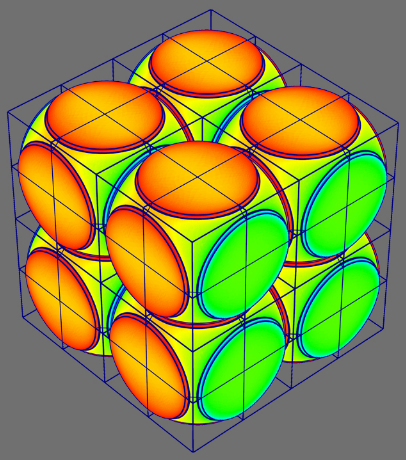
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. «Смешанные» стохастические модели двусторон- них боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон. Математическое моделирование и численные методы , 2017, No 2, с. 107–123.

УДК 519.8

«Смешанные» стохастические модели двусторонних боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны стохастические «смешанные» модели двусторонних боевых действий и численный алгоритм, позволяющий определить основные показатели боя многочисленных группировок. Показано, что упреждающий удар одной из противоборствующих сторон оказывает существенное влияние на исход и основные показатели боя достаточно близких по силам группировок. Установлено, что на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил сторон, а не их начальные численности, причем эти ошибки растут с увеличением времени нанесения упреждающего удара.

Ключевые слова: *непрерывный марковский процесс, модели двусторонних боевых действий, боевые единицы, эффективные скорострельности, параметр начального соотношения сил, упреждающий удар*

Введение. На начальных этапах проектирования технических систем, как правило, необходимо поставить задачу разработки математической модели их функционирования [1, 2]. В основе оценки разрабатываемых образцов вооружения и военной техники — показатели их боевой эффективности, позволяющие оценить степень их приспособленности к решению конкретных боевых задач [3]. В качестве такой оценки необходимо использовать модель двусторонних боевых действий, так как она позволяет более полно и достоверно учесть тактико-технические характеристики систем вооружения, влияющие на эффективность в реальных боевых условиях, в отличие от модели без учета ответного огня [4].

Один из возможных способов отображения процесса боевых действий многочисленных группировок — метод динамики средних. Построение моделей этого типа основано на следующем допущении. Согласно закону больших чисел, количество сохранившихся боевых единиц каждой стороны в любой момент времени боя близко к своему среднему (математическому ожиданию), что позволяет не учитывать подробности, связанные со случайным состоянием каждой участвующей в бою единицы (поражена или нет), и рассматривать процесс боевых действий как детерминированный [5–8]. При этом допущении все показатели боя (время протекания боя, расход боеприпасов и др.) не являются случайными величинами и заменяются своими математическими ожиданиями.

Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [9]. Также применяется прием, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским. Выстрел, поразивший боевую единицу противника, назовем успешным [3, 9].

Однако замена случайных величин их математическими ожиданиями может привести к существенным ошибкам даже при описании боя многочисленных группировок [10–13], поэтому в качестве основы оценки боевой эффективности разрабатываемых образцов вооружения и военной техники целесообразно использовать вероятностные модели двусторонних боевых действий. Вероятностные модели боя значительно сложнее детерминированных, их сложность существенно возрастает с увеличением начальных численностей противоборствующих группировок. Однако учитывая стохастический характер процесса протекания боевых действий, с использованием таких моделей можно описать бой со значительно большей степенью точности и полноты, чем модели динамики средних, а также более достоверно исследовать основные показатели боя. Кроме того, вероятностные модели боя позволяют исследовать возможность использования моделей динамики средних для отображения конкретных боевых ситуаций [11–12].

Один из возможных способов отображения боевых действий — применение теории непрерывных марковских процессов [14]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [15]. Поток выстрелов и поток успешных выстрелов, осуществляемых каждой боевой единицей, также считаются пуассоновскими.

В настоящее время существуют детерминированные и вероятностные модели «высокоорганизованного» боя, когда противоборствующие стороны имеют полную и незапаздывающую информацию о состоянии боевых единиц противника (поражены или нет) и ведут огонь только по уцелевшим единицам [6, 16–22], а также детерминированные и вероятностные модели «плохо организованного» боя, при которых противоборствующие стороны такой информации не имеют и ведут равномерный огонь как по пораженным, так и по уцелевшим единицам противника [6, 23].

Вместе с тем определенный интерес представляет так называемая смешанная модель боя, когда одна из противоборствующих сторон имеет информацию о состоянии боевых единиц противника, а другая сторона такой информации не имеет. Детерминированные модели этого типа рассмотрены в работах [24, 25]. В статье [26] представлена «смешанная» вероятностная модель боевых действий при одновременном открытии огня обеими сторонами. Цель настоящей работы — исследование «смешанной» вероятностной модели боя многочисленных группировок при упреждающем ударе одной из сторон.

Описание процесса протекания боя. Допустим, в начале боя сторона X имеет m однотипных боевых единиц, а сторона Y — n однотипных боевых единиц, необязательно однородных с единицами стороны X. При этом сторона X имеет полную и незапаздывающую информацию о состоянии боевых единиц противника (поражены или нет) и ведет огонь только по уцелевшим единицам. У стороны Y такая информация отсутствует, она ведет равномерный огонь как по уничтоженным, так и по непораженным единицам стороны X.

