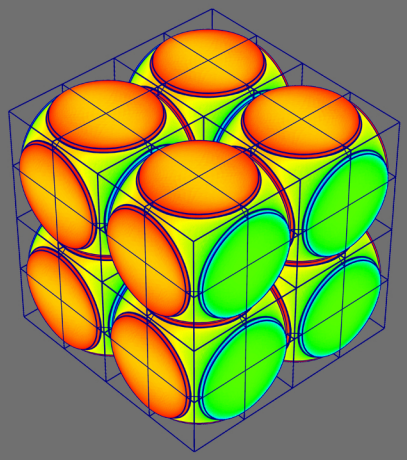
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Матюшкин И.В., Заплетина М.А. Влияние точечных дефектов структуры кле- точно-автоматного вычислителя на решение 2D скалярного волнового уравнения. Математическое моделирование и численные методы, 2017, No 3, с. 3–19.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/138/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:48

УДК 519.6 DOI 10.18698/2309-3684-2017-3-319

Влияние точечных дефектов структуры клеточно-автоматного вычислителя на решение 2D скалярного волнового уравнения

© И.В. Матюшкин[1, 2], М.А. Заплетина[1, 2]

[1]ИППМ РАН, Москва, г. Зеленоград, 124365, Россия
[2]Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, г. Зеленоград, 124498, Россия

Проанализировано влияние искусственно введенных локальных неоднородностей (дефектов) на динамику клеточно-автоматного решения скалярного волнового уравнения. Использована клеточно-автоматная схема, наследованная из конечно-разностной схемы Кранка — Николсон. Для оценки соотношения между возмущенным и невозмущенным решениями введена интегральная характеристика «энергии» поля клеточного автомата. Вычислительный эксперимент показал, что, несмотря на дрейф колебаний по фазе, средняя «энергия» и ее девиация сохраняются, и разрушения решения не происходит. Показано, что девиация «энергии» пропорциональна суммарному расстоянию дефектов до центра симметрии.

Ключевые слова: *клеточные автоматы, волновое уравнение, локальные неоднородности, консервативность, отказоустойчивость, гексагональная сетка*

Введение. Клеточные автоматы (КА) являются одной из перспективных моделей архитектуры вычислительных машин и устройств обработки информации. Расширение спектра задач, решаемых с использованием КА, обусловливает необходимость исследования отказоустойчивости клеточно-автоматных архитектур. Параллелизм обработки информации архитектуры КА, обеспечивающий ее быстродействие, не гарантирует повышенной отказоустойчивости. Выход из строя одного из вычислительных элементов и, как следствие, некорректное исполнение локальной функции перехода (ЛФП) модели КА может привести к неверному результату вычислений. Влияние отказа конкретного элемента поля КА, который будем называть точечным дефектом, напрямую зависит от реализованной модели вычислений, архитектуры и алгоритмов, а также задач, решаемых выбранной системой. Примером таких задач могут служить уравнения математической физики; так, в аспекте дефектности исследовалось уравнение теплопроводности [1]. Специфика численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в формализме КА состоит в применении не прямого матричного метода, а метода последовательных приближений, т. е. перехода от одного промежуточного состояния КА к другому, более близкому к искомому решению.

Волновое уравнение, выводимое из системы уравнений Максвелла и описывающее распространение векторного электромагнитного

поля, является стандартным формализмом для описания явлений в волноводах, что важно, в частности, для задач радиофотоники, которая, по определению, сочетает оптические явления с электрическим интерфейсом в объеме полупроводника.

Рассмотрим более простой случай — 2D скалярное волновое уравнение с центральной симметрией, на примере которого исследуем отказоустойчивость. В данном случае под отказоустойчивостью понимается способность решения задачи сохранять свои свойства на всем поле КА, кроме локальной области вблизи дефекта (дефектов), т. е. ячейки КА, с которой возможно считывание, но в которую невозможна запись данных. Особое внимание уделено наличию множественных дефектов (до 10), в качестве основных их характеристик взято суммарное расстояние до центра мембраны и расстояние до него от их геометрического центра тяжести.

Цель данной работы состоит в исследовании внедрения дискретных особенностей в структуру краевой задачи для 2D скалярного волнового уравнения и его сравнении с невозмущенным решением. Более отдаленное практическое значение связано с повышением отказоустойчивости вычислителей КА за счет расширения ЛФП формулами, учитывающими дефектность соседних ячеек, исследованных академиком А.Л. Стемпковским [1].

Формулировка, численный метод и свойства решения исходной задачи. Математическая формулировка основана на классической задаче о колебаниях круглой мембраны радиусом R с закрепленными краями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad u(r = R,\, t) = 0, \quad u(r,\, t = 0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\, t = 0) = 1 - \frac{r}{R}, \quad R \doteq 1, \tag{1}$$

где u — отклонение точки мембраны от равновесия; r — расстояние до центра мембраны; t — время.

Как известно [2], решение описывается через функцию Бесселя нулевого порядка:

$$u(r,\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\lambda_k a t) J_0(\lambda_k r), \; b_k \equiv \frac{2}{a\lambda_k \left(J_0'(\lambda_k)\right)^2} \int_0^1 r(1-r) J_0(\lambda_k r)\, dr. \tag{2}$$

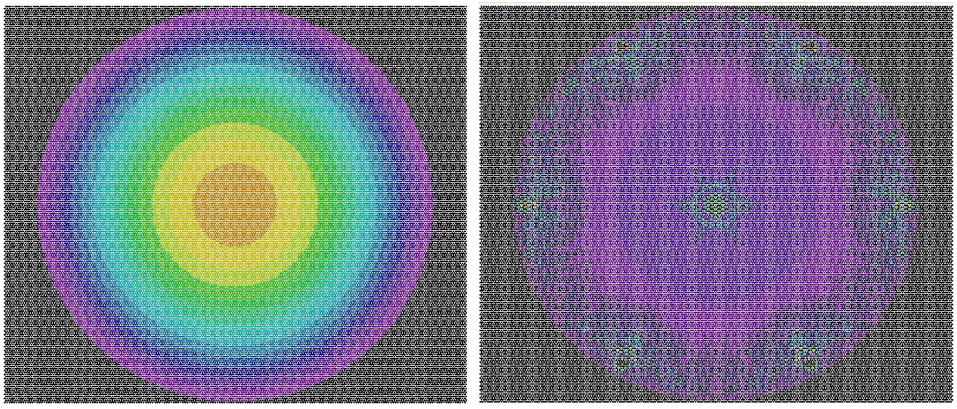
Здесь $J_0(\lambda = \lambda_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lambda_1 \approx 2{,}40$, $\lambda_2 \approx 5{,}52$, $\lambda_3 \approx 8{,}65$ — нули функции Бесселя.

