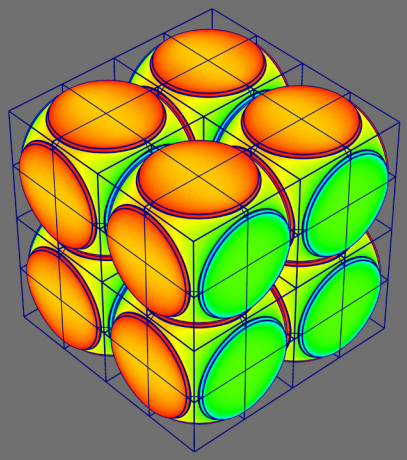
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Плюснин А.В. Математическое моделирование процесса втекания воды в коль- цевое прстранство контейнера при подводном газодинамическом выбросе лета- тельного аппарата. Математическое моделирование и численные методы, 2017, No 2, с. 39–64.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/133/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.62
22.11.2026 01:36:23

УДК 629.762

Математическое моделирование процесса втекания воды в кольцевое пространство контейнера при подводном газодинамическом выбросе летательного аппарата

© А.В. Плюснин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена одномерная схема расчета нагрузок на корпус летательного аппарата от втекания воды в кольцевое пространство пускового контейнера при подводном газодинамическом выбросе. Внешняя гидродинамическая задача решается с использованием теории потенциала. Деформации стенок летательного аппарата и пускового контейнера учитываются на основе решения статической задачи Ламе.

Ключевые слова: *летательный аппарат, подводный выброс, кольцевое пространство, втекание воды*

Введение. Задачи исследования и математического моделирования нестационарных взаимодействий газовой и жидкой сред представляют интерес для разработки энергетических установок, технологических процессов, создания, эксплуатации и применения различных технических систем. В этих приложениях наиболее широко распространены явления, связанные с динамикой парогазовых включений в жидкости [1–6], кавитацией [7, 8], струйными взаимодействиями [9, 10], испарением и конденсацией [11–13]. Оригинальным решением при экспериментальном определении параметров ударного проникания тел в воду является моделирование сжимаемости воды с помощью специально приготовленной смеси несущей жидкости с пузырьками газа [14]. Стоит отметить, что необычные явления, похожие на перечисленные, встречаются и в живой природе [15, 16]. Дополнительным стимулом к физическому исследованию этих процессов и развитию средств их математического и компьютерного моделирования [17, 18] служит присущее этим явлениям фрактальное изящество [19, 20], обусловленное динамикой свободных границ жидкости.

Тематика подводного старта летательных аппаратов (ЛА) содержит множество задач экспериментального определения и расчета параметров нестационарных газожидкостных течений и их воздействий на деформируемые конструкции ЛА и подводного носителя [21–23]. «Минометная» схема [24] подводного газодинамического выброса (рис. 1) имеет свои особенности [25]. Рассмотрим процесс, который может реализоваться при разгерметизации кольцевого пространства (КП)

между корпусом ЛА и внутренней стенкой пускового контейнера (ПК). Если не предпринимать специальных мер, таких, например, как предварительный наддув КП до давления, примерно равного наружному гидростатическому давлению $p_H = p_{\text{атм}} + \rho_{\text{в}} gH$ [26, 27] (где $p_{\text{атм}}$ — атмосферное давление; $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды; g — ускорение силы тяжести; H — глубина погружения по верхнему срезу ПК), то под действием перепада давлений $p_H / p_{\text{атм}}$ вода начнет быстро заполнять КП, сжимая находящийся там газ. Повышение давления в КП, которое при этом может реализоваться, способно привести к разрушению корпуса ЛА. Иногда это явление называют «гидроударом», хотя оно и не вполне соответствует процессу, наблюдаемому при гидравлическом ударе в трубах [28].

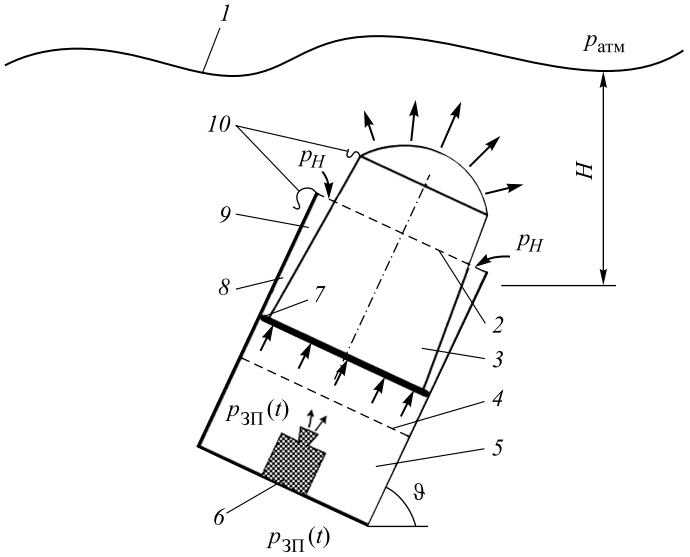


Рис. 1. Схема подводного газодинамического выброса летательного аппарата (ЛА):
1 — поверхность воды; *2* — верхний срез контейнера; *3* — ЛА; *4* — начальное положение ЛА; *5* — задонное пространство (ЗП) контейнера; *6* — энергоустройство, создающее избыточное давление $p_{\text{ЗП}}(t)$; *7* — кормовое уплотнение ЛА; *8* — кольцевое пространство контейнера; *9* — начальное давление p_0 до разгерметизации; *10* — переднее уплотнение контейнера после разрушения; ϑ — угол наклона контейнера к горизонту

Для проектных целей представляет интерес определение максимального давления $p_{\max}$, реализующегося в КП при втекании воды под действием перепада давлений p_H / p_0, где p_0 — начальное давление газа в КП. Случай $p_{\text{атм}} < p_0 < p_H$ соответствует частичному

предварительному наддуву КП. Для того чтобы гарантировать необходимый уровень давления, наддув осуществляют, подавая газ непосредственно в КП [26]. При этом учитывается также начальный свободный объем ЗП, куда газ из КП способен вполне свободно перетекать под кормовым уплотнением ЛА (см. рис. 1). Состав среды для задачи, рассматриваемой в данной статье, не имеет значения, хотя на практике во избежание вторичного догорания в ЗП продуктов сгорания энергоустройства газодинамического выброса [24, 25, 29] предпочтительнее производить наддув газом, не содержащим кислород (азотом) [26].

В данной работе процесс втекания воды в КП исследуется для наихудшего случая $p_0 = p_{\text{атм}}$ в рамках одномерной расчетной схемы [25, 30], построенной на балансовых соотношениях массы и импульса для столба воды в КП. Основное внимание уделено рассмотрению внешней гидродинамической задаче и оценке влияния на величину $p_{\max}$ упругости стенок ПК и корпуса ЛА. При этом движение ЛА в ПК считается не зависящим от дополнительного сопротивления, возникающего вследствие втекания воды в КП. На рис. 2 приведены графики пути L (*1*), скорости V (*2*), ускорения A (*4*) ЛА и давления в ЗП $p_{\text{ЗП}}$ (*3*) в функции времени t, использованные в данной работе при проведении расчетов. Учет связанности задачи не составляет труда. В практических приложениях к расчетной схеме стоит лишь добавить уравнения, описывающие движение ЛА и процессы в ЗП [23, 29, 31]. Угол ϑ наклона ПК к горизонту (см. рис. 1) принят вертикальным.

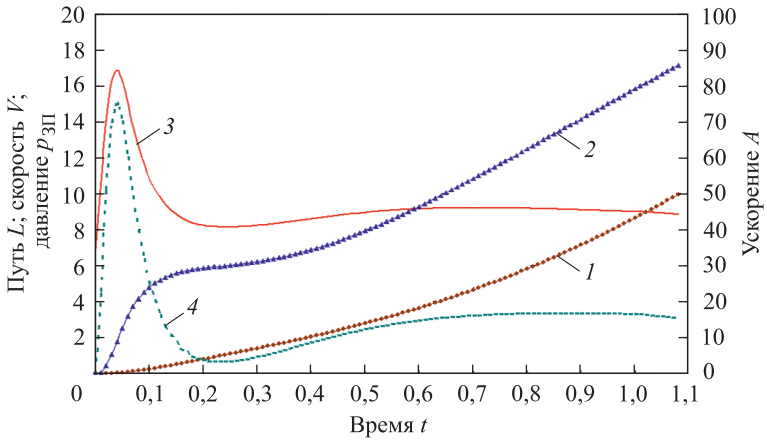


Рис. 2. Заданные параметры движения летательного аппарата в пусковом контейнере:

1 — путь L; *2* — скорость V; *3* — давление в задонном пространстве $p_{\text{ЗП}}$; *4* — ускорение A

Предполагается, что в ненагруженном состоянии боковые поверхности ПК и ЛА представляют собой цилиндры толщиной $\delta^{ПК} = R^{ПК}_{внеш} - R^{ПК}$ и $\delta^{ЛА} = R^{ЛА} - R^{ЛА}_{внут}$ соответственно. Здесь $R^{ПК}$, $R^{ЛА}_{внут}$ — внутренние, а $R^{ПК}_{внеш}$, $R^{ЛА}$ — внешние радиусы ПК и ЛА. Учет прогибов стенок ПК и ЛА под действием избыточного давления среды учитывается в упрощенной постановке, мотивированной работой [28]. Однако в отличие от работы [28] вода как снаружи ПК, так и в КП предполагается несжимаемой. Такой подход позволяет избежать решения задачи в частных производных, и его можно расценивать как один из начальных этапов исследования и математического моделирования в рамках методологической стратегии, изложенной в работе [32]. Развитием этого подхода является описание деформаций стенок ПК и ЛА на основе динамической теории оболочек [33, 34]. Если учесть сжимаемость воды [28, 35], получим постановку задачи, естественную с точки зрения общей теории механики сплошных сред [36].

Кормовое уплотнение ЛА (см. рис. 1) считаем непроницаемым для среды в обе стороны. Это означает, что горячие продукты сгорания из ЗП не могут повлиять на термодинамическое состояние газового объема в КП, а газ из КП не может перетекать в ЗП под действием положительного перепада давлений, что вполне согласуется с начальной стадией анализа физических процессов в рамках стратегии [32].

