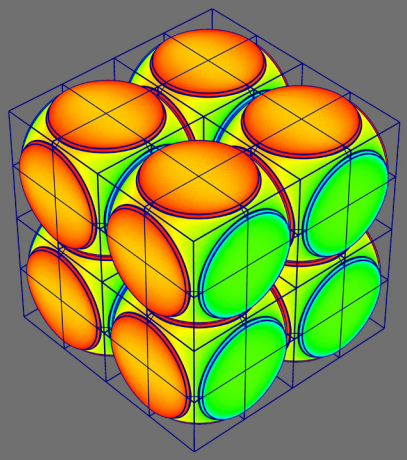
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Булгаков В.Н., Котенев В.П., Сапожников Д.А. Моделирование сверхзвуково- го обтекания затупленных конусов с учетом разрыва кривизны образующей тела. Математическое моделирование и численные методы, 2017, No 2, с. 81–93.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/135/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 10:49:54

УДК 533.6.011.5

Моделирование сверхзвукового обтекания затупленных конусов с учетом разрыва кривизны образующей тела

© В.Н. Булгаков[1], В.П. Котенев[1, 2], Д.А. Сапожников[1, 2]

[1] АО «ВПК «НПО машиностроения»,
г. Реутов, Московская обл., 143966, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена аналитическая зависимость для расчета давления на поверхности затупленных конусов, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, с учетом разрыва кривизны образующей. Для определения свободных параметров зависимости применялись генетический алгоритм и каскадные методы оптимизации функционала метода наименьших квадратов. Полученные результаты даны в сравнении со строгим численным решением невязкой задачи. Сравнение показывает, что возможно использовать аналитическую формулу для распределения давления по поверхности в широком диапазоне чисел Маха при разных углах полураствора конуса. В отличие от известных работ предлагаемая зависимость позволяет учесть разрыв кривизны образующей в точке сопряжения сферы с конической поверхностью.

Ключевые слова: *сверхзвуковой поток, разрыв кривизны образующей тела, генетический алгоритм*

Введение. Затупленный конус и сфера получили широкое распространение как элементы более сложных аэродинамических компоновок, поэтому исследованию их обтекания посвящено большое количество работ [1–5]. Так, нередко головные части летательных аппаратов представляют собой затупленные по сфере конусы с различными углами полураствора. В работах [6, 7] предпринята попытка вывести аналитические зависимости для распределения давления на затупленных конусах. На поверхности сферы такие аппроксимации получены [8–10], а на прямолинейной образующей, поскольку здесь распределение давления не является монотонным в силу разрыва кривизны в точке сопряжения сферы с конусом, предложенные ранее зависимости имеют недостатки. Например, в статье [6] имеет место нефизичный скачок давления при переходе от сферы к конусу, а в работе [7] присутствует свободный параметр, который нельзя однозначно определить для конусов с разными углами полураствора и режимами обтекания. Вместе с тем простые формулы имеют важное значение как на этапе предварительной оценки волнового сопротивления затупленных частей летательных аппаратов или тепловых потоков к их поверхности [11, 12], так и при задании начальных данных при использовании метода установления по времени для получения стационарного решения.

Цель данной работы — разработка аналитической зависимости, лишенной упомянутых выше недостатков и хорошо аппроксимирующей так называемую ложку в распределении давления на поверхности затупленных конусов, которая обусловлена наличием разрыва кривизны образующей.

Общие положения. Основной характеристикой для определения локальных нагрузок на поверхности тела является давление. Далее рассуждения строятся применительно к коэффициенту давления, определяемому по формуле

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\left(\rho_\infty V_\infty^2\right)/2},$$

где P — давление в некоторой точке на поверхности тела; P_∞, ρ_∞, V_∞ — давление, плотность и скорость набегающего потока соответственно.

Связь между давлением P_∞ набегающего потока и давлением P_0' в точке торможения устанавливается формулой Релея

$$P_0' = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \mathrm{M}_\infty^2 \left(\gamma - \frac{\gamma-1}{2\mathrm{M}_\infty^2}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} P_\infty. \qquad (1)$$

Здесь γ — показатель адиабаты (для рассматриваемого в данном случае совершенного газа $\gamma = 1{,}4$); M_∞ — число Маха набегающего потока.