Введем следующие обозначения: p_x, p_y — вероятности поражения боевой единицы противника одним выстрелом единицы сторон X и Y соответственно; λ_x, λ_y — практические скорострельности боевых единиц сторон X и Y соответственно; $v = p_x\lambda_x$, $u = p_y\lambda_y$ — эффективные скорострельности боевых единиц сторон X и Y.

Полагаем, что хорошая маскировка боевых единиц стороны X позволяет им в течение времени t_c вести огонь по противнику, не испытывая ответного противодействия. Тогда в течение времени $t_c (t \in [0, t_c])$ динамику боя опишется системой уравнений

$$\begin{cases} F'_{m0}(t) = mvF_{m1}(t); \\ F'_{mj}(t) = mv\left[F_{m,j+1}(t) - F_{mj}(t)\right]; \quad j = 1, ..., n-1; \\ F'_{mn}(t) = -mvF_{mn}(t); \\ F'_{ij}(t) = 0 \quad \text{при} \begin{cases} i = 0, ..., m-1; \\ j = 0, ..., n \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} F_{mn}(0) = 1; \\ F_{ij}(0) = 0 \ \text{ при } \ i + j < m + n, \end{cases} \tag{2}$$

где $F_{ij}(t)$, $F'_{ij}(t)$ — вероятности того, что в момент времени t сохранятся i единиц стороны X и j единиц стороны Y и их производные по времени; $i = 0, ..., m$, $j = 0, ..., n$.

При постоянных в течение боя величинах u и v в момент t_c открытия стороной Y ответного огня получаем следующие вероятности состояний системы:

$$\begin{cases} F_{m0}(t_c) = 1 - \sum_{i=1}^{n} F_{mj}(t_c) = c_0; \\ F_{m1}(t_c) = \dfrac{b^{n-1}}{(n-1)!} e^{-b} = c_1; \\ F_{mj}(t_c) = \dfrac{b^{n-j}}{(n-j)!} e^{-b} = c_j, \ j = 2, ..., n-1; \\ F_{mn}(t_c) = e^{-b} = c_n; \\ F_{ij}(t_c) = 0 \quad \text{при} \ \begin{cases} i = 0, ..., m-1; \\ j = 0, ..., n. \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $b = mvt_c = \dfrac{n\overline{t_c}}{æ}$; $\overline{t_c} = \sqrt{uv}t_c$ — приведенное время упреждающего удара; $æ = \dfrac{n}{m}\sqrt{\dfrac{u}{v}}$ — параметр начального соотношения сил.

Дальнейшее протекание боя опишется системой уравнений

$$\begin{cases} F'_{i0}(t) = ivF_{i1}(t) \qquad \text{при} \ i = 1, ..., m; \\ F'_{0j}(t) = \dfrac{ju}{m} F_{1j}(t) \quad \text{при} \ j = 1, ..., n; \\ F'_{ij}(t) = -\left(iv + \dfrac{iju}{m}\right) F_{ij}(t) + ivF_{i,j+1}(t) + \dfrac{(i+1)ju}{m} F_{i+1,j}(t) \\ \qquad \text{при} \ \ i = 1, ..., m-1; \ \ j = 1, ..., n-1; \\ F'_{mj}(t) = -(mv + ju)F_{mj}(t) + mvF_{m,j+1}(t) \qquad \text{при} \ j = 1, ..., n-1; \\ F'_{in}(t) = -\left(iv + \dfrac{inu}{m}\right) F_{in}(t) + \dfrac{(i+1)nu}{m} F_{i+1;n}(t) \ \text{при} \ i = 1, ..., m-1; \\ F'_{mn}(t) = -(mv + nu)F_{mn}(t) \end{cases} \tag{4}$$

с начальными условиями (3).

Если в течение времени t_c упреждающий удар наносит сторона Y, то в течение времени t_c ($t \in [0, t_c]$) процесс протекания боя опишется системой уравнений

$$\begin{cases} F'_{0n}(t) = \dfrac{nu}{m} F_{1n}(t); \\ F'_{in}(t) = -\dfrac{inu}{m} F_{in}(t) + \dfrac{(i+1)nu}{m} F_{i+1,\dots,n}(t); \; i = 1, \dots, m-1; \\ F'_{mn}(t) = -nuF_{mn}(t); \\ F'_{ij}(t) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} 0 \le i \le m; \\ 0 \le j \le n-1 \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

с начальными условиями (2).

В момент времени t_c открытия стороной X ответного огня получаем:

$$\begin{cases} F_{0n}(t_c) = (1-a)^m = d_0; \\ F_{1n}(t_c) = ma(1-a)^{m-1} = d_1; \\ F_{in}(t_c) = C_m^i a^i (1-a)^{m-i} = d_i, \; i = 2, \dots, m-1; \\ F_{mn}(t_c) = a^m = d_m; \\ F_{ij}(t_c) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} 0 \le i \le m; \\ 0 \le j \le n-1, \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

где $a = e^{-\frac{nu}{m}t_c} = e^{-æ\bar{t}_c}$; $C_m^i = \dfrac{m!}{i!(m-i)!}$.

Дальнейшее протекание боя тогда опишется системой уравнений (4) с начальными условиями (6).