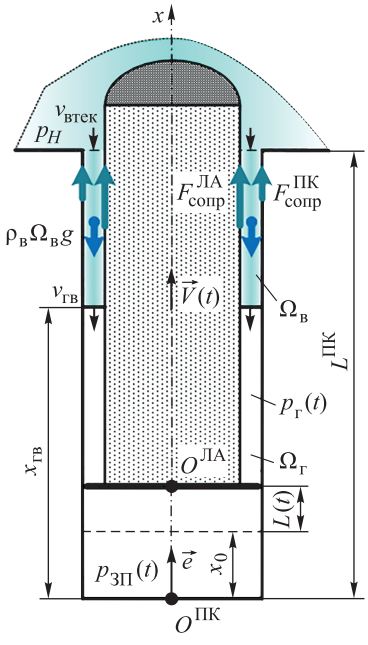


Рис. 3. Идеализация втекания воды в кольцевом пространстве постоянного поперечного сечения

Заметим, что исследования и расчеты, представленные в данной работе, имеют научно-методический характер и не связаны с конкретными техническими приложениями.

Внешняя гидродинамическая задача. Для составления математического описания процесса втекания воды в КП воспользуемся идеализированной схемой, приведенной на рис. 3. Считаем, что до начала этого процесса жидкость занимает верхнее полупространство над плоскостью $x = L^{ПК}$, отождествляемой с наружной поверхностью корпуса подводного носителя ЛА. На бесконечности жидкость покоится и имеет давление, равное давлению p_H на уровне верхнего среза пускового контейнера (ВСПК) в исходной физической постановке задачи

(см. рис. 1). Весомость жидкости учитывается только для столба воды, проникшего в КП.

Под действием начального перепада давлений p_H / p_0 формируется течение воды, направленное внутрь ПК. Скорость втекания воды в КП $v_{\text{втек}}$ и давление $p_{\text{втек}}$, которое она приобретает на уровне ВСПК, требуется определить в ходе решения задачи. Наряду с величиной $v_{\text{втек}}$ будем использовать объемный расход воды внутрь КП $Q(t) = v_{\text{втек}} \Sigma_{\text{втек}}^{\text{КП}}$, где $\Sigma_{\text{втек}}^{\text{КП}}$ — площадь сечения КП на уровне ВСПК. Заметим, что эти величины отрицательны при фактическом втекании воды внутрь КП.

Данную задачу и родственные ей [25, 37] обычно рассматривают с использованием двух модельных гидродинамических течений. Одно из них — течение от точечного источника/стока [38], непосредственно определяемое фундаментальным решением уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$ [39]. В видоизмененной форме оно описывается уравнением Релея и характеризует динамические колебания сферического газового пузырька, находящегося в жидкости [2, 40]. Другое течение определяется решением Ламба задачи о вытекании жидкости из полупространства через круговое отверстие [41].

Решение Ламба в большей степени соответствует рассматриваемой задаче. Имея в виду определенную работу с ним, дадим его вывод, следуя решению задачи о потенциале электростатического поля, созданного диском [42], имеющей тождественную математическую формулировку. Двойственной по отношению к рассматриваемой задаче является задача об осесимметричном безотрывном обтекании диска [41] или, что эквивалентно, линеаризованная задача о плоском ударе диска по поверхности идеальной несжимаемой жидкости [35]. Замкнутую форму решения этих задач обычно приводят только для границы области определения, ограничиваясь для внутренних точек интегральным представлением, которое неудобно для вычислений [41, 42]. Однако благодаря формулам [43] все решение можно представить в простой замкнутой форме [30, 44].

В постановке, близкой к рис. 3, пока игнорируя присутствие ЛА, будем искать решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ в полупространстве $z \equiv x - L^{\text{ПК}} > 0$, подчиняющееся условиям $\varphi\big|_{r<R^{\text{ПК}}} = C(t)$, $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{r>R^{\text{ПК}}} = 0$ при $z = 0$ и $\varphi\big|_{z\to\infty} = 0$ на бесконечности (где r — расстояние от оси ПК). Применяя преобразование $\Phi(\rho, z) =$

$=\int_0^\infty \varphi(r,\,z)\,J_0(r\rho)\,r\,dr$ Ханкеля нулевого порядка [42], для изображения $\Phi(\rho,\,z)$ получаем уравнение $d^2\Phi/dz^2-\rho^2\Phi=0,$ решением которого с заданным поведением на бесконечности является функция $\Phi(\rho,\,z)=A(\rho)e^{-\rho z}$. Применяя к ней обратное преобразование, имеем:

$$\varphi(r,\,z)=\int_0^\infty A(\rho)e^{-\rho z}J_0(r\rho)\,\rho\,d\rho. \qquad (1)$$

Подстановка выражения (1) в граничные условия приводит к системе дуальных интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty A(\rho)J_0(r\rho)\,\rho\,d\rho=C(t), \quad r<R^{\text{ПК}}\\ &\int_0^\infty A(\rho)\,J_0(r\rho)\,\rho^2 d\rho=0, \qquad r>R^{\text{ПК}}\end{aligned}\right\},$$

откуда $A(\rho)=\dfrac{2C(t)}{\pi}\dfrac{\sin\left(R^{\text{ПК}}\rho\right)}{\rho^2}$ [45]. Ее подстановка в выражение (1) и формулы [43] дают:

$$\varphi(r,z)=\frac{2C(t)}{\pi}\int_0^\infty \rho^{-1}e^{-\rho z}\sin\left(R^{\text{ПК}}\rho\right)J_0(r\rho)\,d\rho=\frac{2C(t)}{\pi}\arcsin\frac{R^{\text{ПК}}}{A}; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(r,z)=-\frac{2C(t)}{\pi}\int_0^\infty e^{-\rho z}\sin\left(R^{\text{ПК}}\rho\right)J_0(r\rho)\,d\rho=-\frac{2C(t)}{\pi}\frac{\sqrt{A^2-r^2-z^2}}{A^{(-)}A^{(+)}}, \qquad (3)$$

где $A=0,5\left(A^{(-)}+A^{(+)}\right)$, $A^{(\pm)}=\sqrt{z^2+\left(r\pm R^{\text{ПК}}\right)^2}$.

Для получения предельных значений выражений (2), (3) при $z=+0$ предварительно найдем предельные значения $A^{(-)}=\left|r-R^{\text{ПК}}\right|$, $A^{(+)}=r+R^{\text{ПК}}$. Теперь, если $r<R^{\text{ПК}}$, получаем:

$$A^{(-)}=R^{\text{ПК}}-r,\ \ A=R^{\text{ПК}},\ \ \varphi=\frac{2C(t)}{\pi}\arcsin 1=C(t),\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{2C(t)}{\pi}\frac{\sqrt{\left(R^{\text{ПК}}\right)^2-r^2}}{\left(R^{\text{ПК}}-r\right)\left(R^{\text{ПК}}+r\right)}=-\frac{2C(t)}{\pi\sqrt{\left(R^{\text{ПК}}\right)^2-r^2}}.$$

Если $r > R^{\text{ПК}}$, имеем:

$$A^{(-)} = r - R^{\text{ПК}},\ \ A = r,\ \ \varphi = \frac{2C(t)}{\pi}\arcsin\frac{R^{\text{ПК}}}{r},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{2R^{\text{ПК}}C(t)}{\pi r\sqrt{r^2 - \left(R^{\text{ПК}}\right)^2}},\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Интегрирование $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ по площади входного сечения дает объемный расход

$$Q(t) = -4C(t)\int_0^{R^{\text{ПК}}} r\left[\left(R^{\text{ПК}}\right)^2 - r^2\right]^{-1/2} dr = -4C(t)R^{\text{ПК}},$$

т. е. $C(t) = -\dfrac{Q(t)}{4R^{\text{ПК}}}$. В итоге параметры внешнего течения в точках входного сечения ПК выражаются формулами

$$\varphi^{ext} = -\frac{Q(t)}{4R^{\text{ПК}}},\ \ v_r^{ext} = 0,\ \ v_z^{ext} = \frac{Q(t)}{2\pi R^{\text{ПК}}\sqrt{\left(R^{\text{ПК}}\right)^2 - r^2}}. \qquad (4)$$

Полученное математическое решение задачи Ламба справедливо при любом знаке $Q(t)$, но физический смысл оно имеет лишь в случае *истечения* жидкости из полупространства. При втекании жидкости в полупространство реальная картина течения становится совершенно иной [46]. Вместо расталкивания жидкости во все стороны, что имеет место при течении от точечного источника, втекающая в полупространство струя в результате вязкого взаимодействия отдает свой импульс окружающей жидкости. Модельная задача для такого течения должна ставиться в соответствии с теорией затопленных струй [9]. Применительно к рассматриваемым в данной статье задачам достаточно считать, что при вытеснении жидкости из ПК

$$p_{\text{втек}}(t)\big|_{Q(t)\ge 0} = p_H. \qquad (5)$$

В решении (2)–(4) компоненты скорости у краев отверстия не ограничены $\left(v_r^{ext} \underset{r\to R^{\text{ПК}}+0}{\to} \infty,\ v_z^{ext} \underset{r\to R^{\text{ПК}}-0}{\to} \infty\right)$, а квадрат скорости $\left(v^{ext}\right)^2 = \left(v_z^{ext}\right)^2$ является неинтегрируемым по площади входного сечения. Решение модельной задачи можно усовершенствовать, если распре-

деление скорости $v_z^{ext} = \dfrac{\partial \varphi^{ext}}{\partial z}$ на границе $z = 0$ считать ограниченным, в частности непрерывным. При этом удобно использовать условие нормировки

$$\int\limits_{r<R^{\text{ПК}}} v_z^{ext}(r,0)dS = 2\pi \int\limits_0^{R^{\text{ПК}}} \frac{\partial \varphi^{ext}}{\partial z}(r,0) r dr = 1.$$

Решение $\Phi^{ext}(r,z)$ («единичный потенциал») соответствующей задачи Неймана для уравнения Лапласа в полупространстве $z>0$ имеет вид [39]:

$$\Phi^{ext}(r,z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{z=0} r_{MP}^{-1} v_z^{ext}\left(P\right) dS\left(P\right),$$

где r_{MP} — расстояние между точкой «интегрирования» $P(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi, 0)$ и точкой «наблюдения» $M(r,0,z)$ (указаны декартовы координаты точек, φ — полярный угол цилиндрической системы координат). Учитывая характер распределения $v_z^{(ext)}$ и формулы для вычисления потенциала простого слоя [37, 47], для точек плоскости $z=0$ имеем:

