi, T)$ для сплава IN738LC в температурном диапазоне от 24° С до 950° С (*а*) и опорные зависимости (*б*) при: ▬ — 24° С; ····· — 750° С; – – — 850° С

Аналогично, используя соотношение (19), полученные зависимости $\sigma^+(\chi)$ и $\sigma^-(\chi)$ и вычисленные значения ξ, получаем зависимости $a(\chi, T)$ для трех значений температур (рис. 8, *б*). На рис. 8, *а* в виде поверхности представлена зависимость $a(\chi, T)$ для всех значений температур в интервале $24°\text{C} \le T \le 950°\text{C}$, сплошными черными линиями отмечены графики опорных зависимостей $a(\chi, T)$ при T, равной 24° С, 750° С и 850° С, а также $E_X^{st}(T)$. Для построения поверхности $a(\chi, T)$ по опорным зависимостям была использована формула (22) при $T_1 = 24°\text{C}$, $T_2 = 750°\text{C}$ и при $T_1 = 750°\text{C}$, $T_2 = 850°\text{C}$ соответственно. Для диапазона $850°\text{C} < T \le 950°\text{C}$ применялась формула $a(\chi, T) = \dfrac{E_X^{st}(T)}{E_X^{st}(T_1)} a(\chi, T_1)$, где $T_1 = 850°\text{C}$.



а



б

Рис. 8. Параметр пластичности $a(\chi, T)$ для сплава IN738LC в температурном диапазоне от 24° С до 950° С (*а*) и зависимости для трех значений температур (*б*):
—, □ — 24° С; ·····, △ — 750° С; – –, ○ — 850° С

Заключение. Предложена модель поведения конструкционных материалов в условиях сложного неизотермического нагружения. Разработан алгоритм определения параметров предложенной модели по данным жесткого циклического деформирования. На примере никелевого сплава IN738LC продемонстрировано применение разработанного алгоритма для получения параметров пластичности в диапазоне температур 24°…950° С. Параметры могут быть уточнены при наличии большего количества петель жесткого циклического деформирования. Соотношения предложенной модели могут быть программно реализованы и использованы для расчета напряженно-деформированного состояния высоконагруженных конструкций, работающих в условиях сложного неизотермического нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Темис Ю.М. Теория неизотермического пластического течения с изотропным и анизотропным упрочнением. *Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1–3. В двух кн. Кн. 1.* Москва, Машиностроение, 1994, с. 227–231.

[2] Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов, находящихся под воздействием физических полей. *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*, 1975, № 5, с. 111–119.

[3] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[4] Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории.* Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2004, 144 с.

[5] Бондарь В.С., Даншин В.В. Теория неупругости без поверхности нагружения и ассоциированного закона течения. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2015, № 1, с. 43–57. DOI 10.15593/perm.mech/2015.1.04

[6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Механический аналог, моделирующий процессы неупругого неизотермического деформирования. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3 (3), с. 25–38.

[7] Коротких Ю.Г., Волков И.А., Тарасов И.С. Исследование процессов сложного пластического деформирования материалов по плоским траекториям переменной кривизны. *Проблемы прочности и пластичности*, 2007, вып. 69, с. 79–89.

[8] Khutia N., Dey P.P., Hassan T. An improved nonproportional cyclic plasticity model for multiaxial low-cycle fatique and ratcheting responses of 304 stainless steel. *Mechanics of Materials*, 2015, pp. 12–25. DOI 10.1016/j.mechmat.2015.05.011

[9] Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 2008, vol. 25, iss. 10, pp. 1642–1693. DOI 10.1016/j.ijplas.2008.03.009

[10] Radnovich D.C. *Methods of extrapolating low cycle fatique data to high stress amplitudes*. University of Central Florida, 2007, pp. 49–57.

[11] Темис Ю.М., Факеев А.И. Моделирование кривых деформирования и ресурса конструкционного материала при циклическом неизотермическом нагружении. *Известия МГТУ «МАМИ»*, 2011, с. 202–208.