Отметим, что для исследуемой модели $1:n$ (одна единица стороны X против произвольного числа единиц стороны Y) бой протекает так же, как «высокоорганизованный» [11], а бой $m:1$ — так же, как «плохо организованный» бой [23], поскольку, если противник представлен в начале боя только одной боевой единицей, перенос огня не осуществляется.

Формулы для вычисления основных показателей таких боев приведены в работах [11] и [23]. К ним в первую очередь относятся вероятности побед P_{0x} и P_{0y} и математические ожидания M_x и M_y относительных количеств сохранившихся к концу боя боевых единиц сторон X и Y соответственно.

Для боя $m:n$ эти величины вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{0x} &= \sum_{i=1}^{m} F_{i0}(\infty); \\ P_{0y} &= \sum_{j=1}^{n} F_{0j}(\infty); \\ M_x &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} iF_{i0}(\infty); \\ M_y &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jF_{0j}(\infty). \end{aligned} \tag{7}$$

Для исследуемой в настоящей статье модели боя авторами были получены расчетные формулы, позволяющие вычислить основные показатели боя «2:2» при постоянных эффективных скорострельностях боевых единиц сторон (т. е. $u = \text{const}$, $v = \text{const}$).

При упреждающем ударе стороны X получаем:

$$\begin{cases} F_{10}(\infty) = c_1 A_1 + c_2 A_2; \\ F_{20}(\infty) = c_0 + c_1 A_3 + c_2 A_4; \\ F_{01}(\infty) = \dfrac{u}{2v} F_{10}(\infty); \\ F_{02}(\infty) = c_2 A_5; \\ F_{11}(\infty) = F_{12}(\infty) = F_{21}(\infty) = F_{22}(\infty) = 0, \end{cases}$$

а при упреждающем ударе стороны Y

$$\begin{cases} F_{10}(\infty) = d_1 A_6 + d_2 A_2; \\ F_{20}(\infty) = d_2 A_4; \\ F_{01}(\infty) = \dfrac{u}{2v} F_{10}(\infty); \\ F_{02}(\infty) = d_0 + d_1 A_7 + d_2 A_5; \\ F_{11}(\infty) = F_{12}(\infty) = F_{21}(\infty) = F_{22}(\infty) = 0, \end{cases}$$

где $F_{ij}(\infty)$ — вероятности того, что к концу боя сохраняется i единиц стороны X и j единиц стороны Y.

Здесь также

$$c_2 = e^{-\frac{2\overline{t}_c}{æ}};\ c_1 = \frac{2\overline{t}_c}{æ} e^{-\frac{2\overline{t}_c}{æ}};\ c_0 = 1 - c_1 - c_2;$$

$$d_2 = e^{-2æ\overline{t}_c};\ d_1 = 2e^{-æ\overline{t}_c}(1 - e^{-æ\overline{t}_c});\ d_0 = 1 - d_1 - d_2;$$

$$A_1 = \frac{2vu}{(2v+u)^2};\ A_2 = 2vu\left(\frac{1}{(v+u)^2} - \frac{1}{(2v+u)^2}\right);$$

$$A_3 = \frac{2v}{2v+u};\ \ A_4 = \frac{2v^2}{(v+u)(2v+u)^2};$$

$$A_5 = \frac{u^2}{(v+u)^2};\ \ A_6 = \frac{A_4}{2};\ \ A_7 = \frac{2u}{(v+2u)}.$$

Кроме того

$$\begin{cases} P_{0x} = F_{10}(\infty) + F_{20}(\infty); \\ P_{0y} = F_{01}(\infty) + F_{02}(\infty); \\ M_x = \dfrac{1}{2}F_{10}(\infty) + F_{20}(\infty); \\ M_y = \dfrac{1}{2}F_{01}(\infty) + F_{02}(\infty). \end{cases} \tag{8}$$

Для исследования боев более многочисленных группировок авторами был разработан численный алгоритм, позволяющий вычислить основные показатели этих боев. При описании боя с помощью модели динамики средних получаем следующие результаты [25]. Если упреждающий удар наносит сторона X, то при $æ < \sqrt{2} + \bar{t}_c$ она одержит победу. При этом

$$\begin{cases} M_x = 1 - \dfrac{(æ - \bar{t}_c)^2}{2}; \\ M_y = 0. \end{cases} \tag{9}$$

При $æ > \sqrt{2} + \bar{t}_c$ победу одержит сторона Y, тогда

$$\begin{cases} M_x = 0; \\ M_y = \dfrac{\sqrt{(æ - \bar{t}_c)^2 - 2}}{æ}. \end{cases} \tag{10}$$

Значение $æ_0 = \sqrt{2} + \bar{t}_c$ соответствует равенству сил, иными словами, к концу боя обе стороны будут полностью уничтожены $(M_x = M_y = 0)$.