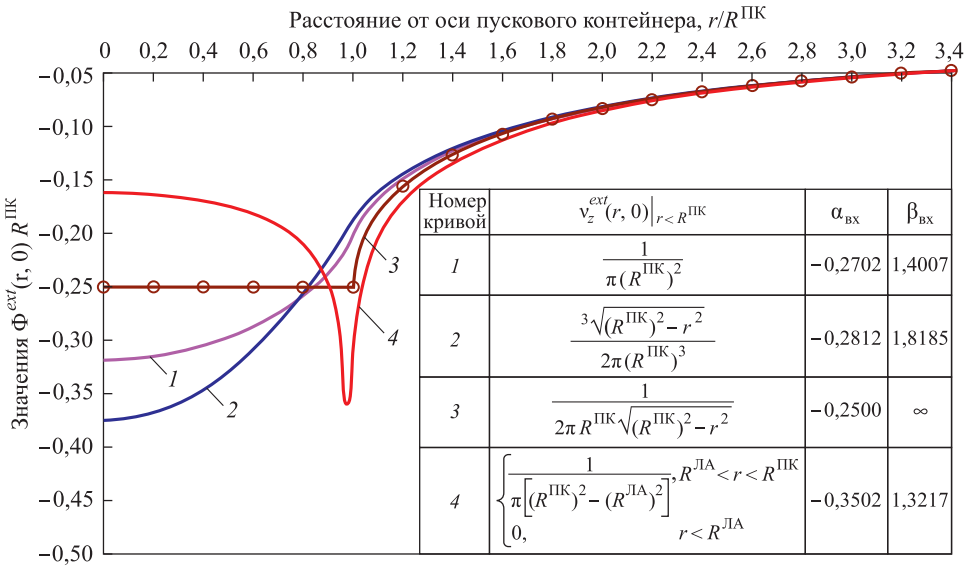
$$\Phi^{ext}(r,0) = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{R^{\text{ПК}}} \frac{\tilde{r}}{r+\tilde{r}} \mathrm{K}(k^2) v_z^{ext}(\tilde{r},0) d\tilde{r},$$

где $\mathrm{K}(k^2)$ — полный эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра, $k^2 = \dfrac{4r\tilde{r}}{(r+\tilde{r})^2}$. Результаты вычислений для ряда распределений $v_z^{ext}(r,0)\Big|_{r<R^{\text{ПК}}}$, включая формулы (4), приведены на рис. 4.

Кривая *4* соответствует задаче втекания воды в ПК через кольцевой зазор между корпусом ЛА и стенкой ПК. Расчеты проводились для значений $R^{\text{ПК}} = 0,5,\ \delta^{\text{КП}} = R^{\text{ПК}} - R^{\text{ЛА}} = 0,02$. Потенциал

$$\varphi^{ext}(r,z,t) = Q(t)\Phi^{ext}(r,z), \qquad (6)$$

соответствующий этому расчету, будем использовать в дальнейшем. Присутствие корпуса ЛА учитывалось схематично условием $v_z^{ext}(r,0)\Big|_{r<R^{\text{ЛА}}} = 0$. Для уточнения требуется серия расчетов, учитывающих выдвижение ЛА из ПК и изменение текущей скорости ЛА [37, 47, 48].



Номер кривой	$v_z^{ext}(r, 0)\big\|_{r<R^{ПК}}$	$\alpha_{вх}$	$\beta_{вх}$
1	$\dfrac{1}{\pi (R^{ПК})^2}$	−0,2702	1,4007
2	$\dfrac{\sqrt[3]{(R^{ПК})^2 - r^2}}{2\pi (R^{ПК})^3}$	−0,2812	1,8185
3	$\dfrac{1}{2\pi R^{ПК}\sqrt{(R^{ПК})^2 - r^2}}$	−0,2500	∞
4	$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\left[(R^{ПК})^2 - (R^{ЛА})^2\right]}, & R^{ЛА} < r < R^{ПК} \\ 0, & r < R^{ЛА} \end{cases}$	−0,3502	1,3217

Рис. 4. Поведение единичных потенциалов Φ^{ext} при $z=0$:
○ — вычисления решения Ламба по аналитической формуле

Для внешнего течения выполняется интеграл Коши — Лагранжа

$$\left[\frac{\partial \varphi^{ext}}{\partial t} + \frac{(v^{ext})^2}{2} + \frac{p^{ext}}{\rho_в}\right]_{(r,z)} = \frac{p_H}{\rho_в}. \tag{7}$$

Для входного сечения КП из формул (6), (7) получаем:

$$\left[\dot{Q}(t)\Phi^{ext} + 0,5Q^2(t)\left|\operatorname{grad}\Phi^{ext}\right|^2 + \frac{p^{ext}}{\rho_в}\right]_{\Sigma^{КП}_{втек}} = \frac{p_H}{\rho_в}.$$

В результате осреднения по сечению имеем:

$$p^{ext}_{вх}(t) \equiv \frac{2\pi}{\Sigma^{КП}_{втек}} \int\limits_{R^{ЛА}}^{R^{ПК}} p^{ext}(r,0) r\,dr = p_H - \alpha_{вх}\frac{\rho_в \dot{Q}}{R^{ПК}} - \beta_{вх}\frac{\rho_в Q^2}{2\left(\Sigma^{КП}_{втек}\right)^2}; \tag{8}$$

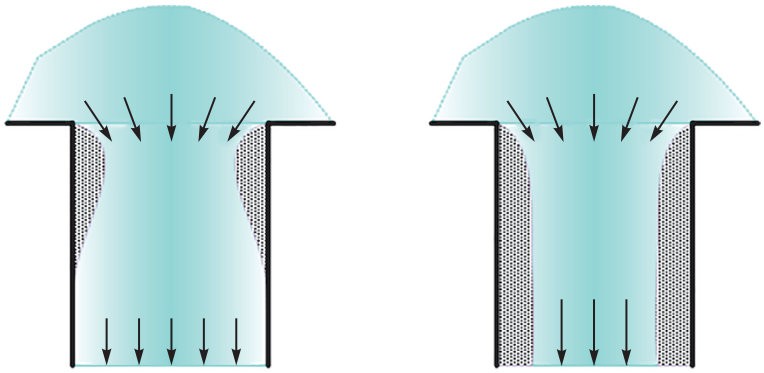
$$\frac{\alpha_{вх}}{R^{ПК}} = \frac{2\pi}{\Sigma^{КП}_{втек}} \int\limits_{R^{ЛА}}^{R^{тр}} \Phi^{ext}(r,0) r\,dr,\ \frac{\beta_{вх}}{\left(\Sigma^{КП}_{втек}\right)^2} = \frac{2\pi}{\Sigma^{КП}_{втек}} \int\limits_{R^{ЛА}}^{R^{тр}} \left|\operatorname{grad}\Phi^{ext}(r,0)\right|^2 r\,dr. \tag{9}$$

Из формулы (6) следует, что размерность Φ^{ext} обратна длине, поэтому коэффициенты $\alpha_{вх}$, $\beta_{вх}$ безразмерны. Результаты вычислений этих коэффициентов по формулам (9) приведены на рис. 4.

Характер течения во входном сечении ПК, показанный на рис. 3, практически невозможно реализовать в маловязкой жидкости. В пре-

деле идеальной жидкости всякое безотрывное течение, обтекающее выпуклый угол, должно иметь в вершине угла бесконечную скорость [38, 42]. Решение Ламба соответствует этому случаю: при аналитическом продолжении потенциала (2) в полупространство $z<0$ получится безотрывное обтекание жидкостью выпуклого угла величиной 2π.

Согласно терминологии гидравлики процесс втекания жидкости в ПК можно охарактеризовать как течение с внезапным сужением потока [49, 50]. Выделяют два основных режима таких течений: «безотрывный» (рис. 5, *а*) и с полным отрывом потока от стенок (рис. 5, *б*). В дальнейшем исследовании ограничимся рассмотрением первого режима с локальной зоной отрыва потока от стенок ПК.



а *б*

Рис. 5. Схемы «безотрывного» (*а*) и с полным отрывом потока от стенок (*б*) режимов течения реальной жидкости с внезапным сужением потока

Нестационарное течение (6) в момент времени $t=\tau$ совпадает со стационарным течением, имеющим потенциал $\varphi^{ext}_{(\tau)}(r,z)=Q(\tau)\times$ $\times\Phi^{ext}(r,z)$ и удовлетворяющим интегралу Бернулли

$$\left[\frac{(v^{ext})^2}{2}+\frac{p^{ext}_{\text{стац}}}{\rho_{\text{в}}}\right]_{(r,z)}=\frac{p_H}{\rho_{\text{в}}}. \tag{10}$$

Сравнивая формулы (7) и (10), получаем:

$$\left[\frac{\partial\varphi^{ext}}{\partial t}+\frac{p^{ext}_{\text{нест}}}{\rho_{\text{в}}}\right]_{(r,z)}=0, \tag{11}$$

где $p^{ext}_{\text{нест}}=p^{ext}-p^{ext}_{\text{стац}}$.

Для стационарного течения на длине входного участка имеет место потеря давления

$$p^{ext}_{\text{вх. стац}} = p^{int}_{\text{вх. стац}} + \zeta_{\text{вх}} \frac{\rho_{\text{в}} Q^2}{2\left(\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}\right)^2}.$$

Здесь $p^{int}_{\text{вх. стац}}$ — давление в месте присоединения струи к стенкам трубы при стационарном течении (см. рис. 5, *а*); коэффициент сопротивления входа $\zeta_{\text{вх}} \approx 0{,}5$ [49].

Нестационарная составляющая давления, будучи связанной с потенциалом формулой (11), имеет более высокую степень гладкости. Ограничившись предположением $p^{int}_{\text{вх. нест}} = p^{ext}_{\text{вх. нест}}$ и полагая, что $p_{\text{втек}} \equiv p^{int}_{\text{вх}} = p^{int}_{\text{вх. стац}} + p^{int}_{\text{вх. нест}}$, из формулы (8) имеем:

$$p_{\text{втек}}(t) = p_H - \alpha_{\text{вх}} \frac{\rho_{\text{в}} \dot{Q}}{R^{\text{ПК}}} - \tilde{\beta}_{\text{вх}} \frac{\rho_{\text{в}} Q^2}{2\left(\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}\right)^2},\ \tilde{\beta}_{\text{вх}} = \beta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{вх}}. \qquad (12)$$

Одномерная схема расчета втекания воды в кольцевое пространство с недеформируемыми стенками. Пусть в момент $t = t_0$ происходит разгерметизация КП между корпусом ЛА и стенкой ПК, и вода начинает поступать внутрь КП под действием перепада давлений. Игнорируя структуру отрывной зоны вблизи входного сечения ПК, из закона сохранения массы несжимаемой жидкости получаем следующие соотношения (см. рис. 3):

$$\frac{dm_{\text{в}}}{dt} = -\rho_{\text{в}} v_{\text{втек}}(t) \Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}},\ v_{\text{в}}(x,t) = v_{\text{втек}}(t) = v_{\text{гв}}(t) = \frac{Q(t)}{\Sigma^{\text{КП}}}. \qquad (13)$$

Здесь $m_{\text{в}}(t) = \rho_{\text{в}} \left(L^{\text{ПК}} - x_{\text{гв}}\right) \Sigma^{\text{КП}}$ — текущая масса воды внутри КП; $v_{\text{в}}(x,t)$ — скорость частиц воды в сечении с координатой $x_{\text{гв}}(t) \le x \le L^{\text{ПК}}$ в момент времени t; $\Sigma^{\text{КП}} = \Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}$ — площадь поперечного сечения КП.