Классический КА обладает дискретностью состояний, также существует класс аппаратов с непрерывными значениями. Будем счи-

тать, что состояние ячейки имеет тип вещественного числа double. Хотя известны КА с памятью, постараемся свести задачу к обычному КА за счет удвоения состояния $\langle u, v \sim \partial u / \partial t \rangle$. Вначале обратимся к очевидной схеме решения волнового уравнения на гексагональной сетке (ГС):

$$\begin{cases} \partial u / \partial t = a\xi v \\ \partial v / \partial t = \dfrac{a}{\xi} \Delta u \end{cases} \underset{\partial t = \tau}{\overset{\text{КА на ГС}}{\Rightarrow}} \begin{cases} u^{t_c+1} = u^{t_c} + \tau a \xi v^{t_c}; \\ v^{t_c+1} = v^{t_c} + \dfrac{4}{3} \dfrac{\tau a}{\xi l^2} \left(\dfrac{1}{6} \sum\limits_i u_i^{t_c} - u^{t_c} \right), \end{cases} \tag{3}$$

где $0 < \xi \sim l^{-1}$ — вычислительный параметр; $\langle \tau, l \rangle$ — кванты КА; t_c — номер хода клеточного автомата; i — индекс соседней ячейки, сама ячейка в записи ЛФП не индексируется. Непосредственное применение схемы (3) приводит к эффекту избыточной гексагональной симметрии (эффект ИГС на рис. 1, *б*), который является паразитным, так как нарушает центральную симметрию решения.



а *б*

Рис. 1. Эффект ИГС для решения задачи о колебаниях круглой мембраны, полученный при $R = 1$, $a = 0,1$, $\tau = 0,01$, $\xi = 1$, параметре схемы Кранка — Николсон $\alpha = 0,5$ $(\gamma \approx 0,03)$ на 600-м ходе схемы (5) (*а*) и 940-м ходе схемы (3) (*б*); для компоненты u использована цветовая карта из статьи [3]

Для КА с дискретными значениями такие эффекты встречаются часто, но для КА с непрерывными значениями (КА-ОДУ в терминологии авторов работы [4]) возможна более точная по сравнению со схемой (3) ЛФП, восходящая к явно-неявной схеме Кранка — Николсон [5] и учитывающая второй порядок по изменению u:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\xi v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{a}{\xi}\Delta u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{t_c+1} = u^{t_c} + \tau a\xi\left(\alpha v^{t_c+1} + (1-\alpha)v^{t_c}\right) + \dfrac{k}{2}\left(\dfrac{\tau a}{l}\right)^2 \mathrm{Lu}; \\ v^{t_c+1} = v^{t_c} + k\dfrac{\tau a}{\xi l^2}\mathrm{Lu}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\mathrm{Lu} \equiv \frac{1}{6}\sum_i u_i^{t_c} - u^{t_c} \equiv \overline{u}^{t_c} - u^{t_c}, \quad k \doteq \frac{4}{3}, \quad 0 \le \alpha = \frac{1}{2} \le 1;$$

$$\begin{cases} u^{t_c+1} = u^{t_c}(1-\gamma) + v^{t_c}\xi a\tau + \gamma\overline{u}^{t_c}; \\ v^{t_c+1} = -u^{t_c}\dfrac{2\gamma}{(1+2\alpha)}\dfrac{1}{\xi a\tau} + v^{t_c} + \dfrac{1}{\xi a\tau}\dfrac{2\gamma}{(1+2\alpha)}\overline{u}^{t_c}. \end{cases} \tag{5}$$

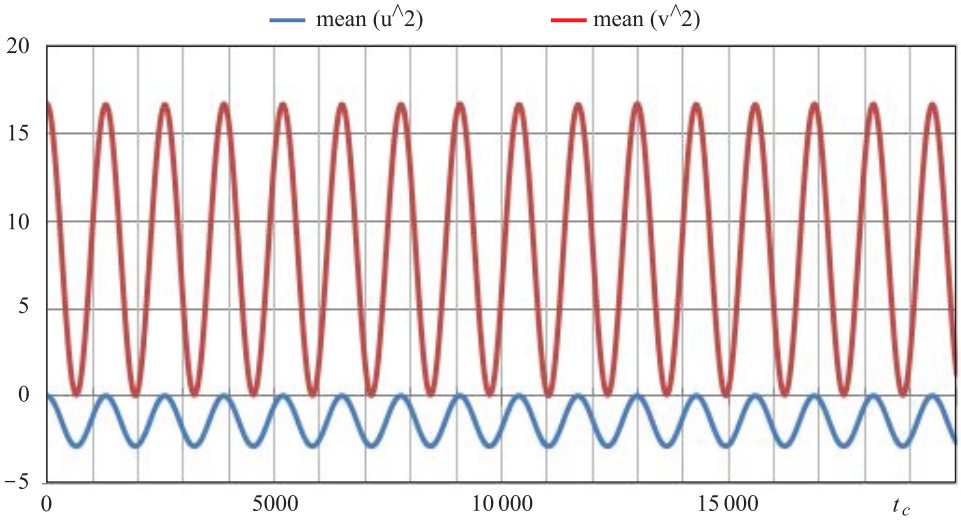
$$\gamma \equiv k(a\tau/l)^2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

В качестве начальных условий берем, естественно, $u^{t_c=0}(r) = 0$, $v^{t_c=0}(r) = (a\xi)^{-1}(1 - r/R)$. Коэффициент γ имеет для данной задачи смысл числа Куранта. ЛФП для граничных ячеек запишем как $u^{t_c+1} = 0$, $v^{t_c+1} = 0$. Последнее условие вытекает из определения производной, поскольку на границе u не меняется. Другое задание этих ЛФП ошибочно и приводит к нарушению консервативности и, как следствие, к довольно быстрому уменьшению фазовых переменных до нуля. Смешение времен в лапласиане Lu (4) также ведет к срыву расчета.