Если упреждающий удар наносит сторона Y, то при $æ_1 = æe^{\frac{æ\bar{t}_c}{2}} < \sqrt{2}$ победу одержит сторона X, тогда

$$\begin{cases} M_x = e^{-æ\bar{t}_c} - \dfrac{æ^2}{2}; \\ M_y = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Если $æ_1 = æe^{\frac{æ\overline{t_c}}{2}} > \sqrt{2}$, победу одержит сторона Y, при этом

$$\begin{cases} M_x = 0; \\ M_y = \sqrt{1 - \dfrac{2}{æ^2 e^{æ\overline{t_c}}}}. \end{cases} \qquad (12)$$

Граничное значение $æ_0$ параметра начального соотношения æ, соответствующее равенству сил, находим как решение уравнения $æe^{\frac{æ\overline{t_c}}{2}} = \sqrt{2}$.

Анализ результатов расчетов. На основе формул (1)–(12), а также с использованием разработанного численного алгоритма проведены расчеты основных показателей боя для разных начальных численностей группировок и значений параметра соотношения сил æ при приведенном времени упреждающего удара $\overline{t_c} = 0,5$. Значение $\overline{t_c} = 0,5$ соответствует проведению атаки боевыми единицами стороны, которая наносит один-два выстрела, не испытывая при этом противодействия противника, так как при использовании современных средств обнаружения после проведения одного-двух выстрелов боевая единица, как правило, будет обнаружена и по ней будет открыт ответный огонь. Результаты расчетов отражены на рис. 1–3. Красными и синими линиями показаны значения M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к концу боя единиц сторон X и Y соответственно для разных начальных численностей группировок в зависимости от параметра соотношения сил æ, полученные на основе разработанных авторами вероятностных моделей боя. Зелеными и черными линиями показаны значения M_x и M_y, найденные методом динамики средних.

Рис. 1 соответствует равным начальным численностям противоборствующих группировок $(m = n)$, рис. 2 — ситуации, когда начальные численности стороны Y в 5 раз превосходят начальные численности стороны X $(n = 5m)$. На рис. 3 показаны ситуации, когда начальные численности стороны X в 5 раз превосходят начальные численности стороны Y $(m = 5n)$. Рис. 1, *а*, 2, *а* и 3, *а* соответствуют упреждающему удару стороны X, а рис. 1, *б*, 2, *б* и 3, *б* — стороны Y. Результаты вычислений основных показателей боя при одновременном открытии огня обеими сторонами приведены в работе [26].