Производная по времени от импульса $K_{\text{в}}(t) = m_{\text{в}}(t) v_{\text{гв}}(t) = \rho_{\text{в}} v_{\text{гв}} \left(L^{\text{ПК}} - x_{\text{гв}}\right) \Sigma^{\text{КП}}$, находящегося в КП столба воды равна сумме действующих сил и скорости переноса импульса через входное сечение

$$\frac{dK_{\text{в}}}{dt} = \rho_{\text{в}} \Sigma^{\text{КП}} \left[\left(L^{\text{ПК}} - x_{\text{гв}}\right) a_{\text{гв}} - v^2_{\text{гв}}\right] =$$

$$= \Sigma^{\text{КП}} \left[p_{\text{г}}(t) - p_{\text{втек}}(t)\right] - \rho_{\text{в}} v^2_{\text{гв}} \Sigma^{\text{КП}} - m_{\text{в}} g + F_{\text{сопр}}, \qquad (14)$$

где $a_{\text{гв}} = \dot{v}_{\text{гв}} = \ddot{x}_{\text{гв}}$ — ускорение границы воды.

Давление газа в объеме $\Omega_{\text{г}}(t)=\Sigma^{\text{КП}}\left[x_{\text{гв}}-L(t)-x_0\right]$ определяем как

$$p_{\text{г}}(t)=p_0\left(\frac{\Omega_{\text{г}0}}{\Omega_{\text{г}}(t)}\right)^n, \tag{15}$$

где $\Omega_{\text{г}0}=\Omega_{\text{г}}(t_0)$ — начальный объем газа; n — показатель политропы.

Величина $F_{\text{сопр}}=F_{\text{сопр}}^{\text{ПК}}+F_{\text{сопр}}^{\text{ЛА}}$ складывается из сил вязкого трения, действующих на столб воды со стороны стенок ПК и ЛА. Оценим эти силы, используя формулы гидравлики для стационарных течений в трубах [49] и учитывая, что сопротивление вязкого трения определяется величиной и направлением скорости w жидкости относительно стенки. В результате получаем соотношение [30, 49]

$$\frac{F_{\text{сопр}}}{\rho_{\text{в}}}=-\frac{\pi\left(L^{\text{ПК}}-x_{\text{гв}}\right)}{4}\left[\lambda_{\text{тр}}^{\text{ПК}}R^{\text{ПК}}v_{\text{гв}}^2\operatorname{sgn}v_{\text{гв}}+\lambda_{\text{тр}}^{\text{ЛА}}R^{\text{ЛА}}\left(v_{\text{гв}}-V\right)^2\operatorname{sgn}\left(v_{\text{гв}}-V\right)\right]. \tag{16}$$

Коэффициенты сопротивления трения $\lambda_{\text{тр}}^{\text{ПК, ЛА}}$ вычисляем из уравнения

$$\lambda=\frac{1}{\left[a_1+b_1\lg\left(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\right)+c_1\lg\overline{\Delta}\right]^2}.$$

Числовые значения коэффициентов a_1, b_1, c_1 [49] зависят от диапазона значений, принимаемых выражением $\overline{\Delta}\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}$, где $\overline{\Delta}=\dfrac{\Delta}{D_{\text{гидр}}}$ — относительная шероховатость стенки; Δ — средняя высота выступов шероховатости, м; $\operatorname{Re}=\dfrac{\rho_{\text{в}}wD_{\text{гидр}}}{\mu_{\text{в}}}$ — число Рейнольдса; $\mu_{\text{в}}$ — динамическая вязкость воды; $D_{\text{гидр}}=\dfrac{4\Sigma^{\text{КП}}}{2\pi\left(R^{\text{ПК}}+R^{\text{ЛА}}\right)}=2\left(R^{\text{ПК}}-R^{\text{ЛА}}\right)=2\delta^{\text{КП}}$ — гидравлический диаметр КП.

Из формулы (14) получаем выражение

$$a_{\text{гв}}=\frac{(p_{\text{г}}-p_H)/\rho_{\text{в}}+0,5\tilde{\beta}_{\text{вх}}v_{\text{гв}}^2-\left(L^{\text{ПК}}-x_{\text{гв}}\right)g+F_{\text{сопр}}\Big/\left(\rho_{\text{в}}\Sigma^{\text{КП}}\right)}{L^{\text{ПК}}-x_{\text{гв}}-\alpha_{\text{вх}}\,\Sigma^{\text{КП}}\big/R^{\text{ПК}}}, \tag{17}$$

являющееся основой для составления системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) $\dot{x}_{\text{гв}}=v_{\text{гв}}$, $\dot{v}_{\text{гв}}=a_{\text{гв}}$, легко интегрируемой методом Рунге — Кутты. Результаты вычислений давления $p_{\text{г}}(t)$ для

начальных данных $x_{\text{гв}}(t_0)=L^{\text{ПК}}$, $v_{\text{гв}}(t_0)=0$ и двух предельных процессов сжатия газа, изотермического $(n=1)$ и адиабатического $(n=1,4)$, приведены на рис. 6.

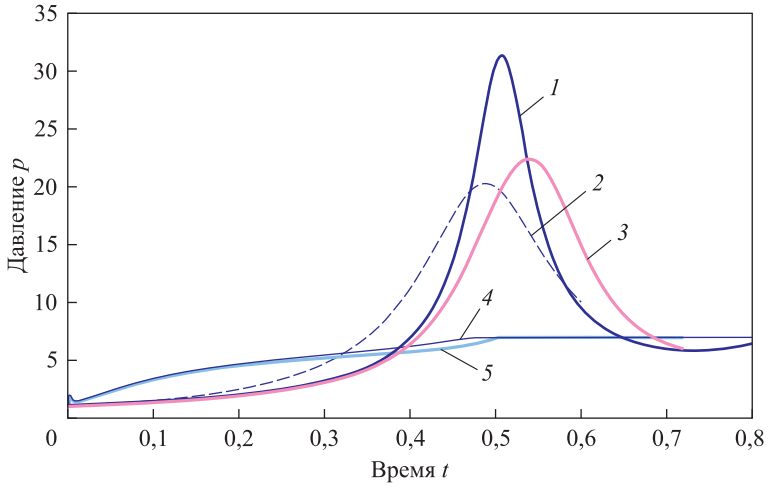


Рис. 6. Давление в кольцевом пространстве при втекании воды $p_{\text{г}}$ (*1*, *2*), $p_{\text{втек}}$ (*4*) без учета деформаций стенок ПК и ЛА и $p_{\text{г}}$ (*3*), $p_{\text{втек}}$ (*5*) с учетом деформаций; изотермический (——, ——, ——, ——) и адиабатический (– – –) процессы сжатия газа

Результаты расчетов для случаев $n=1$ и $n=1,4$ сильно различаются. Реальный процесс предположительно протекает ближе к изотермическим условиям, поскольку сжатие газа в КП происходит в контакте с холодными стенками ПК и ЛА и границей воды. С одной стороны, ввиду отрыва и завихрения втекающей жидкости у ВСПК граница может быть нерегулярной и возможно проникновение в газовый объем струек и капель жидкости, что вызовет интенсификацию теплообмена. С другой стороны, стадия интенсивного сжатия газового объема кратковременна, поэтому требуется более детальное рассмотрение энергетического баланса для газового объема в КП. Причем при решении практических задач целесообразно учитывать и податливость стенок КП, поскольку, как видно из рис. 6 (кривая *3*), учет деформаций стенок КП существенно влияет на динамику процесса сжатия газового объема.

Учет податливости стенок кольцевого пространства. Если учесть деформации стенок, площадь поперечного сечения КП будет определяться выражением

$$\Sigma^{\text{КП}}=\pi\left(R^{\text{ПК}}+u_r^{\text{ПК}}\right)^2-\pi\left(R^{\text{ЛА}}+u_r^{\text{ЛА}}\right)^2, \qquad (18)$$

где $u_r^{\text{ПК}}$, $u_r^{\text{ЛА}}$ — радиальные перемещения частиц материала внутренней стенки ПК и внешней стенки ЛА. При этом рассмотрение баланса массы приводит к соотношению в частных производных

$$\frac{\partial \Sigma^{\text{КП}}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(v_{\text{в}}\Sigma^{\text{КП}}\right)=0. \tag{19}$$

В рамках упрощенного подхода, мотивированного работой [28], будем учитывать податливость стенок КП, подобно методу плоских сечений [48], исходя из решения классической задачи Ламе об определении напряжений и перемещений в упругой трубе, нагруженной внутренним и внешним давлением [34, 51].