С учетом (1) запишем формулу для коэффициента давления

$$C_P = \frac{2\left(P/P_\infty - 1\right)}{\gamma \mathrm{M}_\infty^2}. \qquad (2)$$

Расчет давления на поверхности затупленного конуса разобьем на две части: расчет давления на сферической части конуса при $x \in \left[-x_n; 0\right]$ и расчет давления конической части при $x \in (0; x_k]$, где координата x направлена по оси тела ($-x_n$ соответствует точке торможения; $x = 0$ — точке сопряжения сферы с прямолинейной образующей конуса; x_k — расстояние между абсциссами точек сопряжения и текущего положения на оси конуса). При стремлении x_k к бесконечности соответствующее давление асимптотически стремится к давлению острого конуса.

Расчет давления на сферической части конуса. Для определения давления на сферической части конуса воспользуемся представ-

ленным в работах [8–10] методом. Согласно [9], давление $P_{\text{сф}} = P / P_0'$ на отрезке $\left[-x_n; 0\right]$ от точки торможения до точки сопряжения сферической и конической частей конуса рассчитывается по формуле

$$\frac{P}{P_0'} = \left(\frac{1 - k\chi^2}{1 + k\chi^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \tag{3}$$

где $k = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 3} \dfrac{1}{\left(\sigma_{**} - \pi / 2\right)^2}$; σ_{**} — положение звуковой точки на поверхности сферы; $\chi = \sigma - (\pi / 2)$; σ — угол между продольной осью тела и вектором скорости в произвольной точке на поверхности сферы [9, 13].

Расчет давления конической части. В качестве основы для разработанной аналитической формулы было использовано выражение, представленное в статье [6]. Однако оно имеет ряд недостатков:

- в точке сопряжения давление справа асимптотически стремится к бесконечности;
- точка, определяющая место выхода на давление острого конуса в координатах подобия, является фиксированной;
- кривая перехода, описываемая тремя слагаемыми и отвечающая за образование локального разряжения, терпит разрывы.

Из анализа экспоненциального угасания влияния сферического затупления на распределение давления на затупленном конусе была принята формула, состоящая из двух слагаемых: первое отвечает за непрерывный переход от сферической части к конической и экспоненциальное убывание влияния сферы, второе — за нарастание влияния конической части и стремление к давлению острого конуса на бесконечности.

Таким образом, искомая формула имеет вид

$$C_{P_{\text{з.к}}} = \frac{C_{P_{\text{сф.сопр}}}}{\exp\left(\chi / (\beta_k^2 \mathrm{M}_\infty^\lambda)\right)} + C_{P_{\text{о.к}}} f^*\left(\chi^*\right). \tag{4}$$

Здесь $C_{P_{\text{з.к}}}$ — искомый коэффициент давления на затупленном конусе; $C_{P_{\text{сф.сопр}}}$ — коэффициент давления сферы в точке сопряжения с конусом, определяемый формулами (2) и (3); β_k — угол полураствора конуса; $C_{P_{\text{о.к}}}$ — коэффициент давления острого конуса; χ и χ^* — параметры гиперзвукового подобия; f^* — коэффициент перехода на давление острого конуса; $\lambda = \lambda\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$ — функция, подлежащая

определению (в формуле (4) λ является показателем степени числа Маха набегающего потока M_∞).

Параметры гиперзвукового подобия χ и χ^*, как и в статье [6], имеют следующий вид:

$$\chi = \frac{\beta_k^2 x}{2 r_{\text{сопр}} C_{x\ \text{сф}}^{1/2}}; \tag{5}$$

$$\chi^* = \frac{\left(\left(r / 2r_{\text{сопр}}\right) - 1/2\right)^2}{C_{x\ \text{сф}}^{1/2}\left(x / 2r_{\text{сопр}}\right)\left(1 - x_n / x\right)}. \tag{6}$$

Здесь $C_{x\ \text{сф}}$ — коэффициент сопротивления сферического затупления; $r = x \cdot \mathrm{tg}\left(\beta_k\right) + r_{\text{сопр}}$ — цилиндрический радиус сечения конической части тела; $r_{\text{сопр}}$ — цилиндрический радиус в точке сопряжения сферической и конической частей.