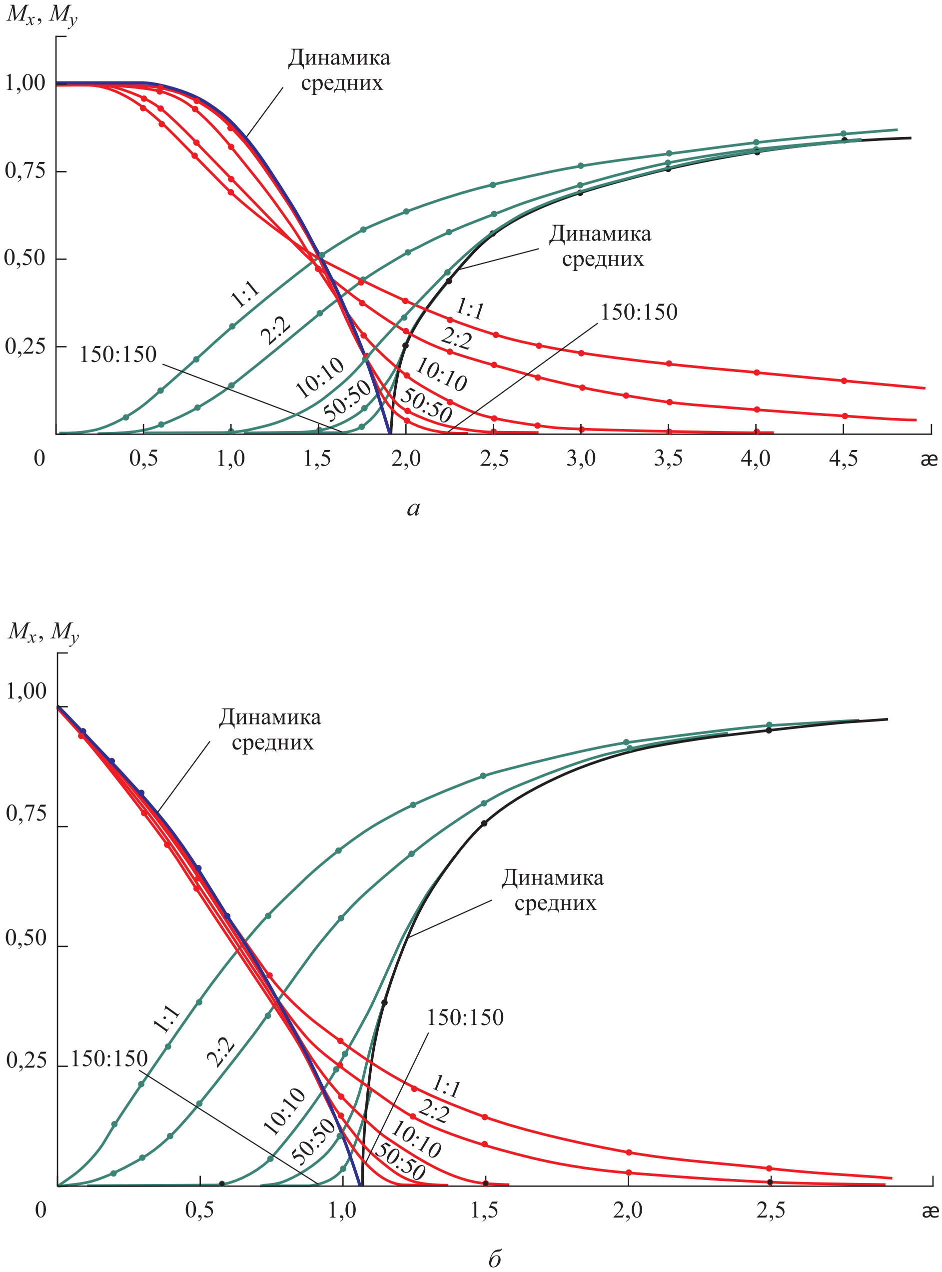
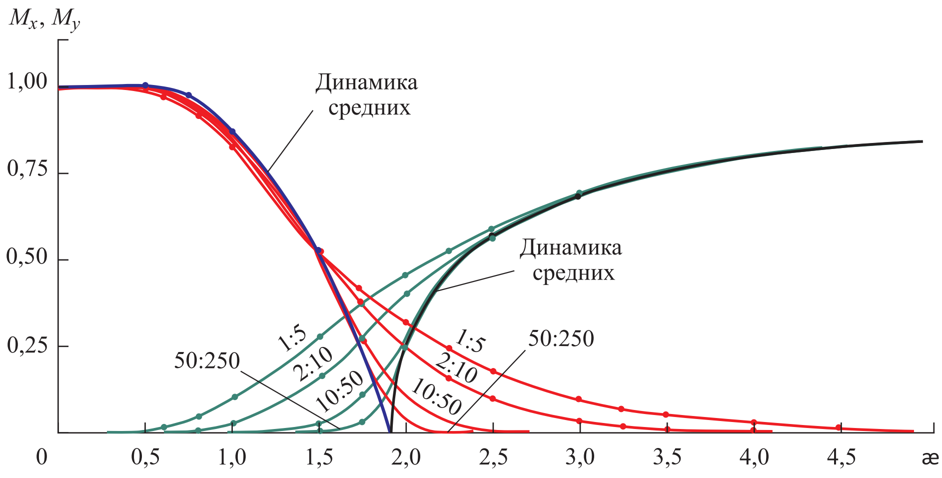
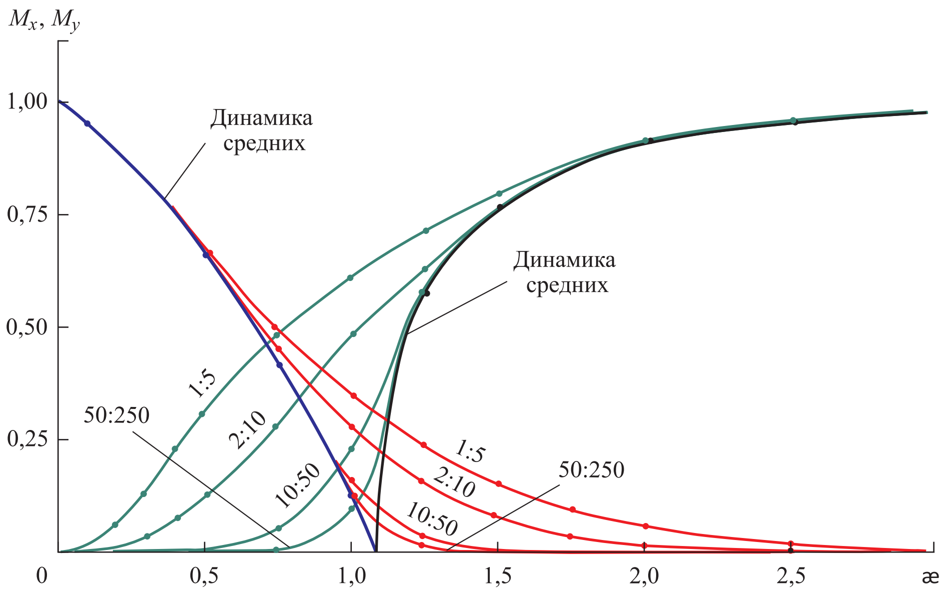


Рис. 1. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя $(n = m)$ при упреждающем ударе сторон:

а — $X(\overline{t_c} = 0,5)$; *б* — $Y(\overline{t_c} = 0,5)$



а



б

Рис. 2. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя $(n = 5m)$ при упреждающем ударе сторон:

а — $X(\overline{t_c} = 0,5)$; *б* — $Y(\overline{t_c} = 0,5)$

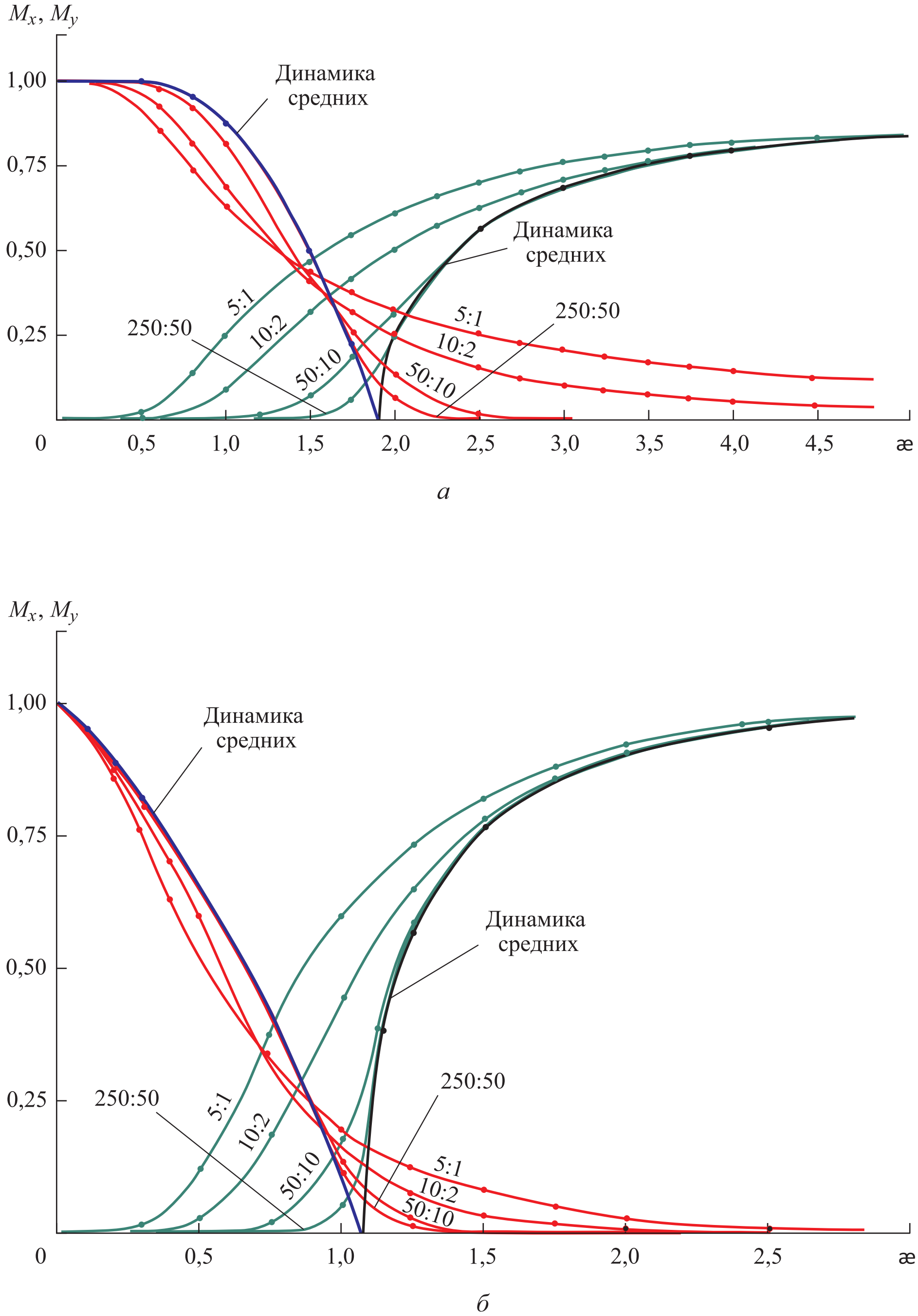


Рис. 3. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя $(m = 5n)$ при упреждающем ударе сторон:

а — $X(\overline{t_c} = 0,5)$; *б* — $Y(\overline{t_c} = 0,5)$

Согласно результатам расчетов, наличие информации о состоянии боевых единиц одной стороны при ее отсутствии у другой стороны существенно повышает боевые возможности группировки с пропорциональным увеличением начальных численностей противоборствующих сторон. Так, например, при упреждающем ударе стороны X в течение приведенного времени $\overline{t_c} = 0,5$ при параметре начального соотношения сил $æ = 1,5$ для боя «2:2» получаем $M_x = 0,468$, $M_y = 0,345$, $P_{0x} = 0,556$, $P_{0y} = 0,444$. В то же время для боя «50:50» при тех же значениях æ и $\overline{t_c}$ получаем $M_x = 0,480$, $M_y = 0,004$, $P_{0x} = 0,984$, $P_{0y} = 0,016$. При упреждающем ударе стороны Y при $æ = 0,75$ и $\overline{t_c} = 0,5$ для боя «5:1» получаем $M_x = 0,334$, $M_y = 0,370$, $P_{0x} = 0,630$, $P_{0y} = 0,370$, а для боя «50:10» — $M_x = 0,379$, $M_y = 0,007$, $P_{0x} = 0,983$, $P_{0y} = 0,017$.

Упреждающий удар одной из противоборствующих сторон оказывает существенное влияние на исход и основные показатели боя достаточно близких по силам группировок, причем это преимущество возрастает при пропорциональном увеличении начальных численностей сторон. Так, например, при $æ = 1,5$ для боев «50:50», «25:125» и «250:50» при упреждающем ударе стороны X и $\overline{t_c} = 0,5$ вероятность ее победы близка к единице, а для тех же боев при упреждающем ударе стороны Y при $\overline{t_c} = 0,5$ близка к единице вероятность победы этой стороны.