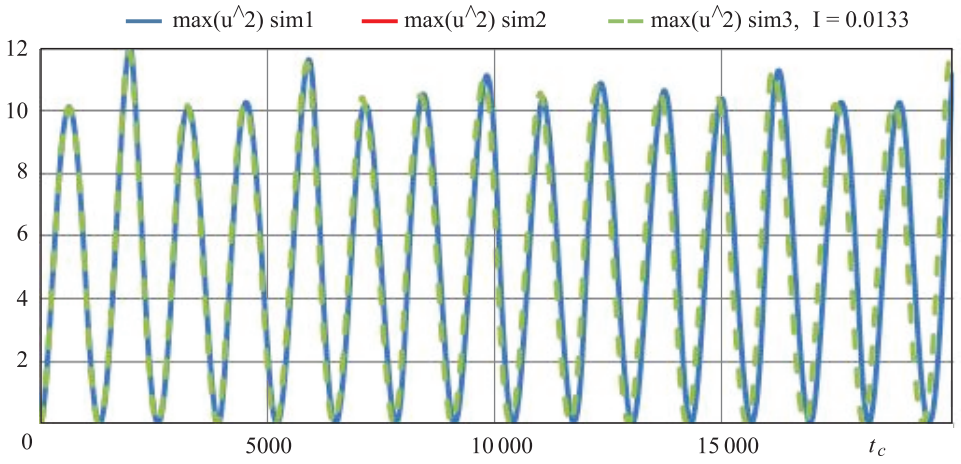
Решение волнового уравнения по схеме (5) на единичном круге для ребра гексагона $l = 2/3\cdot 10^{-2}$ не приводит к эффекту ИГС (рис. 1, *а*); при этом использование явной схемы (3) сопровождалось ИГС и другими визуальными явлениями (см. рис. 1, *б*). Исследование ИГС [6] при различных квантах l (параметр гексагональной сетки) интересно само по себе — без привязки к точному решению волнового уравнения. Общее свойство консервативности схемы (5) сохраняется. Так, на рис. 2, *а* показана дисперсия по внутренним ячейкам, т. е. таким, у которых число соседей $n = 6$). Однако если брать $u(x \approx 0)^2, v(y \approx 0)^2$ в центре мембраны, то при общем колебательном характере поведения все же присутствуют нерегулярности (см. рис. 2, *б*). Причем их независимость от выбора шага и экземпляра расчета делает несостоятельным предположение о какой-либо неустойчивости. Кроме того, при решении аналитической формулы (2) в MATLAB получаем такую же картину, что можно объяснить несколькими гармониками убывающей амплитуды, присутствующими в функции (2).

Для радиально симметричной задачи используем методику определения радиального распределения. Круг разделяется на концентри-

ческие кольца шириной $h = 0,02\ (l \doteq 0,0067)$ по радиусу, и если центр гексагона попадает в кольцо, то данный гексагон учитывается при расчете среднего арифметического по кольцу $[r-h;\ r]$. Совпадение всех трех кривых на рис. 2, *б* исключает фактор вычислительной погрешности в качестве причины ангармоничности решения.



а



б

Рис. 2. Динамика состояния космического аппарата (КА) в схеме (5): *а* — агрегированного, $\sum_{1\le i\le I} (u_i^{t_c})^2/I$, $\sum_{1\le i\le I} (v_i^{t_c})^2/I$; *б* — в центре, $(u_{r=0}^{t_c})^2$; i — индекс ячейки; I — число внутренних ячеек; sim1 и sim2 — симуляции для шага $l = 2/3\cdot 10^{-2}$; sim3 — симуляции для шага $2l$

Один период колебаний приходится примерно на 1200 ходов. Итак, имея невозмущенное решение для параметров численной схемы (см. рис. 1, *а*) и $l = 2/3 \cdot 10^{-2}$, можем приступить к анализу решения волнового уравнения с точечными дефектами на поле КА.

Интегральные характеристики дефектов и решения. Как следует из работы [1], для уравнения теплопроводности платой за дефектность структуры будет длительное время расчета. В рассматриваемом случае вместо времени сходимости будем оценивать энергетические характеристики. Введем некоторую классификацию возможных типов точечных дефектных клеток. Дефектом первого рода назовем такую ячейку КА, которая открыта для чтения и закрыта для записи, т. е. ее состояние s неизменно: $s^{t_c+1} \triangleq s^{t_c}$. Дефектом второго рода назовем такую ячейку КА, которая закрыта для чтения и открыта для записи, т. е. в собственной и соседних ЛФП необходимо подставлять $s^{t_c} \to 0$(null). Дефектом третьего рода назовем ячейку КА, закрытую для записи и чтения, т. е. свойства дефектов первого и второго рода объединены. В общем случае появившийся точечный дефект матричной структуры может способствовать сначала некорректной работе и выходу из строя одного из соседних элементов, а затем со временем и группы ближайших к ним.

Предположим, что на поле КА присутствуют независимо друг от друга только дефекты первого рода (d штук). В численных расчетах для дефектных ячеек принято, что $u(t_c = 0) = 0, \quad v(t_c = 0) = 0.$

Для формализации влияния дефектов рассмотрим их агрегированные параметры:

$$xc = \frac{1}{d}\sum_i x_i, \quad yc = \frac{1}{d}\sum_i y_i, \quad p_1 = \sum_i \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \quad p_2 = \sqrt{xc^2 + yc^2}. \quad (6)$$

Здесь $i = \overline{1,d}$; d — количество дефектов, координаты которых задаются парами $(x_i, y_i) \in [-1; 1]^2$.

Параметр $p1$ характеризует суммарный «вес» дефектов; чем дальше дефект от центра, тем меньше его влияние, поэтому корректнее было бы брать обратную величину. Параметр $p2$ указывает, где расположен геометрический центр тяжести дефектов, т. е. учитывает симметрию их взаиморасположения.

Кроме того, необходимо ввести критерии «возмущенности» решения. С учетом данных (см. рис. 2) для состояния КА введем понятие «энергии»:

$$E = \sum_i u_i^2 + A\sum_i v_i^2. \quad (7)$$

Суммирование ведется по всем внутренним ячейкам, т. е. у которых шесть соседних ячеек. Первая сумма отвечает за потенциальную энергию, вторая — за кинетическую энергию мембраны (см. рис. 2). Для невозмущенного случая энергия E^* должна сохраняться во время расчета до хода с номером $2T^*$, подбираемого так, чтобы к моменту T^* прошло не менее пяти колебаний. Тогда из этого условия можно определить коэффициент A как

$$A(u, v, t_c) = -\frac{\sum_i \left(u_i^{t_c} - u_i^{t_c-1}\right)\left(u_i^{t_c} + u_i^{t_c-1}\right)}{\sum_i \left(v_i^{t_c} - v_i^{t_c-1}\right)\left(v_i^{t_c} + v_i^{t_c-1}\right)}, \quad t_c < T^*. \tag{8}$$

Непосредственная характеристика решения — энергия $E(d, t_c)$, являющаяся динамической величиной. Также введем энергию для невозмущенного случая $E(0, t_c)$. В идеальных условиях для невозмущенного случая коэффициент $A = \text{const}$ и, соответственно, $E(0, t_c) \equiv E^*$, но из-за неизбежной вычислительной погрешности (как в самом значении A, так и в сеточной функции) происходят малоамплитудные колебания «энергии» (рис. 3). В настоящем исследовании принято значение усредненной величины $A = 0{,}166722$, которое не менялось для возмущенных решений при использовании формулы (7). На рис. 3 приведены значения среднего и относительного среднеквадратичного отклонения, наблюдается погрешность вычисления, ведущая к шуму при экстракции коэффициента A.