Для определения коэффициента перехода f^* модифицируем представленную в статье [6] формулу:

$$f^*\left(\chi^*\right) = \begin{cases} \dfrac{2\chi^*}{\psi} - \dfrac{\chi^{*2}}{\psi^2}, & \text{если } 0 < \chi^* < \psi; \\ 1, & \text{если } \chi^* \geq \psi. \end{cases} \tag{7}$$

Входящая в формулу (7) зависимость $\psi = \psi\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$ представляет собой координату точки выхода на значение давления для острого конуса и будет найдена ниже.

Коэффициент давления на остром конусе с хорошей точностью определяется по предложенной в работе [14] формуле

$$C_{P\ \text{о.к}} = 2\sin^2\left(\beta_k\right) e^{k_2},$$

$$k_2 = 0{,}18146 - 2{,}0923 k_1 + 9{,}092 k_1^2 + 6{,}876 k_1^3 - 62{,}25 k_1^4 - 97{,}1 k_1^5,$$

где $k_1 = 0{,}1 \cdot \lg\left(\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\left|\sin\left(\beta_k\right)\right|\right)$.

Определение свободных параметров λ и ψ. Для нахождения свободных параметров как функций от аргументов, задающих режим обтекания, использованы данные [15] распределения давления на затупленных конусах. Для этого была решена задача минимизации функционала метода наименьших квадратов (МНК) $\sum_{i=0}^{n}\left(\hat{C}_{P\,i} - C_P\left(x_i\right)\right)^2 \to \min$ кас-

кадным методом оптимизации. Здесь $\hat{C}_{P\,i}$ — известные узловые значения коэффициента давления.

Трудно сразу установить зависимости $\lambda(\psi)$ или $\psi(\lambda)$, поэтому на первом этапе велся поиск значения $\lambda_{opt} = \lambda\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k, \psi_{opt}\right)$, т. е. для каждого ψ_{opt} подбиралось λ_{opt} при заданном ψ_{opt}. Из множества пар $\left(\lambda_{opt}, \psi_{opt}\right)$ выбирали ту, которая доставляет минимум функционала МНК.

По полученным данным с применением генетического алгоритма [16] оптимизации были построены аппроксимации для функций $\lambda = \lambda\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$ и $\psi = \psi\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$:

$$F\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right) = \frac{A\left(\beta_k\right)}{\mathrm{M}_\infty^2} + \frac{B\left(\beta_k\right)}{\mathrm{M}_\infty} + C\left(\beta_k\right). \tag{8}$$

Здесь под функцией $F\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$ подразумевается либо параметр $\lambda = \lambda\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$, либо $\psi = \psi\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$.

Были получены следующие коэффициенты функции вида (8) для параметра $\lambda = \lambda\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$:

$$A\left(\beta_k\right) = 1{,}9566 \cdot 10^{-5}\beta_k^5 - 1{,}4150 \cdot 10^{-3}\beta_k^4 + 3{,}1129 \cdot 10^{-2}\beta_k^3 - \\ - 0{,}2278\beta_k^2 + 0{,}6134\beta_k + 0{,}8073,$$

$$B\left(\beta_k\right) = 4{,}0378 \cdot 10^{-6}\beta_k^5 - 1{,}8767 \cdot 10^{-4}\beta_k^4 + 3{,}2619 \cdot 10^{-3}\beta_k^3 - \\ - 0{,}0414\beta_k^2 + 0{,}4012\beta_k - 0{,}5897,$$

$$C\left(\beta_k\right) = -1{,}3609 \cdot 10^{-6}\beta_k^5 + 7{,}9441 \cdot 10^{-5}\beta_k^4 - 1{,}6380 \cdot 10^{-3}\beta_k^3 + \\ + 1{,}4268 \cdot 10^{-2}\beta_k^2 - 6{,}7042 \cdot 10^{-2}\beta_k + 0{,}3951$$

и параметра $\psi = \psi\left(\mathrm{M}_\infty, \beta_k\right)$:

$$A\left(\beta_k\right) = 6{,}3617 \cdot 10^{-6}\beta_k^5 - 5{,}1957 \cdot 10^{-4}\beta_k^4 + 1{,}2894 \cdot 10^{-2}\beta_k^3 - \\ - 0{,}1325\beta_k^2 + 0{,}7918\beta_k + 0{,}6477,$$

$$B\left(\beta_k\right) = 1{,}1983 \cdot 10^{-5}\beta_k^5 - 7{,}64 \cdot 10^{-4}\beta_k^4 + 1{,}604 \cdot 10^{-2}\beta_k^3 - \\ - 9{,}8408 \cdot 10^{-2}\beta_k^2 - 0{,}2688\beta_k + 0{,}1783,$$

$$C\left(\beta_k\right) = 3{,}3516 \cdot 10^{-6}\beta_k^4 - 1{,}9174 \cdot 10^{-5}\beta_k^3 - \\ - 7{,}7292 \cdot 10^{-3}\beta_k^2 + 0{,}1742\beta_k - 0{,}1506.$$