Предполагая состояние плоской деформации в сечениях трубы, будем иметь в цилиндрических координатах трехосное напряженное состояние, характеризуемое (в изотропном материале) двумя упругими константами. В рассматриваемой задаче (см. рис. 3) атмосферное давление не вызывает деформацию, поэтому положим $\tilde{p}=p-p_{\text{атм}}$. Тогда внешнее/внутреннее давление на стенке ПК равно $\tilde{p}_2=0\,/\,\tilde{p}_1=\tilde{p}_{\text{КП}}$, а на стенке ЛА — $\tilde{p}_2=\tilde{p}_{\text{КП}}\,/\,\tilde{p}_1=0$, где $\tilde{p}_{\text{КП}}$ — местное избыточное давление газа или воды в КП. Считая, что толщины стенок малы по сравнению с их радиусами, в соответствии с решением задачи Ламе имеем:

$$u_r^{\text{ПК}}\approx\frac{\tilde{p}_{\text{КП}}R^{\text{ПК}}}{2\left[\left(R_{\text{внеш}}^{\text{ПК}}\right)^2-\left(R^{\text{ПК}}\right)^2\right]}\left[\frac{\left(R^{\text{ПК}}\right)^2}{\lambda^{\text{ПК}}+\mu^{\text{ПК}}}+\frac{\left(R_{\text{внеш}}^{\text{ПК}}\right)^2}{\mu^{\text{ПК}}}\right]\approx\frac{\tilde{p}_{\text{КП}}\left(R^{\text{ПК}}\right)^2}{4\delta^{\text{ПК}}}\times$$

$$\times\frac{\lambda^{\text{ПК}}+2\mu^{\text{ПК}}}{\left(\lambda^{\text{ПК}}+\mu^{\text{ПК}}\right)\mu^{\text{ПК}}}=\frac{\tilde{p}_{\text{КП}}\left(R^{\text{ПК}}\right)^2}{4\delta^{\text{ПК}}}\frac{1-\left(\nu^{\text{ПК}}\right)^2}{E^{\text{ПК}}}, \tag{20}$$

$$u_r^{\text{ЛА}}\approx-\frac{\tilde{p}_{\text{КП}}R^{\text{ЛА}}}{2\left[\left(R^{\text{ЛА}}\right)^2-\left(R_{\text{внут}}^{\text{ЛА}}\right)^2\right]}\left[\frac{\left(R^{\text{ЛА}}\right)^2}{\lambda^{\text{ЛА}}+\mu^{\text{ЛА}}}+\frac{\left(R_{\text{внут}}^{\text{ЛА}}\right)^2}{\mu^{\text{ЛА}}}\right]\approx-\frac{\tilde{p}_{\text{КП}}\left(R^{\text{ЛА}}\right)^2}{4\delta^{\text{ЛА}}}\times$$

$$\times\frac{\lambda^{\text{ЛА}}+2\mu^{\text{ЛА}}}{\left(\lambda^{\text{ЛА}}+\mu^{\text{ЛА}}\right)\mu^{\text{ЛА}}}=-\frac{\tilde{p}_{\text{КП}}\left(R^{\text{ЛА}}\right)^2}{4\delta^{\text{ЛА}}}\frac{1-\left(\nu^{\text{ЛА}}\right)^2}{E^{\text{ЛА}}},$$

где λ, μ — упругие константы Ламе; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Руководствуясь приведенными формулами, положим:

$$u_r^{\text{ПК}}=k^{\text{ПК}}\overline{p}_{\text{КП}},\ u_r^{\text{ЛА}}=-k^{\text{ЛА}}\overline{p}_{\text{КП}},\ \overline{p}_{\text{КП}}=\frac{\tilde{p}_{\text{КП}}}{p_{\text{атм}}},$$

$$k^{\text{ПК}}=\frac{p_{\text{атм}}\left(R^{\text{ПК}}\right)^2}{4\delta^{\text{ПК}}}\frac{1-\left(\nu^{\text{ПК}}\right)^2}{E^{\text{ПК}}},\ \ k^{\text{ЛА}}=\frac{p_{\text{атм}}\left(R^{\text{ЛА}}\right)^2}{4\delta^{\text{ЛА}}}\frac{1-\left(\nu^{\text{ЛА}}\right)^2}{E^{\text{ЛА}}}. \qquad (21)$$

Для многих материалов $\nu=0,25-0,30,$ что дает $\nu^2\ll 1,$ тогда соотношения (20) соответствуют формуле в работе [28]. Однако в широком диапазоне значений ν такое предположение может оказаться неточным [34, 52], поэтому будем придерживаться соотношений (20), (21).

Из уравнения баланса импульса для КП между жесткими стенками постоянного радиуса (см. рис. 3) следует, что $\partial p_{\text{в}}/\partial x$ не зависит от x, т. е. в каждый момент времени давление вдоль столба воды изменяется линейно. При учете упругости стенок КП сохраним эту зависимость в качестве аппроксимации. Тогда, согласно формулам (21), радиальные координаты стенок ПК и ЛА также будут изменяться по линейному закону, т. е. в каждый момент времени столб воды будет занимать кольцевой объем между усеченными конусами величиной

$$\Omega_{\text{в}}=\frac{\pi h_{\text{в}}}{3}\left(a_2^2+a_2b_2+b_2^2-a_1^2-a_1b_1-b_1^2\right)\equiv h_{\text{в}}\omega_0, \qquad (22)$$

где

$$h_{\text{в}}=L^{\text{ПК}}-x_{\text{гв}}=-z_{\text{гв}},$$

$$a_{1,2}=R^{\text{ЛА}}_{\text{ПК}}+u^{\text{ЛА}}_{r,\text{ПК}}(x_{\text{гв}},t)=R^{\text{ЛА}}_{\text{ПК}}\mp k^{\text{ЛА}}_{\text{ПК}}\overline{p}_{\text{г}}, \qquad (23)$$

$$b_{1,2}=R^{\text{ЛА}}_{\text{ПК}}+u^{\text{ЛА}}_{r,\text{ПК}}\left(L^{\text{ПК}},t\right)=R^{\text{ЛА}}_{\text{ПК}}\mp k^{\text{ЛА}}_{\text{ПК}}\overline{p}_{\text{втек}}.$$

Из формул (18), (20), (21) получаем:

$$\Sigma^{\text{КП}}(x,t)=\pi\left(R^{\text{ПК}}+k^{\text{ПК}}\overline{p}_{\text{КП}}\right)^2-\pi\left(R^{\text{ЛА}}-k^{\text{ЛА}}\overline{p}_{\text{КП}}\right)^2,$$

$$\Sigma^{\text{КП}}_{\text{г}}=\Sigma^{\text{КП}}(x_{\text{гв}},t)=\pi\left(a_2^2-a_1^2\right),\ \ \Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}=\Sigma^{\text{КП}}\left(L^{\text{ПК}},t\right)=\pi\left(b_2^2-b_1^2\right). \qquad (24)$$

Уравнение баланса массы (13) для столба воды перепишем как

$$\frac{d\Omega_{\text{в}}}{dt}=-v_{\text{втек}}\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}. \qquad (25)$$

Затем, дифференцируя выражения (22), (23), приходим к соотношению

$$-\omega_0 v_{\text{гв}}+\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}v_{\text{втек}}+h_{\text{в}}a_{\text{г}}\overline{p}_{\text{г},t}+h_{\text{в}}a_{\text{втек}}\overline{p}_{\text{втек},t}=0, \qquad (26)$$

где

$$a_{\text{г}}=\frac{\pi}{3}\left[k^{\text{ПК}}\left(2a_2+b_2\right)+k^{\text{ЛА}}\left(2a_1+b_1\right)\right],\ \ \overline{p}_{\text{г},t}\equiv\dot{\overline{p}}_{\text{г}};$$

$$a_{\text{втек}}=\frac{\pi}{3}\left[k^{\text{ПК}}\left(a_2+2b_2\right)+k^{\text{ЛА}}\left(a_1+2b_1\right)\right],\ \ \overline{p}_{\text{втек},\,t}\equiv\dot{\overline{p}}_{\text{втек}};$$

$$a_{\text{г}}\overline{p}_{\text{г},t}+a_{\text{втек}}\overline{p}_{\text{втек},\,t}=\dot{\omega}_0\equiv\omega_{0,t}.$$

Объемный расход воды внутрь КП определяется выражением $Q=v_{\text{втек}}(t)\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}(t)$. Учитывая формулы (23), соотношение (12) запишем в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(v_{\text{втек}}\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}\right)=\frac{b_2}{\alpha_{\text{вх}}}\left(\frac{p_H-p_{\text{втек}}}{\rho_{\text{в}}}-0,5\tilde{\beta}_{\text{вх}}v^2_{\text{втек}}\right).\qquad(27)$$

Из соотношения (15) при $n=1$ получаем:

$$\dot{\overline{p}}_{\text{г},t}\Omega_{\text{г}}+2\overline{p}_{\text{г},t}\dot{\Omega}_{\text{г}}+\ddot{\Omega}_{\text{г}}\left(1+\overline{p}_{\text{г}}\right)=0.\qquad(28)$$

Объем газа в КП вычисляем по модифицированной формуле

$$\Omega_{\text{г}}(t)=\Sigma^{\text{КП}}_{\text{г}}\left[x_{\text{гв}}-L(t)-x_0\right]\equiv\Sigma^{\text{КП}}_{\text{г}}h_{\text{г}}.$$

Согласно формулам (24), имеем:

$$\dot{\Sigma}^{\text{КП}}_{\text{г}}=a_{12}\overline{p}_{\text{г},t},\ \ \ddot{\Sigma}^{\text{КП}}_{\text{г}}=a_3\overline{p}^2_{\text{г},t}+a_{12}\dot{\overline{p}}_{\text{г},t},$$

$$a_{12}=2\pi\left(k^{\text{ПК}}a_2+k^{\text{ЛА}}a_1\right),\ \ a_3=2\pi\left[\left(k^{\text{ПК}}\right)^2-\left(k^{\text{ЛА}}\right)^2\right].$$

Тогда соотношение (28) принимает вид

$$\Sigma^{\text{КП}}_{\text{г}}\left(1+\overline{p}_{\text{г}}\right)\dot{v}_{\text{гв}}+\left[\Omega_{\text{г}}+a_{12}h_{\text{г}}\left(1+\overline{p}_{\text{г}}\right)\right]\dot{\overline{p}}_{\text{г},t}=-2\overline{p}_{\text{г},t}\Omega_{\text{г},t}-a_4\left(1+\overline{p}_{\text{г}}\right),\qquad(29)$$

где $\Omega_{\text{г},t}=a_{12}h_{\text{г}}\overline{p}_{\text{г},t}+\Sigma^{\text{КП}}_{\text{г}}h_{\text{г},t};\ \ h_{\text{г},t}=v_{\text{гв}}-V(t);\ \ a_4=a_3h_{\text{г}}\overline{p}^2_{\text{г},t}+2a_{12}h_{\text{г},t}\overline{p}_{\text{г},t}-\Sigma^{\text{КП}}_{\text{г}}A(t).$