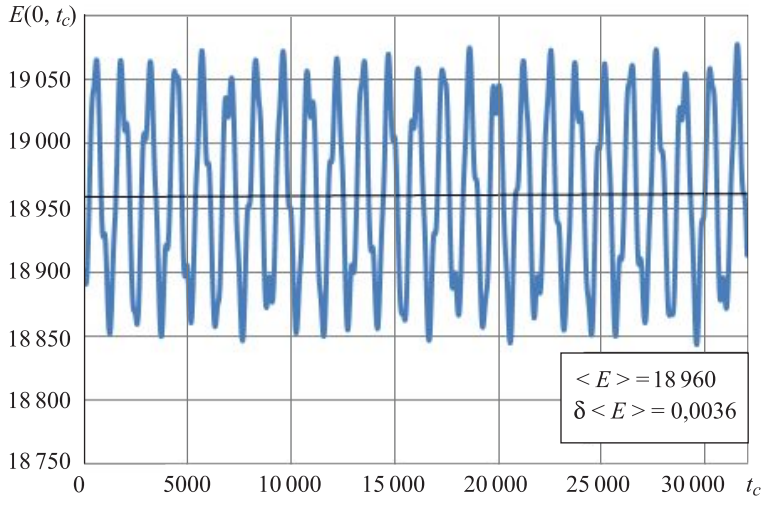
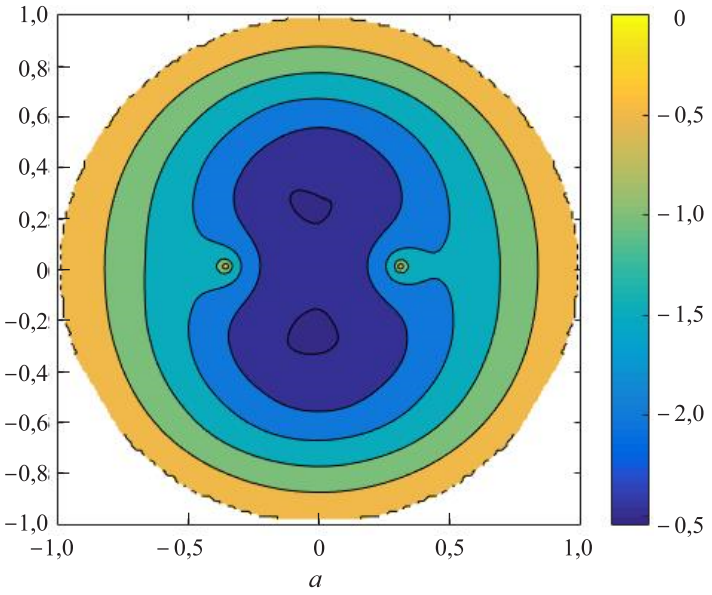


Рис. 3. Динамика энергии $E(0, t_c)$

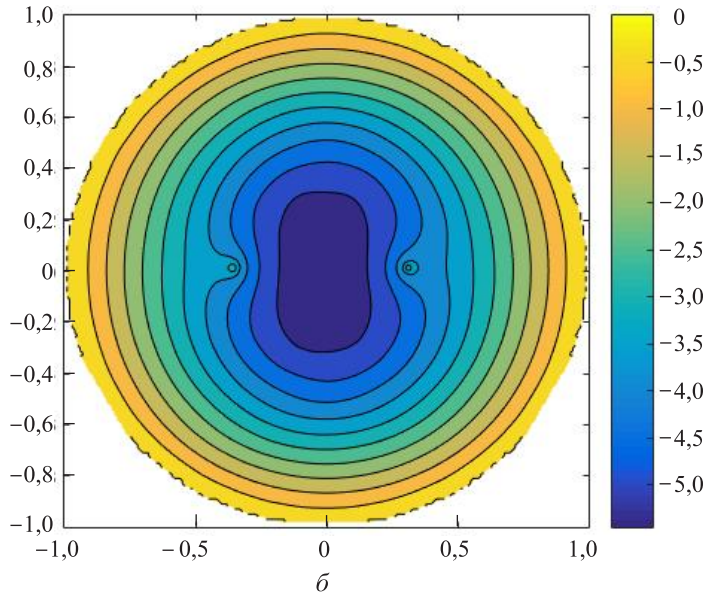
При обработке данных расчета КА средствами MATLAB величина $\overline{E} \equiv \langle E \rangle$ вычислялась с помощью команды mean (среднее арифметическое значение столбца-времени), $\delta E \equiv \delta \langle E \rangle$ — команды std (среднеквадратичное стандартное отклонение), результат которой делился на $\overline{E}$. Далее для простоты назовем величину δE девиацией, которую будем использовать в качестве характеристики сравнения возмущенного и невозмущенного решений. Аналогичные процедуры применялись для вычисления среднего и девиации отношения $E(d, t_c) / E(0, t_c)$, которое назовем индикатором. В результате получаем критерии $\overline{E(d, t_c)}$, $\delta\big(E(d, t_c)\big)$, $\overline{E(d, t_c) / E(0, t_c)}$, $\delta\big(E(d, t_c) / E(0, t_c)\big)$. Кроме того, введем относительное среднеквадратичное отклонение (девиацию) $\delta <>$ величины, указанной в скобках.

Результаты расчетов. На рис. 4 приведены контурные графики разности возмущенного и невозмущенного решений $\left(u^{t_c}_{(d,k)}(x,y) - \right.$ $\left. - u^{t_c}_{(0)}(x,y)\right)$. Здесь пара (d,k) означает число дефектов и номер прогона, определяющего их расположение. Очевидно, что влияние дефектов сказывается в основном на окрестности самого дефекта, и чем меньше радиус этой окрестности, тем выше отказоустойчивость КА.