Все представленные выше коэффициенты были определены как функции аргумента β_k, заданного в градусах. Локализация минимума функционала $\sum_{i=0}^{n}\left(\hat{C}_{P\,i}-C_P\left(x_i\right)\right)^2$ в ортогональных координатах λ и ψ представлена на рис. 1.

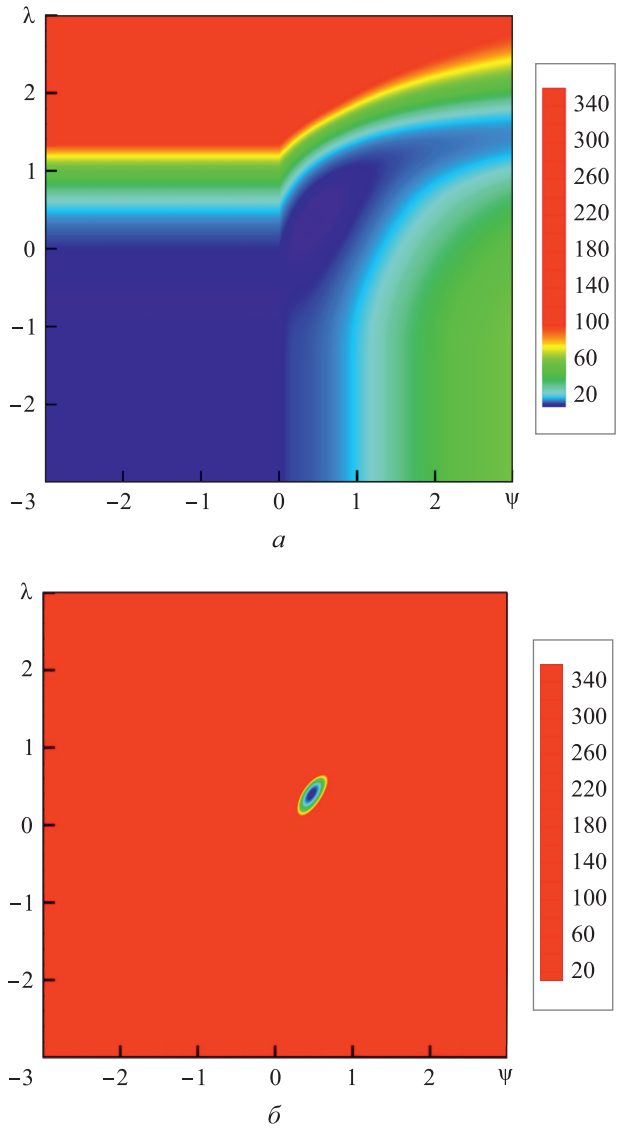
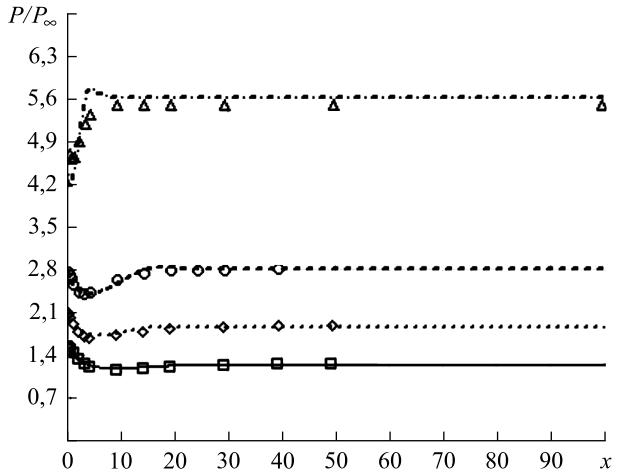