Наконец, аналогичное формуле (14) уравнение баланса импульса позволяет записать:

$$\frac{dK_{\text{в}}}{dt}=\Sigma^{\text{КП}}_{\text{г}}p_{\text{г}}-\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}p_{\text{втек}}-\rho_{\text{в}}v^2_{\text{втек}}\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}-\rho_{\text{в}}\Omega_{\text{в}}g\sin\vartheta+F^{\text{КП}}_{\text{сопр}},$$

$$K_{\text{в}}=\rho_{\text{в}}\int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}}v_{\text{в}}\Sigma^{\text{КП}}dx=\rho_{\text{в}}\left[\left(xv_{\text{в}}\Sigma^{\text{КП}}\right)\Big|_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}}-\int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}}x\frac{\partial}{\partial x}\left(v_{\text{в}}\Sigma^{\text{КП}}\right)dx\right].\qquad(30)$$

Используя соотношение (19), получаем:

$$\rho^{-1}_{\text{в}}K_{\text{в}}=L^{\text{ПК}}v_{\text{втек}}\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}-x_{\text{гв}}v_{\text{гв}}\Sigma^{\text{КП}}_{\text{г}}+\int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}}x\frac{\partial\Sigma^{\text{КП}}}{\partial t}dx=L^{\text{ПК}}v_{\text{втек}}\Sigma^{\text{КП}}_{\text{втек}}+\frac{d}{dt}\int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}}x\Sigma^{\text{КП}}dx.$$

Поскольку $\Omega_{\text{в}} = \int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}} \Sigma^{\text{КП}} dx$, то $\int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}} x\Sigma^{\text{КП}} dx = \int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}} (x - x_{\text{гв}})\Sigma^{\text{КП}} dx + x_{\text{гв}}\Omega_{\text{в}}$. Интеграл $\int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}} (x - x_{\text{гв}})\Sigma^{\text{КП}} dx$ — это статический момент инерции усеченного конического кольца, рассмотренного при выводе формулы (22), относительно плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $(x_{\text{гв}}, 0, 0)$. В результате соответствующих вычислений имеем:

$$\int\limits_{x_{\text{гв}}}^{L^{\text{ПК}}} (x - x_{\text{гв}})\Sigma^{\text{КП}} dx = \frac{\pi h_{\text{в}}^2}{12}\Big[(a_j + b_j)^2 + 2b_j^2\Big]_{j=1}^{j=2} \equiv h_{\text{в}}^2\omega_1.$$

Следовательно

$$\rho_{\text{в}}^{-1} K_{\text{в}} = h_{\text{в}} v_{\text{втек}} \Sigma_{\text{втек}}^{\text{КП}} + v_{\text{гв}}\Omega_{\text{в}} + \frac{d}{dt}(h_{\text{в}}^2\omega_1),$$

$$\rho_{\text{в}}^{-1}\frac{dK_{\text{в}}}{dt} = -v_{\text{гв}} v_{\text{втек}}\Sigma_{\text{втек}}^{\text{КП}} + h_{\text{в}}\frac{d}{dt}\Big(v_{\text{втек}}\Sigma_{\text{втек}}^{\text{КП}}\Big) + \Omega_{\text{в}}\dot{v}_{\text{гв}} + v_{\text{гв}}\frac{d\Omega_{\text{в}}}{dt} + \frac{d^2}{dt^2}(h_{\text{в}}^2\omega_1) =$$

$$= \Omega_{\text{в}}\dot{v}_{\text{гв}} - 2v_{\text{гв}} v_{\text{втек}}\Sigma_{\text{втек}}^{\text{КП}} + \frac{b_2 h_{\text{в}}}{\alpha_{\text{вх}}}\left(\frac{p_H - p_{\text{втек}}}{\rho_{\text{в}}} - 0,5\tilde{\beta}_{\text{вх}} v_{\text{втек}}^2\right) + \frac{d^2}{dt^2}(h_{\text{в}}^2\omega_1).$$

Вычислим последнее слагаемое:

$$\frac{d}{dt}(h_{\text{в}}^2\omega_1) = -2h_{\text{в}} v_{\text{гв}}\omega_1 + h_{\text{в}}^2\omega_{1,t},\ \ \dot{\omega}_1 \equiv \omega_{1,t} = \tilde{a}_{\text{г}}\overline{p}_{\text{г},t} + \tilde{a}_{\text{втек}}\overline{p}_{\text{втек},t},$$

$$\tilde{a}_{\text{г}} = \frac{\pi}{6}\Big[k^{\text{ПК}}(a_2 + b_2) + k^{\text{ЛА}}(a_1 + b_1)\Big],\ \tilde{a}_{\text{втек}} = \frac{\pi}{6}\Big[k^{\text{ПК}}(a_2 + 3b_2) + k^{\text{ЛА}}(a_1 + 3b_1)\Big],$$

$$\dot{\tilde{a}}_{\text{г}} = \tilde{k}(\overline{p}_{\text{г},t} + \overline{p}_{\text{втек},t}),\ \ \dot{\tilde{a}}_{\text{втек}} = \tilde{k}(\overline{p}_{\text{г},t} + 3\overline{p}_{\text{втек},t}),\ \ \tilde{k} = 12^{-1}a_3,$$

$$\ddot{\omega}_1 = \tilde{a}_{\text{г}}\dot{\overline{p}}_{\text{г},t} + \tilde{a}_{\text{втек}}\dot{\overline{p}}_{\text{втек},t} + \dot{\tilde{a}}_{\text{г}}\overline{p}_{\text{г},t} + \dot{\tilde{a}}_{\text{втек}}\overline{p}_{\text{втек},t} = \tilde{a}_{\text{г}}\dot{\overline{p}}_{\text{г},t} + \tilde{a}_{\text{втек}}\dot{\overline{p}}_{\text{втек},t} + \omega_2,$$

$$\omega_2 = \tilde{k}\Big[\Big(\overline{p}_{\text{г},t} + \overline{p}_{\text{втек},t}\Big)\overline{p}_{\text{г},t} + \Big(\overline{p}_{\text{г},t} + 3\overline{p}_{\text{втек},t}\Big)\overline{p}_{\text{втек},t}\Big] = \tilde{k}\Big[\Big(\overline{p}_{\text{г},t} + \overline{p}_{\text{втек},t}\Big)^2 + 2\overline{p}_{\text{втек},t}^2\Big],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(h_{\text{в}}^2\omega_1) = 2v_{\text{гв}}^2\omega_1 - 2h_{\text{в}}\omega_1\dot{v}_{\text{гв}} - 4h_{\text{в}} v_{\text{гв}}\omega_{1,t} + h_{\text{в}}^2(\tilde{a}_{\text{г}}\dot{\overline{p}}_{\text{г},t} + \tilde{a}_{\text{втек}}\dot{\overline{p}}_{\text{втек},t} + \omega_2).$$

В результате подстановки в формулу (30) получим:

$$\Big(\Omega_{\text{в}} - 2h_{\text{в}}\omega_1\Big)\dot{v}_{\text{гв}} + \tilde{a}_{\text{г}}h_{\text{в}}^2\dot{\overline{p}}_{\text{г},t} + \tilde{a}_{\text{втек}}h_{\text{в}}^2\dot{\overline{p}}_{\text{втек},t} =$$

$$= \frac{\Sigma_{\text{г}}^{\text{КП}} p_{\text{г}} - \Sigma_{\text{втек}}^{\text{КП}} p_{\text{втек}}}{\rho_{\text{в}}} - \Omega_{\text{в}} g \sin\vartheta + \frac{F_{\text{сопр}}^{\text{КП}}}{\rho_{\text{в}}} - \frac{b_2 h_{\text{в}}}{\alpha_{\text{вх}}} \left(\frac{p_H - p_{\text{втек}}}{\rho_{\text{в}}} - 0,5 \tilde{\beta}_{\text{вх}} v_{\text{втек}}^2 \right) +$$

$$+ Q(2v_{\text{гв}} - v_{\text{втек}}) - 2v_{\text{гв}}^2 \omega_1 + 4h_{\text{в}} v_{\text{гв}} \omega_{1,t} - h_{\text{в}}^2 \omega_2. \qquad (31)$$

Для вычисления силы сопротивления оставляем прежнюю формулу (16).

Полученные соотношения должны быть разрешимы относительно старших производных $\dot{v}_{\text{гв}}$, $\dot{p}_{\text{г},t}$, $\dot{p}_{\text{втек},t}$, что требуется на каждом шаге интегрирования системы ОДУ. Дифференцируя соотношение (26) еще раз, имеем:

$$-\omega_0 \dot{v}_{\text{гв}} + h_{\text{в}} a_{\text{г}} \ddot{\overline{p}}_{\text{г},t} + h_{\text{в}} a_{\text{втек}} \ddot{\overline{p}}_{\text{втек},t} = -4\tilde{k} h_{\text{в}} (\overline{p}_{\text{г},t}^2 + \overline{p}_{\text{г},t} \overline{p}_{\text{втек},t} + \overline{p}_{\text{втек},t}^2) +$$

$$+ 2v_{\text{гв}} \omega_{0,t} - b_2 / \alpha_{\text{вх}} \left(\rho_{\text{в}}^{-1} (p_H - p_{\text{втек}}) - 0,5 \tilde{\beta}_{\text{вх}} v_{\text{втек}}^2 \right), \qquad (32)$$

поскольку

$$\dot{a}_{\text{г}} \overline{p}_{\text{г},t} + \dot{a}_{\text{втек}} \overline{p}_{\text{втек},t} = 2\tilde{k} \left[(2\overline{p}_{\text{г},t} + \overline{p}_{\text{втек},t}) \overline{p}_{\text{г},t} + (\overline{p}_{\text{г},t} + 2\overline{p}_{\text{втек},t}) \overline{p}_{\text{втек},t} \right] =$$

$$= 4\tilde{k} (\overline{p}_{\text{г},t}^2 + \overline{p}_{\text{г},t} \overline{p}_{\text{втек},t} + \overline{p}_{\text{втек},t}^2).$$

В момент вскрытия КП $(t_0 = 0)$ вода неподвижна, но ускорение частиц и давление в ней неоднородны из-за условия несжимаемости. Из выражений (12), (17) имеем: $a_{\text{гв}}(t_0) = \frac{p_H - p_0}{\alpha_{\text{вх}} \rho_{\text{в}}} \frac{R^{\text{ПК}}}{\Sigma^{\text{КП}}}$, $p_{\text{втек}}(t_0) = p_0 = p_{\text{атм}}$ — т. е. стенки ПК и ЛА деформируются непрерывно. Матрица СЛАУ, составленная для старших производных, при $t = t_0$ вырождена, поскольку $h_{\text{в}}(t_0) = 0$. По этой причине первые несколько расчетных шагов выполнялись по уравнению (17), затем вычисления велись по уравнениям (27), (29), (31), (32), а при $Q > 0$ вместо соотношения (27) использовалось условие (5). Начальные условия для ОДУ были приведены ранее. При дальнейшем расчете с использованием других формул новые начальные условия согласовывались с результатами предыдущих вычислений. Необходимо, однако, обратить внимание на соблюдение соотношений (15) и (25), из-за дополнительного дифференцирования уже не являющихся автоматическим следствием решаемых ОДУ. Интегрирование систем ОДУ проводилось численно методом Рунге — Кутты, результаты расчета параметров $p_{\text{г}}(t)$ и $p_{\text{втек}}(t)$ приведены на рис. 6. Данные графиков служат подтверждением того, что учет упругости стенок КП значительно снижает прогнозируемый максимум давления от втекания воды в КП.