На рис. 5 приведен пример динамики энергетических характеристик при фиксированном положении дефекта $(d = 1,\ k)$. Если точечный дефект находится на периферии единичного круга $(d = 1,\ k = 1)$, то диссипация энергии незначительна (не более 0,2 % от исходной величины), ее относительное среднеквадратичное отклонение составляет $\delta E = 0{,}16$ %. Если же говорить о смещении средних, то оно чуть больше — 0,7 %. Характер колебаний предполагает наложение нерегулярности на гармонику. С точки зрения нелинейной динамики кривые выглядят достаточно интересно, хотя шум на графике отношения $E(d,t_c) / E(0,t_c)$, которое косвенно является индикатором сдвига фазы колебаний, более сглажен. При удалении дефекта от периферии $(d = 1,\ k = 2)$ шум исчезает, но возрастают девиация $\delta E = 1{,}4$ % и смещение среднего на 3 %. При этом индикатор показывает затухание колебаний на рассмотренном отрезке. Случай $(d = 1,\ k = 3)$ экстремален, поскольку дефект находится почти на границе круга, но ничего не добавляет к наблюдаемому в случае $(d = 1,\ k = 1)$, разве что шумовые эффекты более выражены для индикатора. При рассмотрении другого экстремального случая $(d = 1,\ k = 4)$, когда дефект находится почти в центре, наблюдается существенное снижение «энергии» и 8 % ее девиации; при этом смещение среднего составляет 12 %, а девиация индикатора — 8 %. В ряде точек отклонение индикатора достигает 77 % от уровня 1.



а



б

Рис. 4. Контурные графики для возмущенного решения случая $(d = 2,\ k = 1)$ на 6000-м ходу КА:

а — величина $u^{t_c}_{(d,k)}(x, y)$; *б* — модуль разности величины *u* возмущенного и невозмущенного случая $\left(u^{t_c}_{(d,k)}(x, y) - u^{t_c}_{(0)}(x, y)\right)$

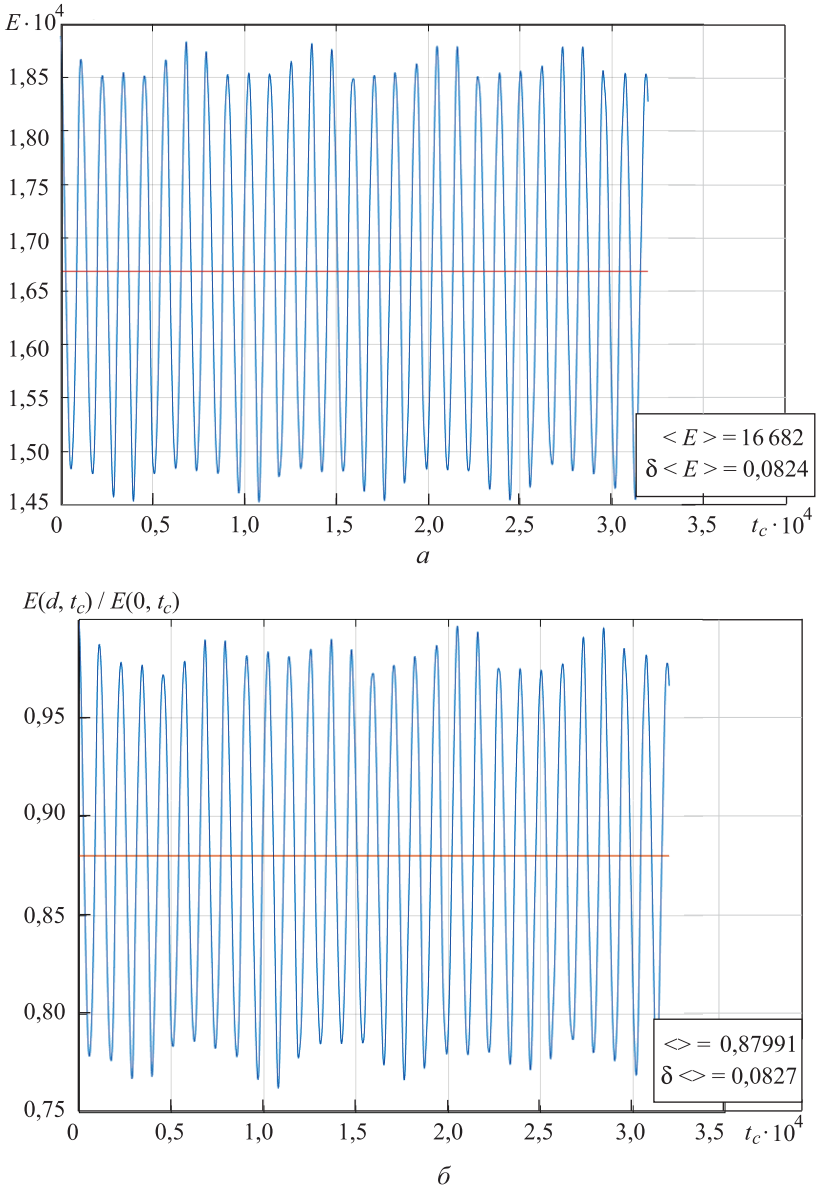
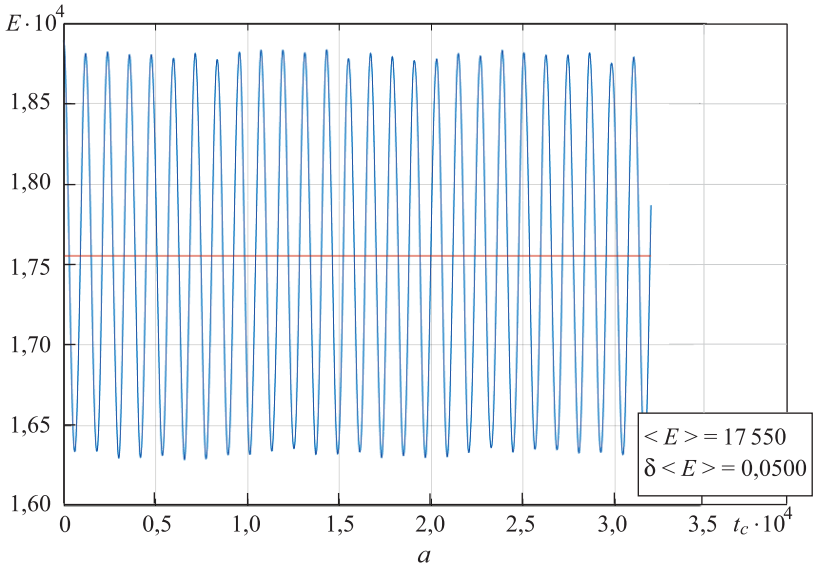