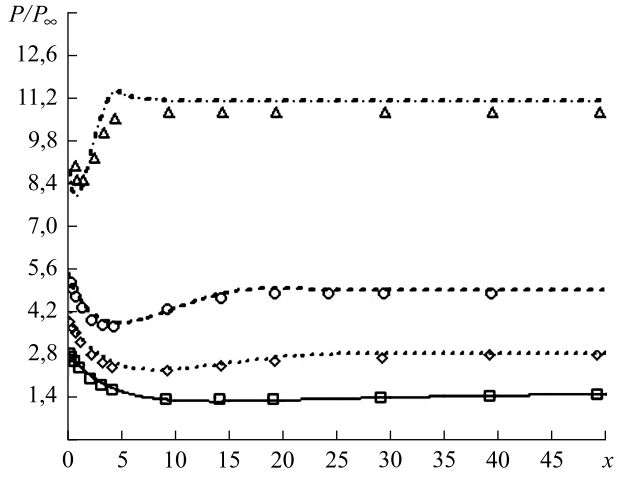
Рис. 1. Локализация минимума функционала в координатах λ и ψ

Формулы (3)–(7) наряду с аппроксимацией (8) свободных параметров λ и ψ позволяют определить давление на поверхности конуса со сферическим затуплением.

Анализ результатов. Приведем результаты применения формулы (4). На рис. 2 представлены распределения давления P/P_∞ для чисел Маха $M_\infty \geq 4$.



а



б

Рис. 2 (начало). Распределение давления P/P_∞ при M_∞, равном 4 (*а*), 6 (*б*), при угле полураствора конуса (град): ——, □ — 5; - - -, ◇ — 10; · · · ·, ○ — 15; -·-·-, △ — 25; табличные данные обозначены маркерами, данные расчетов — линиями

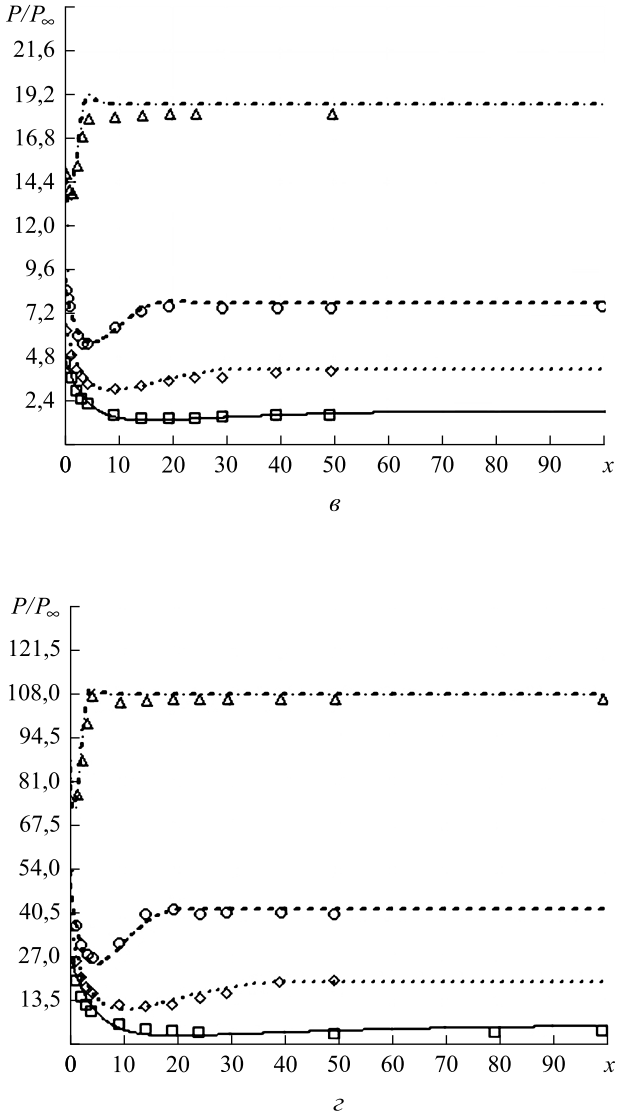


Рис. 2 (окончание). Распределение давления P/P_∞ при M_∞, равном 7 (*в*), 20 (*г*), при угле полураствора конуса (град): ——, □ — 5; - - -, ◇ — 10; ····, ○ — 15; -·-·-, △ — 25; табличные данные обозначены маркерами, данные расчетов — линиями

Сравнение результатов расчетов P/P_∞ при $M_\infty = 10$, $\beta_k = 1$ град по формуле (4) и формуле, представленной в статье [6], а также строгого численного решения системы уравнений Эйлера по приведенному в работе [17] методу показано на рис. 3, *а*. Стоит отметить, что кривая давления, построенная в статье [6], терпит разрыв значений в одной из точек переключения, что можно увидеть на рис. 3, *б*

в сравнении с результатами расчета по формуле (4) и табличными данными [15] при $M_\infty = 8$ и $\beta_k = 15$ град, а также в работе [17].