Статья поступила в редакцию 16.06.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 3, с. 20–37.

Темис Юрий Моисеевич — д-р техн. наук, профессор, начальник отдела ЦИАМ им. П.И. Баранова, автор более 300 опубликованных научных работ в области прочности и динамики турбомашин, численных методов решения задач упругости, пластичности и ползучести, оптимального проектирования и многодисциплинарного математического моделирования газотурбинных двигателей. e-mail: tejoum@ciam.ru

Худякова Анастасия Дмитриевна — инженер ЦИАМ им. П.И. Баранова, аспирант кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех опубликованных научных работ в области моделирования неупругого поведения конструкционных материалов.

Model of non-isothermal elastoplastic deformation of structural materials under complex loading

© Temis Yu.M.[1, 2], Khudyakova A.D.[1, 2]

[1]Central Institute of Aviation Motors (CIAM), Moscow, 111116, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The study introduces a model of elastoplastic deformation of structural alloys under conditions of complex nonisothermal loading. The model is based on the plastic flow theory. Within the research we derived the relations that made it possible to determine the parameters of the model using the results of sample tests according to the program of rigid symmetric cyclic deformation. Moreover, we developed an algorithm for determining the plasticity parameters from a limited set of experimental data. Based on the algorithm developed, we obtained the plasticity parameters for the nickel alloy IN738LC over a wide temperature range.

Keywords: *plasticity, complex deformation, non-isothermal conditions, parameter determination*

REFERENCES

[1] Temis Yu.M. Teoriya neizotermicheskogo plasticheskogo techeniya s izotropnym i anizotropnym uprochneniem [The theory of nonisothermal plastic flow with isotropic and anisotropic hardening]. *Mashinostroenie. Entsiklopediya. Dinamika i prochnost mashin. Teoriya mekhanizmov i mashin. Tom 1–3. V dvukh knigakh. Kniga 1*. [Mechanical engineering. Encyclopedia. Dynamics and strength of machines. Theory of mechanisms and machines. Vol. 1–3. In 2 books. Book 1]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1994, pp. 227–231.

[2] Demyanushko I.V., Temis Yu.M. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. A Journal of USSR Academy of Sciences*, 1975, vol. 5, pp. 111–119.

[3] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[4] Bondar V.S. *Neuprugost. Varianty teorii* [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2004, 144 p.

[5] Bondar V.S., Danshin V.V. *Vestnik PNIPU. Mekhanika — PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 43–57. DOI 10.15593/perm.mech/2015.1.04

[6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Saveleva I.Yu. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3 (3), pp. 25–38.

[7] Korotkikh Yu.G., Volkov I.A., Tarasov I.S. *Problemy prochnosti i plastichnosti — Problems of strength and plasticity*, 2007, no. 69, pp. 79–89.

[8] Khutia N., Dey P.P., Hassan T. *Mechanics of Materials*, 2015, pp. 12–25. DOI 10.1016/j.mechmat.2015.05.011

[9] Chaboche J.L. *International Journal of Plasticity*, 2008, vol. 25, no. 10, pp. 1642–1693. DOI 10.1016/j.ijplas.2008.03.009

[10] Radnovich D.C. *Methods of extrapolating low cycle fatique data to high stress amplitudes*. University of Central Florida, 2007, pp. 49–57.

[11] Temis Yu.M., Fakeev A.I. *Izvestiya MGTU "MAMI" (MAMI Bulletin)*, 2011, pp. 202–208.

Temis Yu.M., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department, Central Institute of Aviation Motors (CIAM). Author of over 300 published scientific papers in the field of strength and dynamics of turbomachines, computational methods for solving elasticity, plasticity and creep problems, optimal design and multidisciplinary mathematical modeling of gas turbine engines. e-mail: tejoum@ciam.ru

Khudyakova A.D., engineer, Central Institute of Aviation Motors (CIAM), postgraduate student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 published scientific papers in the field of modeling inelastic behavior of structural materials.