Заключение. Представлена одномерная нестационарная расчетная схема математического моделирования процесса втекания воды в кольцевое пространство пускового контейнера при подводном газодинамическом выбросе ЛА. Получены расчетные оценки максимального давления $p_{\max}$, действующего на корпус ЛА в этом процессе. Подтверждена важность более детального исследования термодинамического процесса сжатия газового объема втекающей водой в отсутствие предварительного наддува КП. Показано, что учет податливости стенок ПК приводит к существенному снижению прогнозируемых значений $p_{\max}$. При этом увеличивается время сжатия газового объема, что влияет на теплообмен газа с окружающими его границами. По этой причине оба процесса следует рассматривать совместно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред*. В 2 ч. Москва, Наука, 1987, ч. 1, 464 с.; ч. 2, 360 с.

[2] Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. *Волновая динамика газо- и парожидкостных сред*. Москва, Энергоатомиздат, 1990, 248 с.

[3] Яковлев Ю.С. *Гидродинамика взрыва*. Ленинград, Судпромгиз, 1961, 316 с.

[4] Приходько Н.А., Сирый В.С. Расчет подъема пузырька горячего газа в вязком неравномерно нагретом слое жидкости. *Гидромеханика*, 1980, вып. 43, с. 85–93.

[5] Cole R.H. *Underwater explosions*. Princeton University Press, 1948, 437 p.

[6] Leighton T.G. *The acoustic bubble*. London, Academic Press, 1994, 613 p.

[7] Грумондз В.Т., Журавлев Ю.Ф., Парышев Э.В., Соколянский В.П., Шорыгин В.П. *Гидродинамика и динамика высокоскоростного движения тел в жидкости*. Москва, Наука, 2013, 574 с.

[8] Рождественский В.В. *Кавитация*. Ленинград, Судостроение, 1977, 247 с.

[9] Абрамович Г.Н. *Теория турбулентных струй*. Москва, Наука, 1984, 716 с.

[10] Якимов Ю.Л. *Сборник статей*. Москва, Изд-во Московского университета, 2013, 536 с.

[11] Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. *Тепломассобмен и волны в газожидкостных системах*. Новосибирск, Наука, 1984, 301 с.

[12] Алемасов В.Е. *Теория ракетных двигателей*. Москва, Оборонгиз, 1962, 476 с.

[13] Ваулин С.Д., Кириллов В.В., Феофилактов В.И. Математическая модель газодинамических процессов в низкотемпературном газогенераторе с камерой охлаждения. *Ракетно-космическая техника*. Сер. XIV, 2004, вып. 1 (50), ч. I, с. 181–190.

[14] Якимов Ю.Л., Ерошин В.А., Романенков Н.И. Моделирование движения тела в воде с учетом ее сжимаемости. *Некоторые вопросы механики сплошной среды*. Москва, Изд-во Московского университета, 1978, с. 29–33.

[15] Lohse D., Schmitz B., Versluis M. Snapping shrimp make flashing bubbles. *Nature*, 2001, no. 413, pp. 477–478.

[16] Scorer R.S. *Environmental aerodynamics*. New York, Halsted Press, 1978, 551 p.

[17] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. Приветствие

к выходу первого номера журнала «Математическое моделирование и численные методы». *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1 (1), с. 3–4.

[18] Perot B., Nallapati R. A moving unstructured staggered mesh method for the simulation of incompressible free-surface flows. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 184, no. 1, pp. 192–214.

[19] Peregrine D.H. The fascination of fluid mechanics. *Journal of Fluid Mechanics*, May 1981, vol. 106, pp. 91–119.

[20] Jürgens H., Peitgen H.-O., Saupe D. *The Language of Fractals*. Scientific American, 1990, no. 263, pp. 60–67.

[21] Апальков Ю.В., Мант Д.И., Мант С.Д. *Отечественные баллистические ракеты морского базирования и их носители*. СПб., Галея, 2006, 216 с.

[22] *Морские стратегические ракетные комплексы*. Москва, Военный парад, 2011, 268 с.

[23] Дегтярь В.Г., Пегов В.И. *Гидродинамика подводного старта ракет*. Москва, Машиностроение, 2009, 448 с.

[24] Ефремов Г.А., Страхов А.Н., Минасбеков Д.А., Горлашкин А.А., Плюснин А.В., Соколов П.М., Бондаренко Л.А., Говоров В.В. Отработка газодинамики подводного старта на наземном газодинамическом стенде предприятия. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация. Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XXXVIII Академических чтений по космонавтике.* Реутов, 2014, с. 65–74.

[25] Плюснин А.В., Бондаренко Л.А., Сабиров Ю.Р. Анализ газогидродинамических процессов и методов их расчета на основе опыта предприятия в отработке подводного минометного старта. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация. Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XXXIX Академических чтений по космонавтике*. Реутов, 2015, с. 74–83.

[26] Дергачев А.А., Бондаренко Л.А., Сабиров Ю.Р., Лобзов Н.Н., Плюснин А.В. *Способ старта ракет с подводной лодки, надводных кораблей и наземных носителей из незатопленной пусковой установки и пусковая установка для его реализации*. Пат. Российская Федерация № 2536961, Опубл. 27.12.2014, бюл. № 36.

[27] Плюснин А.В. Моделирование параметров наддува свободного пространства контейнера при газодинамическом выбросе летательного аппарата с учетом свойств реального газа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3 (11), с. 53–78.

[28] Жуковский Н.Е. *О гидравлическом ударе в водопроводных трубах*. Москва, Либроком, 2011, 104 с.

[29] Плюснин А.В. Учет эффекта вторичного догорания при расчетах систем газодинамического выброса летательного аппарата. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 55–73.

[30] Плюснин А.В. Исследование зависимости максимальной расчетной оценки давления «гидроудара» при подводном газодинамическом выбросе ЛА от выбора физической модели явления. *Сборник тезисов XLI Академических чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства.* Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, с. 516.

[31] Плюснин А.В., Бондаренко Л.А. Способы крупномасштабного моделирования систем газодинамического выброса. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баума-*

на. Сер. Естественные науки, 2012. Спец. выпуск № 4. «Математическое моделирование», с. 111–122.

[32] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[33] Григолюк Э.И., Горшков А.Г. *Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение)*. Ленинград, Судостроение, 1976, 200 с.

[34] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[35] Ерошин В.А., Плюснин А.В., Романенков Н.И., Созоненко Ю.А., Якимов Ю.Л. О влиянии атмосферы на величину гидродинамических сил при плоском ударе диска о поверхность сжимаемой жидкости. *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*, 1984, № 3, с. 15–20.

[36] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[37] Плюснин А.В. Расчет нестационарной гидродинамической нагрузки на крышку пускового устройства при подводном выбросе ЛА избыточным давлением газа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/ catalog/hmodel/aero/847.html (дата обращения 03.10.2017).

[38] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Наука, 1987, 840 с.

[39] Соболев С.Л. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1966, 444 с.

[40] Седов Л.И. *Механика сплошной среды. В 2 т. Т. 2.* Санкт-Петербург, Лань, 2004, 560 с.

[41] Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1932, 928 p.

[42] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука, 1987, 688 с.

[43] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 3. Специальные функции*. Москва, Наука, 1983, 752 с.

[44] Плюснин А.В., Бондаренко Л.А., Сабиров Ю.Р. Расчет нестационарной гидродинамической нагрузки, действующей на деформируемую панель оперения ЛА. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация. Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XL Академических чтений по космонавтике*. Реутов, 2016, с. 185–196.

[45] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*. Москва, Наука, 1974, 296 с.

[46] Batchelor G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 615 p.

[47] Плюснин А.В. Расчет коэффициентов внутреннего и внешнего нестационарного взаимодействия корпуса ЛА с жидкостью методом граничных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, вып. 2, с. 77–100.

[48] Плюснин А.В., Доденко И.А. Исследование точности метода распределенной присоединенной массы при расчете нестационарной поперечной нагрузки на деформируемый корпус ЛА при подводном выбросе. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/841.html (дата обращения 03.10.2017).

[49] Идельчик И.Е. *Справочник по гидравлическим сопротивлениям*. Москва, Машиностроение, 1992, 672 с.
[50] Сиов Б.Н. *Истечение жидкости через насадки*. Москва, Машиностроение, 1968, 140 с.
[51] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. *Теория упругости*. Москва, Наука, 1979, 560 с.
[52] Полилов А.Н. *Этюды по механике композитов*. Москва, Физматлит, 2016, 320 с.

Статья поступила в редакцию 29.04.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Плюснин А.В. Математическое моделирование процесса втекания воды в кольцевое прстранство контейнера при подводном газодинамическом выбросе летательного аппарата. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 39–64.

Плюснин Андрей Владимирович окончил Днепропетровский государственный университет по специальности «Гидроаэродинамика» и аспирантуру кафедры «Волновая и газовая динамика» МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент-совместитель кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, заместитель начальника отдела АО «ВПК «НПО машиностроения». Автор порядка 30 работ по нестационарным задачам гидрогазодинамики и теории упругости. e-mail: andrey.plusnin@gmail.com

Mathematical simulation of the process of water entering the annular space of a canister during submarine gas-driven aircraft ejection

© A.V. Plyusnin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The study deals with a one-dimensional analytical model for computing the loads on the body of an aircraft caused by water entering the annular space of a launch canister. We used potential theory to solve the "external" hydrodynamic problem. Solving Lamé equations for the static case accounts for the strain in the walls of the aircraft and the launch canister.