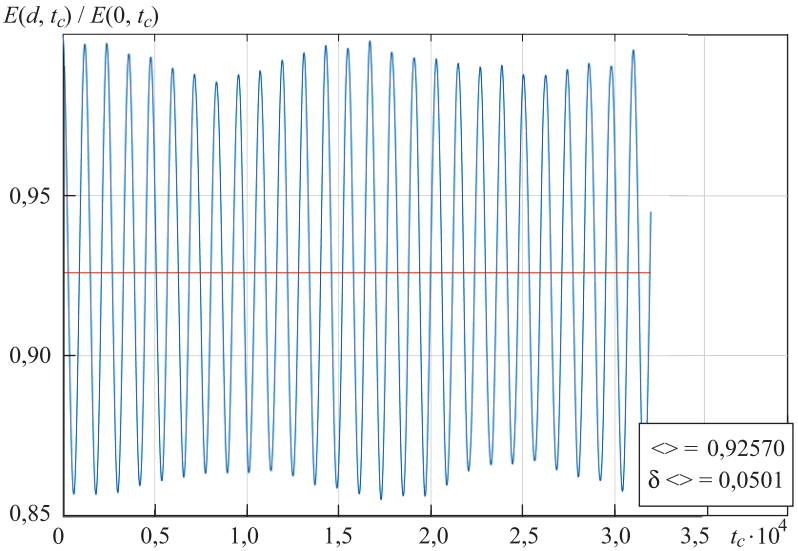
Рис. 5. Воздействие дефекта на динамику энергии, случай $(d = 1,\ k = 4)$, $p1 = 0,024,\ \ p2 = 0,0267$:

а — график изменения величины $E(d,\ t_c)$ (7), красной линией отмечен уровень среднего значения энергии; *б* — динамика изменения индикатора

Таким образом, наличие дефекта (или дефектов) в поле КА приводит к диссипации энергии, но только на начальном участке и по сравнению с невозмущенным случаем $d = 0$. Однако свойство консервативности в целом по динамике сохраняется, поскольку динамика «энергии» носит колебательный характер. Отклонение среднего — это плата за дефектность в случае волнового уравнения.



а



б

Рис. 6. Взаимодействие трех дефектов на динамику энергии для случая $(d = 3,\ k = 1)$:

а — график изменения величины $E(d, t_c)$ (6); *б* — динамика изменения девиации энергии, равной $\delta\left(E(d,\ t_c) / E(0,\ t_c)\right)$; красной линией отмечен уровень среднего значения энергии

Для двух дефектов, брошенных на периферию $(d = 2,\ k = 3)$, наблюдается квазипериодический режим колебаний, особенно видимый для индикатора. Смещение среднего невелико — 5 % (по сравнению с центральным дефектом для случая $(d = 1,\ k = 4)$, где смещение было большим), девиации энергии и индикатора составляют около 3 %. Очень красивый абрис (рис. 6) колебаний получился для случая $(d = 3,\ k = 1)$, когда дефекты находятся «в среднем поясе»: наблюдается гармонически модулированная по амплитуде кривая, что особенно выражено для индикатора (рис. 6, *б*).

Такая картина сохранится, если увеличить время расчета в 3 раза (на 100 000 ходов). Смещение среднего тогда составит 7,5 %, обе девиации — 5 %. Стройность колебаний нарушается в случае трех близко расположенных дефектов «в среднем поясе», отмечается рост смещения, имеющего смысл диссипации (10 %), и девиаций (6 %). В терминах нелинейной динамики имеет место хаотический аттрактор. Случай $(d = 3,\ k = 5)$ дает три выстроившихся по радиусу дефекта. Колебания становятся почти гармоническими в обоих случаях, но их амплитуда довольно высокая: девиация энергии и индикатора составляет 14 %, смещение среднего — 81 % величины первоначальной энергии. При этом по абсолютной величине размах достигает почти 17…19 %, в связи с чем можно говорить о существенном нарушении исходного решения.

При рассмотрении случая $(d = 5,\ k = 1)$ количество дефектов не является критерием возмущения решения, когда на периферии (и притом в одной полуплоскости) оказалось целых пять дефектов. При этом обе девиации оказались малы (2,5 %), а диссипация энергии составила всего 5 %. В наиболее «плохих» точках графика всего 10 % отличий от 1. Рассмотрим теперь семь дефектов, находящихся ближе к центру для случая $(d = 7,\ k = 1)$. И здесь не происходит пропорционального числу дефектов роста; диссипация составила 18 %, а девиации — 12,5 %. Для случая $(d = 10,\ k = 4)$ девиации существенно не возросли и составили 15 %, хотя диссипация стала больше — 24 %. Характер колебаний хаотический.

Статистика двух случайных дефектов. Рассмотрим поведение индикатора $E(d, t_c) / E(0, t_c)$, среднего и девиации, для десяти независимых испытаний/прогонов по критериям $p1$ (рис. 7) и $p2$ (рис. 8). Кроме того, на рис. 9 приведена зависимость от $p1$ и $p2$ девиации энергии уже на другой базе данных, полученная в ходе десяти испытаний для двух случайных дефектов, и, как видно, она лучше аппроксимируется линейным законом.

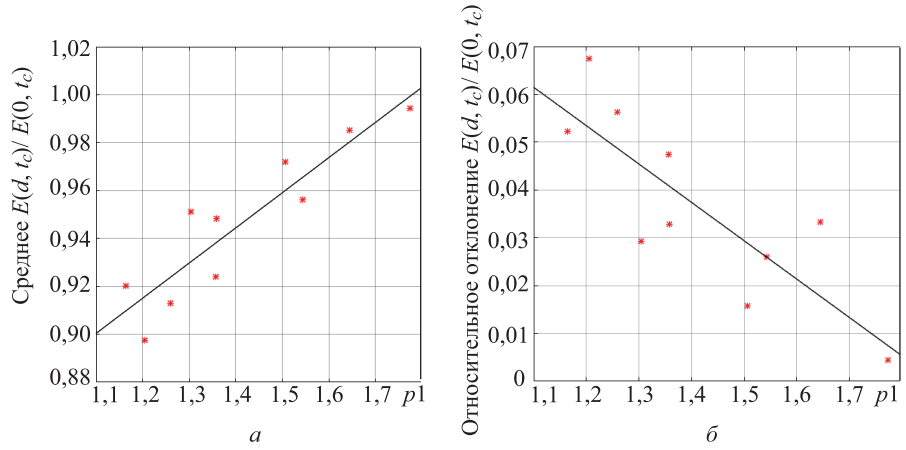


Рис. 7. Критерий $p1$ для оценки отказоустойчивости КА по величине среднего (*а*) и девиации (*б*) индикатора согласно уравнениям интерполянтов вида $y = ax + b$ (MATLAB, 95 %) для девиации $a = -0,0802$ $(-0,1247, -0,03572)$, $b = 0,1497\,(0,08634, 0,213)$ и среднего $a = 0,1468$ $(0,09276, 0,2008)$, $b = 0,7389 \times$ $\times\,(0,662, 0,8158)$ для случая $(d = 2)$