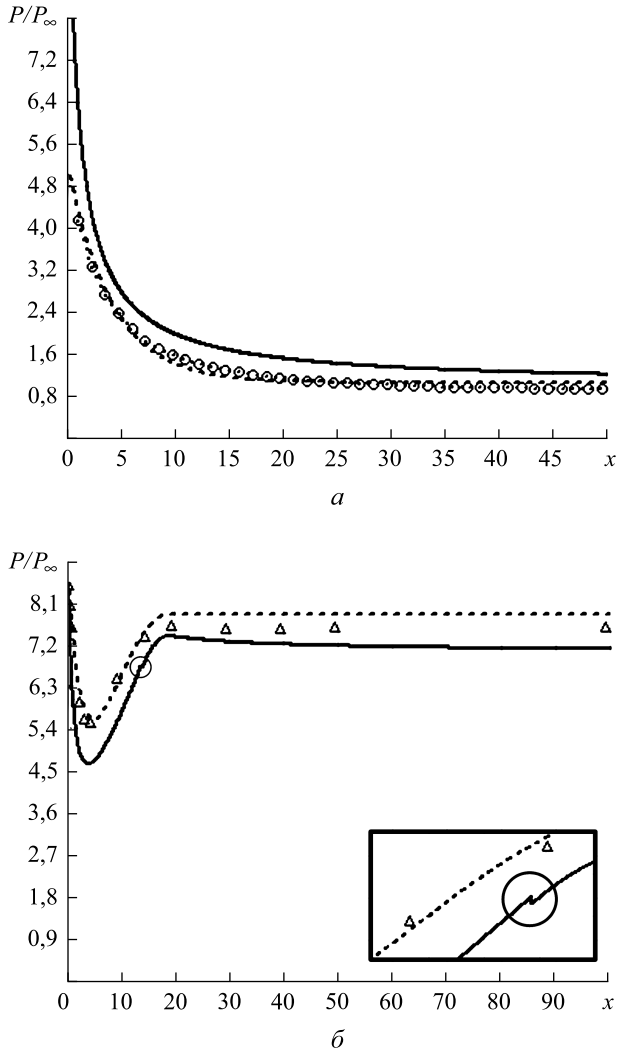


Рис. 3. Сравнение результатов расчета (*а*) и разрыв кривой (*б*) давления P/P_∞:

— расчет по формуле работы [6]; ···· — расчет по формуле (4); ○ — численное решение уравнений Эйлера; △ — табличные значения [15]

Из сопоставления результатов следует, что расчет распределения давления по формуле (4) дает практическое согласование с численным решением невязкой задачи [15]. При этом относительная погрешность решения не превышает 7 % для чисел Маха набегающего потока $M_\infty \geq 4$ и углов полураствора конусов β_k = 1…25 град.

Отметим, что применение формулы (4) не только дает возможность правильно уловить «ложку», но и асимптотически выйти на так называемую полку, т. е. на постоянное давление острого конуса, что, например, не реализовано в статье [6]. Это свидетельствует о том, что формула (4) согласуется с физическим процессом.

Заключение. Анализ известных работ, посвященных аналитическим методам расчета давления на поверхности затупленных по сфере конусов, показывает, что при их использовании не учитываются физические особенности течения газа, обусловленные разрывом кривизны образующей тела и выходом решения на асимптотику острого конуса.

На основе представленной в данной статье формулы (4) были сделаны расчеты давления на поверхности затупленного по сфере конуса и проведено сравнение с данными численного решения невязкой задачи в рамках уравнений Эйлера [15, 17]. Анализ результатов показал, что разработанная формула согласуется с физическим процессом и численным решением. При этом относительная погрешность не превышает 7 %.

Применение формулы для распределения давления на поверхности сферы [8–10] и предложенная формула для конической части с использованием значений коэффициентов сопротивления сферы на основе работ [8–10] позволяет получить распределение давления на всем конусе с учетом разрыва кривизны контура образующей тела.