Упреждающий удар в совокупности с наличием информации о состоянии боевых единиц противника при отсутствии таковой у противоборствующей стороны может повысить боевые возможности группировки почти в 2 раза. Так, для боя «100:100» при упреждающем ударе стороны X при $æ = 1,87$ и $\overline{t_c} = 0,5$ получаем $M_x = 0,109$, $M_y = 0,110$, $P_{0x} = 0,595$, $P_{0y} = 0,405$. Для боя «200:200» при $æ = 1,91$, $\overline{t_c} = 0,5$ вероятность победы стороны X выше вероятности победы ее противника ($P_{0x} = 0,502$; $P_{0y} = 0,498$).

Кроме того, упреждающий удар стороны, не имеющей информации о состоянии боевых единиц противника, при наличии таковой у противоборствующей стороны может практически свести на нет преимущество, которое дает наличие этой информации. Так, для боя «25:25» при упреждающем ударе стороны Y при $æ = 1,0$, $\overline{t_c} = 0,5$ получаем $M_x = 0,136$, $M_y = 0,167$, а для боя «50:50» при $æ = 1,0$, $\overline{t_c} = 0,5$ — $M_x = 0,112$, $M_y = 0,115$.

При одновременном открытии огня обеими сторонами при $æ = 1$ для «высокоорганизованного» боя «50:50» получаем $M_x = M_y = 0{,}196$, $P_{0x} = P_{0y} = 0{,}5$, а для боя «100:100» — $M_x = M_y = 0{,}167$, $P_{0x} = P_{0y} = 0{,}5$ [10], для «плохо организованного» боя «50:50» — $M_x = M_y = 0{,}080$, $P_{0x} = P_{0y} = 0{,}5$, для боя «100:100» — $M_x = M_y = 0{,}056$, $P_{0x} = P_{0y} =$ $= 0{,}5$ [11].

Также отметим, что использование моделей динамики средних приводит к существенным ошибкам в вычислении основных показателей боя достаточно близких по силам группировок даже при достаточно больших их начальных численностях. Так, ошибки при вычислении M_x и M_y составляют более 10 % для боев «100:100» при упреждающем ударе стороны X, $æ = 1{,}9$, а также при упреждающем ударе стороны Y, $æ = 1{,}05$. Причиной этих ошибок является достаточно высокая вероятность победы обеих сторон, превышающая 0,4.

При существенном превосходстве одной из противоборствующих сторон (при $æ > 3$ или $æ < 0{,}75$ при упреждающем ударе стороны X для $\overline{t_c} = 0{,}5$, а также при $æ > 2$ или $æ < 0{,}5$ при упреждающем ударе стороны Y для $\overline{t_c} = 0{,}5$) можно использовать модель динамики средних для исследования боя даже небольших по численности группировок. Если каждая из противоборствующих сторон имеет в начале боя не менее 10 боевых единиц, ошибка в вычислении M_x и M_y не превышает 2 %.

Выводы. Таким образом, по результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

1. На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны вероятностные «смешанные» модели двусторонних боевых действий при упреждающем ударе одной из противоборствующих сторон, позволяющие вычислить основные показатели боя многочисленных группировок.

2. Установлено, что наличие информации о состоянии боевых единиц противника при отсутствии таковой у противоборствующей стороны существенно (почти до 1,5 раза) при достаточно больших начальных численностях сторон повышает возможности группировки.

3. Показано, что упреждающий удар одной из противоборствующих сторон приводит к значительным изменениям основных показателей боя достаточно близких по силам группировок, причем эти изменения существенно возрастают одновременно с пропорциональным ростом начальных численностей противоборствующих сторон. При значительном превосходстве одной стороны упреждающий удар приводит только к заметному изменению потерь победителя.

4. Показано, что наличие информации о состоянии боевых единиц противника при ее отсутствии у противоборствующей стороны в совокупности с упреждающим ударом может увеличить боевые возможности достаточно большой по численности группировки почти в 2 раза.

5. Также показано, что упреждающий удар стороны, не имеющей информации о состоянии боевых единиц противника при наличии таковой у противоборствующей стороны, может почти полностью компенсировать отсутствие этой информации в бою достаточно больших по численности группировок.

6. Установлено, что на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих группировок, а не их начальные численности. Использование модели динамики средних приводит к значительным ошибкам в вычислении основных показателей боя, близких по силам группировок, даже при больших их начальных численностях. При значительном превосходстве одной из участвующих в бою сторон использование моделей динамики средних приводит к небольшим ошибкам в вычислениях показателей боя даже небольшого количества единиц.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[2] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1 (1), с. 3–4.

[3] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[4] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[5] Дубограй И.В., Дьякова Л.Н., Чуев В.Ю. Учет упреждающего удара при моделировании двухсторонних боевых действий. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/842.html (дата обращения 15.10.2017).

[6] Lanchester F. *Aircraft in warfare: the dawn of the fourth arm*. London, Constable and Co, 1916, 243 p.

[7] Taylor J.G. Dependence of the parity-condition parameter on the combatintensity parameter for Lanchester-type equations of modern warfare. *Operations-Research-Spectrum*, 1980, vol. 1 (3), pp. 199–205.

[8] Chen X., Jing Y., Li C., Li M. Warfare command stratagem analysis for winning based on Lanchester attrition models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.