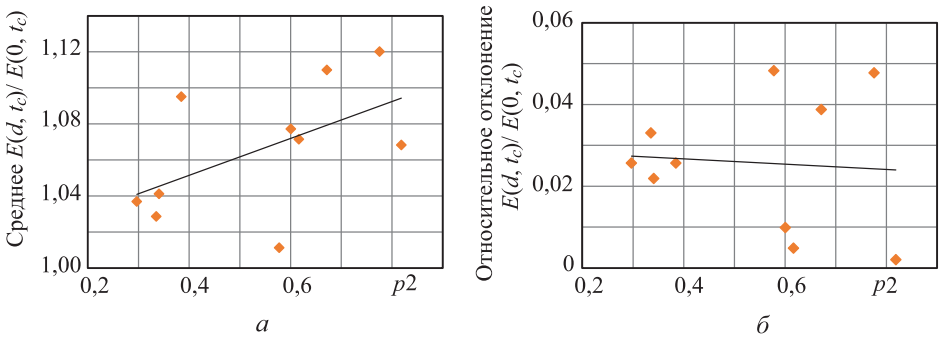


Рис. 8. Критерий $p2$ для оценки отказоустойчивости КА по величине среднего (*а*) и девиации (*б*) индикатора

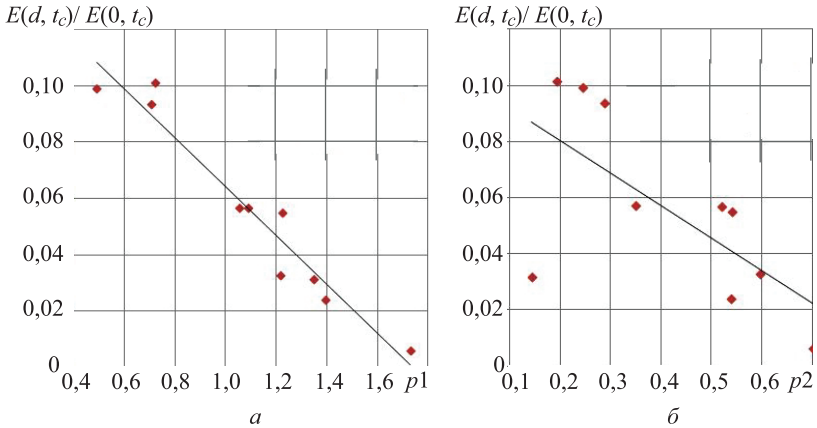
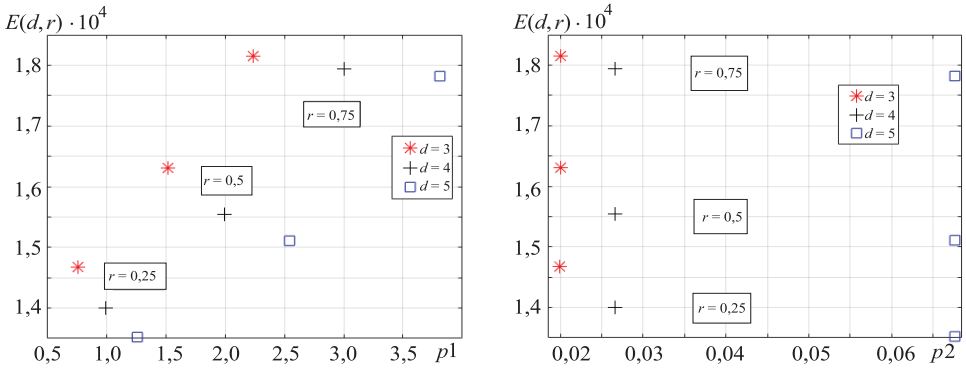


Рис. 9. Зависимость девиации «энергии» δE по критериям $p1$ (*а*) и $p2$ (*б*)

Симметричное расположение дефектов $d > 2$**.** Сделаем расположение дефектов симметричным, т. е. критерий $p2 = 0$ с точностью до размера гексагона. Некоторые результаты, когда дефекты для d, равного 3, 4 и 5, располагаются на трех радиусах r, составляющих 0,25, 0,5 и 0,75 (для каждого d), приведены на рис. 9. Необходимо больше точек, чтобы «увидеть» закономерность по критерию $p2$, здесь очень хорошо прослеживается линейный закон по критерию $p1$.

Наконец, исследуем различные количества дефектов по критерию $p1$, когда для каждого проводится по пять испытаний. Можно наблюдать линейные зависимости, при этом коэффициенты прямых обусловлены значением d (рис. 10).



а *б*

Рис. 10. Зависимость среднего по «энергии» от критериев $p1$ (*а*) или $p2$ (*б*), частичный «уход» одной точки ($d = 5$) с прямой и общее смещение вертикалей от нуля вызваны небольшой асимметрией конфигурации ввиду дискретности сетки КА

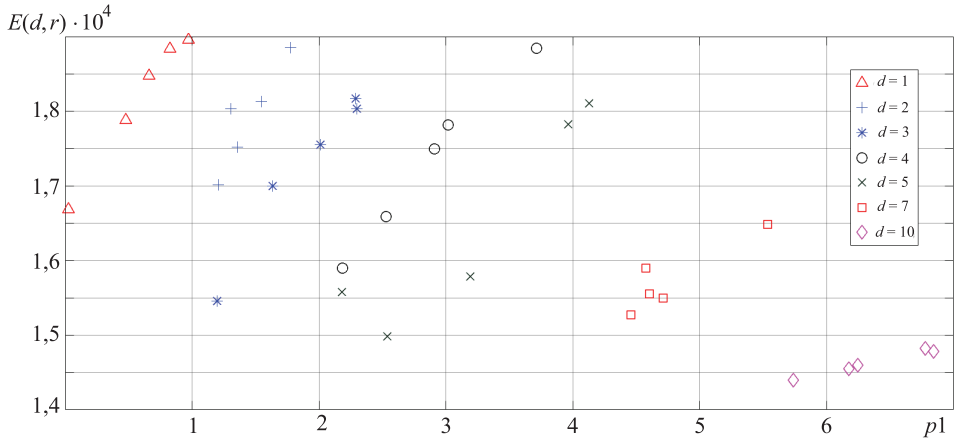


Рис. 11. Обобщенный график зависимости средней энергии от конфигурации и дефектов при различном их числе

***Несимметричное расположение дефектов d* < 10.** Отклонения от прямолинейных зависимостей (рис. 11) можно объяснить двухфакторной зависимостью энергетических критериев от параметров $p1$ и $p2$, т. е. близости дефектов от центра и наличия симметрии (или расстояния геометрического центра дефектов от начала координат и среднего расстояния между дефектами).