В дальнейшем необходимо обобщить предложенный метод с целью получения возможности его применения для умеренных сверхзвуковых режимов обтекания конусов, а также учета угла атаки.

Авторы выражают благодарность технику отдела аэродинамики, студенту третьего курса группы АК3-61 Аэрокосмического факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана А.С. Пучкову за помощь в написании программы и исследовании аппроксимаций свободных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mayer C.S.J., Laible A.C., Fasel H.F. Numerical investigation of wave packets in mach 3.5 cine boundary layer. *AIAA Journal*, 2011, vol. 49, no. 1, pp. 67–86.

[2] Gauer M., Paull A. Numerical investigation of a spiked blunt nose cone at hypersonic speeds. *Journal of Spacecraft and Rockets*, May-June 2008, vol. 45, no. 3, pp. 459–471.

[3] Tissera Sh., Drikakis D. Computational fluid dynamics methods for hypersonic flow around blunted-cone-cylinder-flare. *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 47, no. 4, July-August 2010, pp. 563–570.

[4] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. *Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике*. Москва, Физматлит, 2011, 296 с.

[5] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 8, с. 75–91.

[6] Ericsson L.E. Effects of nose bluntness, angle of attack, and oscillation amplitude of hypersonic unsteady aerodynamics of slender cones. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, no. 2, pp. 297–304.
[7] Саранцев А.И. Дополнение к методу скачков-расширений второго порядка точности. *Ученые записки ЦАГИ*, 1991, т. XXII, № 1, с. 82–88.
[8] Котенев В.П. Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока. *Математическое моделирование*, 2014, т. 26, № 9, с. 141–148.
[9] Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых, затупленных тел вращения произвольного очертания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1 (1), с. 68–81.
[10] Котенев В.П. Определение положения звуковой точки на поверхности затупленного тела. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2011. Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 150–153.
[11] Котенев В.П., Булгаков В.Н., Ожгибисова Ю.С. Модификация метода Польгаузена для расчета тепловых потоков на затупленных телах. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3 (11), с. 33–52.
[12] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К. Моделирование сопряженных процессов аэрогазодинамики и теплообмена на поверхности теплозащиты перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2014, № 3, с. 23–34.
[13] Лунев В.В. *Течение реальных газов с большими скоростями*. Москва, Физматлит, 2007, 759 с.
[14] Краснов Н.Ф. *Основы аэродинамического расчета. Аэродинамика тел вращения, несущих и управляющих поверхностей. Аэродинамика летательных аппаратов*. Москва, Высшая школа, 1981, 496 с.
[15] Любимов А.Н., Русанов В.В. *Течения газа около тупых тел. В 2 ч. Ч. 2*. Москва, Наука, 1970, 379 с.
[16] Пантелеев А.А. Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. Москва, Изд-во МАИ-Принт, 2009, 159 с.
[17] Коваленко В.В. Метод расчета невязкого сверхзвукового обтекания фюзеляжей и крыльев и их компоновок. *Труды ЦАГИ*, 1975, вып. 1699.

Статья поступила в редакцию 22.05.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Булгаков В.Н., Котенев В.П., Сапожников Д.А. Моделирование сверхзвукового обтекания затупленных конусов с учетом разрыва кривизны образующей тела. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 81–93.

Булгаков Владислав Николаевич — инженер отдела аэродинамики в АО «ВПК «НПО машиностроения». Область научных интересов: численные, аналитические и статистические методы исследования течений газа при обтекании поверхности летательных аппаратов. e-mail: vlbulg.jr@gmail.com

Котенев Владимир Пантелеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, начальник отдела аэродинамики в АО «ВПК «НПО машиностроения». Автор около 60 научных работ в области прикладной математики, численных и аналитических методов исследования течения газа при обтекании поверхности летательных аппаратов.

Сапожников Денис Алексеевич — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер отдела аэродинамики в АО «ВПК «НПО машиностроения». Автор работ в области численных, аналитических и статистических методов исследования течения газа при обтекании поверхности летательных аппаратов. e-mail: des_end@mail.ru

Modeling supersonic flow around blunted cones, taking into account the curvature discontinuity along the generatrix of the solid

© V.N. Bulgakov[1], V.P. Kotenev[1, 2], D.A. Sapozhnikov[1, 2]

[1]JSC MIC NPO Mashinostroyeniya, Reutov, Moscow Region, 143966, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents an analytical expression for calculating pressure on the surface of blunted cones in a supersonic gas flow, taking into account the curvature discontinuity along the generatrix. We used a genetic algorithm and multi-stage functional optimisation methods for the least-squares method to determine free parameters of the expression. We compare the results obtained to the rigorous numerical solution to the inviscid problem. The comparison shows that it is possible to use the analytical expression for pressure distribution over a surface in a wide Mach number range for various cone half-angles. The expression proposed accounts for the curvature discontinuity along the generatrix at the point where the sphere is tangent to the conical surface, unlike the expressions found in previously published works.