[9] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы и методология*. Москва, УРСС, 2006, 432 с.

[10] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 2, с. 53–62.
[11] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастизм и детерминизм при моделировании двухсторонних боевых действий. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017, № 4, с. 16–28.
[12] Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011. Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 223–232.
[13] Winston W.L. *Operations research: applications and algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.
[14] Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. *Марковские модели боя*. Москва, Министерство обороны СССР, 1985, 85 с.
[15] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, КноРус, 2016, 658 с.
[16] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель дуэльного боя с переменными эффективными скорострельностями. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение*, 2016, № 3, с. 118–124.
[17] Дубограй И.В., Чуев В.Ю. Дискретная марковская модель двухстороннего боя многочисленных группировок. *Наука и образование*, 2013, № 10, DOI 10.7463/1013.0617171
[18] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастические модели дуэльного боя двух единиц. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2 (10), с. 69–84.
[19] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to operations research*. New York, MeGrew-Hill, 2005, 998 p.
[20] Jaswall N.K. *Military Operations research: quantitative decision making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.
[21] Taylor J.G. *Force-on-forceattrition modeling.* Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.
[22] Shamahan L. *Dynamics of model battles.* New York, Physics Department, State University of New York, 2005, pp. 1–43.
[23] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 89–104.
[24] Пашков Н.Ю., Строгалев В.П., Чуев В.Ю. Смешанная модель динамики средних для многочисленных группировок. *Оборонная техника*, 2000, № 9–10, с. 19–21.
[25] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. *Модели динамики средних двухсторонних боевых действий многочисленных группировок*. LAPLAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 c.
[26] Чуев В.Ю., Дубограй И.В., Дьякова Л.Н. «Смешанные» вероятностные модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 91–101.

Статья поступила в редакцию 02.05.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. «Смешанные» стохастические модели двусторонних боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 107–123.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

“Mixed” stochastic models of reciprocal hostilities for the case of one belligerent performing a pre-emptive strike

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubogray

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

We used the theory of continuous-time Markov processes as the basis for developing our stochastic “mixed” models of reciprocal hostilities and a numerical algorithm that makes it possible to compute main combat metrics for large forces. We show that a pre-emptive strike performed by one of the belligerents significantly affects the outcome and main metrics of combat between forces that are sufficiently similar in strength. We determine that it is not the initial numerical strengths of the two belligerents but their balance of power that affects errors shown by the method of dynamics of mean values; moreover, the errors increase with increasing the time to a pre-emptive strike.

Keywords: *continuous-time Markov process, models of reciprocal hostilities, combat units, effective rates of fire, parameter of the initial balance of power, pre-emptive strike*

REFERENCES

[1] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[2] Aleksandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1 (1), pp. 3–4.

[3] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Investigation of military operations]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[4] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deystviy* [Mathematical models of military operations]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 240 p.

[5] Dubogray I.V., Dyakova L.N., Chuev V.Yu. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/842.html (accessed October 15, 2017).

[6] Lanchester F. *Aircraft in warfare: the dawn of the fourth arm*. London, Constable and Co, 1916, 243 p.

[7] Taylor J.G. *Operations-Research-Spectrum*, 1980, vol. 1 (3), pp. 199–205.

[8] Chen X., Jing Y., Li C., Li M. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.

[9] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy i metodologiya* [Research operations: tasks, principles and methodology]. Moscow, URSS Publ., 2006, 432 p.

[10] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2015, no. 2, pp. 53–62.

[11] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E .Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, no. 4, pp. 16–28.

[12] Chuev V.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. Spets. vypusk “Matematicheskoe modelirovanie” — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, *Spec. issue “Mathematical Modeling”*, 2011, pp. 223–232.

[13] Winston W.L. *Operations research: applications and algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.

[14] Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov's combat models]. Moscow, the USSR Ministry of Defense, 1985, 85 p.

[15] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability Theory]. Moscow, KnoRus, 2016, 658 p.

[16] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2016, no. 3, pp. 118–124.

[17] Dubogray I.V., Chuev V.Yu. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchnoe izdanie — Scientific edition of Bauman MSTU Science and Education*, 2013, no. 10. DOI 10.7463/1013.0617171

[18] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2 (10), pp. 69–84.

[19] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to operations research*. New York, MeGrew-Hill, 2005, 998 p.

[20] Jaswall N.K. *Military Operations research: quantitative decision making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[21] Taylor J.G. *Force-on-forceattrition modeling.* Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.

[22] Shamahan L. *Dynamics of model battles.* New York, Physics Department, State University of New York, 2005, pp. 1–43.

[23] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 89–104.

[24] Pashkov N.Yu., Strogalev V.P., Chuev V.Yu. *Oboronnaya tekhnika — Defense technology*, 2000, no. 9–10, pp. 19–21.

[25] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Modeli dinamiki srednikh dvukhstoronnikh boevykh deystviy mnogochislennykh gruppirovok* [Dynamics models of the average bilateral military operations of numerous groupings]. Saarbryukken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 p.

[26] Chuev V.Yu., Dubogray I.V., Dyakova L.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1, pp. 91–101.

Chuev V.Yu., Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: irina.dubograi@yandex.ru