Заключение. В результате анализа влияния точечных дефектов на глобальную нелинейную динамику КА для скалярного волнового уравнения выявлено, что на начальном этапе расчета имеет место диссипация энергии системы. Затем происходит консервация процесса, т. е. «энергия» сохраняется (с точностью до вычислительной погрешности).

Для возмущенной системы происходят осцилляции «энергии», причем их амплитуда, хотя и коррелирует с числом дефектов, но зависит больше от суммы расстояний дефектов до центральной точки. Таким образом, схема КА, наследованная из схемы Кранка — Николсон, сохраняет интегральные свойства решения, что сопровождается фазовым сдвигом возмущенного решения по отношению к невозмущенному.

Отклонения от прямолинейных зависимостей на рис. 9, 11 объясняются двухфакторной зависимостью энергетических критериев от параметров $p1$ и $p2$, т. е. близости дефектов от центра и наличия симметрии (или расстояния геометрического центра дефектов от начала координат и среднего расстояния между дефектами).

С точки зрения математической теории рассмотрено взаимодействие нескольких локальных неоднородностей (точечных дефектов первого рода) на базе линейного уравнения (однородной структуры, обладающей линейностью ЛФП). Найдены как модулированные колебания, так и квазипериодические. При этом даже для десяти дефектов в системе не наблюдается режим обострения или катастрофы.

Работа выполнена при поддержке гранта № 17-07-00570А Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Стемпковский А.Л. Отказоустойчивые архитектуры микроэлектронных вычислительных систем. *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2001, т. 2, № 3, с. 40–50.

[2] Араманович И.Г., Левин В.И. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1969, с. 139–143.

[3] Красников Г.Я., Зайцев Н.А., Матюшкин И.В., Коробов С.В. Особенности визуализации клеточных автоматов в области наноэлектроники. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2012, т. 4, № 4, с. 735–756.

[4] Ванаг В.К. Исследование пространственно распределенных динамических систем методами вероятностного клеточного автомата. *Успехи физических наук*, 1999, т. 169, № 5, с. 481–505.

[5] Сиковский Д.Ф. *Методы вычислительной теплофизики*. Новосибирск, Новосибирский государственный университет, 2013, с. 57.

[6] Гаврилов С.В., Матюшкин И.В. Статистический анализ блочно-поворотного механизма Марголуса в клеточно-автоматной модели диффузии в среде с дискретными особенностями. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2015, т. 7, № 6, с. 1155–1175.

Статья поступила в редакцию 18.05.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Матюшкин И.В., Заплетина М.А. Влияние точечных дефектов структуры клеточно-автоматного вычислителя на решение 2D скалярного волнового уравнения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 3, с. 3–19.

Матюшкин Игорь Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры проектирования и конструирования интегральных микросхем Национального исследовательского университета «МИЭТ», ведущий научный сотрудник Института проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук (ИППМ РАН). Автор около 90 печатных работ и одной монографии. Область научных интересов: метаматематика, математическое моделирование, клеточные автоматы, технология микроэлектроники. e-mail: imatyushkin@mikron.ru

Заплетина Мария Андреевна — магистрант Национального исследовательского университета «МИЭТ», инженер-исследователь ИППМ РАН. Область научных интересов: технология разработки программного обеспечения, математическое моделирование, клеточные автоматы. e-mail: zapletina_mariya@mail.ru

Influence of point defects in the structure of a cellular-automaton calculator on the solution of a 2D scalar wave equation

© I.V. Matyushkin[1, 2], M.A. Zapletina[1, 2]

[1]Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS), Moscow, Zelenograd, 124365, Russia
[2]National Research University of Electronic Technology (MIET) Moscow, Zelenograd, 124498, Russia

The study analyzed the influence of artificially introduced local inhomogeneities (defects) on the dynamics of the cellular-automaton solution of the scalar wave equation. We used a cellular-automaton scheme, which is taken from the Crank-Nicolson mesh scheme. To estimate the relationship between the perturbed and unperturbed solutions, we introduced an integral characteristic of the "energy" of the cellular automaton field. The computational experiment showed that, despite the oscillation phase drift, the average "energy" and its deviation are conserved, and the solution is not destroyed. Findings of the research show that the "energy" deviation is proportional to the total distance of the defects to the symmetry center.

Keywords: *cellular automaton, wave equation, local inhomogeneities, persistence, fault tolerance, hexagonal mesh*

REFERENCES

[1] Stempkovskiy A.L. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitelnye sistemy — Journal of Information Technologies and Computing Systems*, 2001, vol. 2, no. 3, pp. 40–50.

[2] Aramanovich I.G., Levin V.I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969, pp. 139–143.

[3] Krasnikov G.Ya., Zaytsev N.A., Matyushkin I.V., Korobov S.V. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie — Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 735–756.

[4] Vanag V.K. *Uspekhi fizicheskikh nauk — Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)*, 1999, vol. 169, no. 5, pp. 481–505.

[5] Sikovskiy D.F. *Metody vychislitelnoy teplofiziki* [Methods of Computational Thermophysics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univrsity Publ., 2013, p. 57.

[6] Gavrilov S.V., Matyushkin I.V. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie — Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 1155–1175.

Matyushkin I.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Design and Construction of Integrated Circuits, National Research University of Electronic Technology (MIET), Leading Research Fellow, Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS). Author of about 90 publications and one monograph. Research interests include metamathematics, mathematical modeling, cellular automaton, microtechnology. e-mail: imatyushkin@mikron.ru

Zapletina M.A., Master's Degree student, National Research University of Electronic Technology (MIET), Research Engineer, Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS). Research interests include software engineering, mathematical modeling, cellular automaton.
e-mail: zapletina_mariya@mail.ru