Keywords: *supersonic flow, curvature discontinuity along a generatrix of a solid, genetic algorithm*

REFERENCES

[1] Mayer C.S.J., Laible A.C., Fasel H.F. *AIAA Journal*, 2011, vol. 49, no. 1, pp. 67–86.
[2] Gauer M., Paull A. *Journal of Spacecraft and Rockets*, May-June 2008, vol. 45, no. 3, pp. 459–471.
[3] Tissera Sh., Drikakis D. *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 47, no. 4, July-August 2010, pp. 563–570.
[4] Dimitrienko Yu.I., Kotenev V.P., Zakharov A.A. *Metod lentochnykh adaptivnykh setok dlya chislennogo modelirovaniya v gazovoy dinamike* [Ribbon-shaped adaptive mesh method for numerical simulations in gas dynamics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2011, 296 p.
[5] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 8, pp. 75–91.
[6] Ericsson L.E. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, no. 2, pp. 297–304.
[7] Sarantsev A.I. *Uchenye zapiski TsAGI — TsAGI Science Journal*, 1991, vol. XXII, no. 1, pp. 82–88.
[8] Kotenev V.P. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 9, pp. 141–148.
[9] Kotenev V.P., Sysenko V.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1 (1), pp. 68–81.

[10] Kotenev V.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Spets. vyp. "Matematicheskoe modelirovanie" — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Special edition on mathematical modeling*, 2011, pp. 150–153.
[11] Kotenev V.P., Bulgakov V.N., Ozhgibisova Yu.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 3 (11), pp. 33–52.
[12] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N., Syzdykov E.K. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2014, no. 3, pp. 23–34.
[13] Lunev V.V. *Techenie realnykh gazov s bolshimi skorostyami* [High-speed flows in real gases]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2007, 759 p.
[14] Krasnov N.F. *Osnovy aerodinamicheskogo rascheta. Aerodinamika tel vrashcheniya, nesushchikh i upravlyayushchikh poverkhnostey. Aerodinamika letatelnykh apparatov* [Foundations of aerodynamic computations. Aerodynamics of solids of revolutions, lifting surfaces and control surfaces. Aerodynamics of aircraft]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1981, 496 p.
[15] Lyubimov A.N., Rusanov V.V. *Techeniya gaza okolo tupykh tel. V 2 tomakh. Tom 2.* [Gas flows in the vicinity of blunted shapes. In 2 vols. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 379 p.
[16] Panteleev A.A. *Metaevristicheskie algoritmy poiska globalnogo ekstremuma* [Metaheuristic algorithms for locating the global extremum]. Moscow, MAI-PRINT Publ., 2009, 159 p.
[17] Kovalenko V.V. Metod rascheta nevyazkogo sverkhzvukovogo obtekaniya fyuzelyazhey i krylev i ikh komponovok [Computation method for inviscid supersonic flow around aircraft bodies and wings and their layouts]. *Trudy TsAGI — TsAGI Proceedings*, 1975, no. 1699.

Bulgakov V.N., Engineer, Department of Aerodynamics, JSC "MIC NPO Mashinostroyeniya". Science research interests: numerical, analytical and statistical methods of investigation of gas flow in the flow surface of the aircraft. e-mail: vlbulg.jr@gmail.com

Kotenev V.P., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Head of Department of Aerodynamics, JSC "MIC NPO Mashinostroyeniya". Author of approximately 60 scientific publications in the field of applied mathematics, numerical and analytical methods of investigating gas flows around the surface of aircraft.

Sapozhnikov D.A., post-graduate student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Engineer, Department of Aerodynamics, JSC "MIC NPO Mashinostroyeniya". Author of publications in the field of numerical, analytical and statistical methods of investigation of gas flow in the flow surface of the aircraft. e-mail: des_end@mail.ru