Keywords: *aircraft, submarine ejection, annular space, water influx*

REFERENCES

[1] Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multi-phase media]. In 2 vols. Moscow, Nauka Publ., 1987, vol. 1, 464 p.; vol. 2, 360 p.
[2] Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G., Shreyber I.R. *Volnovaya dinamika gazo- i parozhidkostnykh sred* [Wave dynamics of gas-liquid and vapour-liquid media]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1990, 248 p.
[3] Yakovlev Yu.S. *Gidrodinamika vzryva* [Hydrodynamics of explosion]. Leningrad, State Publishing House for Shipbuilding Literature, 1961, 316 p.
[4] Prikhodko N.A., Siryy V.S. *Gidromekhanika — Hydromechanics*, 1980, no. 43, pp. 85–93.
[5] Cole R.H. *Underwater explosions*. Princeton University Press, 1948, 437 p.
[6] Leighton T.G. *The acoustic bubble*. London, Academic Press, 1994, 613 p.

[7] Grumondz V.T., Zhuravlev Yu.F., Paryshev E.V., Sokolyanskiy V.P., Shorygin V.P. *Gidrodinamika i dinamika vysokoskorostnogo dvizheniya tel v zhidkosti* [Hydrodynamics and dynamics of high-speed motion of bodies in fluid]. Moscow, Nauka Publ., 2013, 574 p.

[8] Rozhdestvenskiy V.V. *Kavitatsiya* [Cavitation]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1977, 247 p.

[9] Abramovich G.N. *Teoriya turbulentnykh struy* [Theory of turbulent jets]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 716 p.

[10] Yakimov Yu.L. *Sbornik statey* [Collected publications]. Moscow, Moscow State University Publ., 2013, 536 p.

[11] Kutateladze S.S., Nakoryakov V.E. *Teplomassobmen i volny v gazozhidkostnykh sistemakh* [Heat and mass transfer and waves in gas-liquid systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 301 p.

[12] Alemasov V.E. *Teoriya raketnykh dvigateley* [Theory of rocket engines]. Moscow, State Publishing House for the Defense Industry, 1962, 476 p.

[13] Vaulin S.D., Kirillov V.V., Feofilaktov V.I. Matematicheskaya model gazodinamicheskikh protsessov v nizkotemperaturnom gazogeneratore s kameroy okhlazhdeniya [Mathematical model of gas-dynamic processes in a low-temperature gas generator with a cooling chamber]. *Raketno-kosmicheskaya tekhnika*. *Ser. XIV* [Aerospace technology. Series 14], 2004, no. 1 (50), vol. 1, pp. 181–190.

[14] Yakimov Yu.L., Eroshin V.A., Romanenkov N.I. Modelirovanie dvizheniya tela v vode s uchetom ee szhimaemosti [Simulating motion of a body in water, considering its compressibility]. *Nekotorye voprosy mekhaniki sploshnoy sredy* [Certain problems in continuum mechanics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1978, pp. 29–33.

[15] Lohse D., Schmitz B., Versluis M. *Nature*, 2001, no. 413, pp. 477–478.

[16] Scorer R.S. *Environmental aerodynamics*. New York, Halsted Press, 1978, 551 p.

[17] Aleksandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1 (1), pp. 3–4.

[18] Perot B., Nallapati R. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 184, no. 1, pp. 192–214.

[19] Peregrine D.H. *Journal of Fluid Mechanics*, May 1981, vol. 106, pp. 91–119.

[20] Jürgens H., Peitgen H.-O., Saupe D. *Scientific American*, 1990, no. 263, pp. 60–67.

[21] Apalkov Yu.V., Mant D.I., Mant S.D. *Otechestvennyye ballisticheskiye rakety morskogo bazirovaniya i ikh nositeli* [National sea-launched ballistic missiles and their carriers]. St. Petersburg, Galeya Print Publ., 2006, 216 p.

[22] *Morskiye strategicheskiye raketnye kompleksy* [Marine strategic missile system]. Moscow, Voyennyy parad Publ., 2011, 268 p.

[23] Degtyar V.G., Pegov V.I. *Gidrodinamika podvodnogo starta raket* [Hydrodynamics of the submarine missile takeoff]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 2009, 448 p.

[24] Efremov G.A., Strakhov A.N., Minasbekov D.A., Gorlashkin A.A., Plyusnin A.V., Sokolov P.M., Bondarenko L.A., Govorov V.V. Otrabotka gazodinamiki podvodnogo starta na nazemnom gazodinamicheskom stende predpriyatiya [Underwater launch gas dynamic tests on the ground gas dynamics ground test bench of the enterprise]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskie sistemy — proektirovanie, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya. Trudy sektsii 22 im. akad. V.N. Chelomeya XXXVIII Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike* [Rocket and space-rocket systems — designing, experimental

tests, flight tests, exploitation. Proc. of the 22nd section acad. V.N. Chelomei of XXXVIII Academic Space Technology Readings]. Reutov, 2014, pp. 65–74.

[25] Plyusnin A.V., Bondarenko L.A., Sabirov Yu.R. Analiz gazogidrodinamicheskikh protsessov i metodov ikh rascheta na osnove opyta predpriyatiya v otrabotke podvodnogo minometnogo starta [Analysis of gas and hydro dynamic processes and their calculating methods on the basis of the enterprise experiments in underwater mortar launch tests]. *Raketnyye kompleksy i raketno-kosmicheskiye sistemy — proyektirovaniye, eksperimentalnaya otrabotka, letnyye ispytaniya, ekspluatatsiya. Trudy sektsii 22 im. akad. V.N. Chelomeya XXXIX Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike* [Rocket and space-rocket systems — designing, experimental tests, flight tests, exploitation. Proceedings of the 22nd section named after acad. V.N. Chelomei of the XXXIX Academic Space Technology Readings]. Reutov, 2015, pp. 74–83.

[26] Dergachev A.A., Bondarenko L.A., Sabirov Yu.R., Lobzov N.N., Plyusnin A.V. *Sposob starta raket s podvodnoy lodki, nadvodnykh korabley i nazemnykh nositeley iz nezatoplennoy puskovoy ustanovki i puskovaya ustanovka dlya ego realizatsii* [A way for launching rockets from a submarine, surface combatants and ground vehicles using a non-submerged launcher and a launcher to implement it]. Patent RU2536961, bulletin no. 36, Dec 27th, 2014.

[27] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 3 (11), pp. 53–78.

[28] Zhukovskiy N.E. *O gidravlicheskom udare v vodoprovodnykh trubakh* [On water hammer in water plumbing pipes]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2011, 104 p.

[29] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3 (3), pp. 55–73.

[30] Plyusnin A.V. Issledovanie zavisimosti maksimalnoy raschetnoy otsenki davleniya “gidroudara” pri podvodnom gazodinamicheskom vybrose LA ot vybora fizicheskoy modeli yavleniya [Investigating how the maximum estimated value of fluid hammer pressure during submarine gas-driven aircraft ejection depends on the physical model selected to describe the phenomenon]. *Sbornik tezisov XLI Akademicheskih chteniy po kosmonavtike, posvycshennykh pamyati akademika V.N. Chelomeya i drugikh vydayushcihsya otechestvennykh uchenykh — pionerov osvoeniya kosmicheskogo prostranstva* [*Abstracts XLI Academic readings on cosmonautics, dedicated to the memory of academician S.P. Korolev and other outstanding domestic scientists — pioneers of space exploration*]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2017, p. 516.

[31] Plyusnin A.V., Bondarenko L.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Yestestvennyye nauki. Spets. vypusk “Matematicheskoye modelirovaniye” — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. Special iss. “Mathematical Modeling”*, 2012, no. 4, pp. 111–122.

[32] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[33] Grigolyuk E.I., Gorshkov A.G. *Vzaimodeystvie uprugikh konstruktsiy s zhidkostyu (udar i pogruzhenie)* [Elastic structure interaction with fluids (impact and submerging)]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1976, 200 p.

[34] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy*. *V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of mechanics of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[35] Eroshin V.A., Plyusnin A.V., Romanenkov N.I., Sozonenko Yu.A., Yakimov Yu.L. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics*, 1984, no. 3, pp. 15–20.

[36] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy V 4 tomakh. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnykh sred* [Mechanics of Continua. In 4 vols. Vol. 2. Universal Laws of Mechanics and Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[37] Plyusnin A.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2013, no. 7 (19), Available at: http://engjournal.ru/catalog/hmodel/aero/847.html (дата обращения 03.10.2017).

[38] Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 840 p.

[39] Sobolev S.L. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 444 p.

[40] Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. In 2 vols. Vol. 2. St. Petersburg, Lan Publ., 2004, 560 p.

[41] Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1932, 928 p.

[42] Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Complex variable theory methods]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 688 p.

[43] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady* [Integrals and series]. In 3 vols. Vol. 3. *Spetsialnye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 752 p.

[44] Plyusnin A.V., Bondarenko L.A., Sabirov Yu.R. Raschet nestatsionarnoy gidrodinamicheskoy nagruzki, deystvuyushchey na deformiruemuyu panel opereniya LA [Computing unsteady hydrodynamic loads on a deformable empennage panel]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskie sistemy — proektirovanie, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya: Trudy sektsii 22 imeni akademika V.N Chelomeya XL Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike* [Rocket and aerospace systems — design, experiment-based refinement, flight testing, operation: Proc. of the section 22 of V.N. Chelomey 40th Academic readings in cosmonautics]. Reutov, 2016, pp. 185–196.

[45] Bateman H., Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions*. In 3 vols. Vol. 2. McGraw-Hill Book Company, 1953, 396 p. [In Russ.: Bateman H., Erdély A. *Vysshie transtsendentnye funktsii*. In 3 vols. Vol. 2. *Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonalnye mnogochleny* [Bessel functions, functions of the parabolic cylinder, orthogonal polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 296 p.].

[46] Batchelor G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 615 p.

[47] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 77–100.

[48] Plyusnin A.V., Dodenko I.A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/841.html (accessed October 3, 2017).

[49] Idelchik I.E. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* [Handbook on friction loss values]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 672 p.

[50] Siov B.N. *Istechenie zhidkosti cherez nasadki* [Fluid flow through attachments]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 140 p.

[51] Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Education, 1970, 608 p. [In Russ.: Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Teoriya uprugosti*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 560 p.].

[52] Polilov A.N. *Etyudy po mekhanike kompozitov* [Studies in composite mechanics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2016, 320 p.

Plyusnin A.V., graduated from Dnepropetrovsk State University, majoring in Aerohydrodynamics and obtained a degree in the Department of Wave and Gas Dynamics, Lomonosov Moscow State University. Cand. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University, Deputy Director of the Department in at JSC "MIC "Mashinostroeniya". Author of approximately 30 publications in the field of nonstationary problems of hydrodynamics, gasdynamics and theory of elasticity.
e-mail: andrey.plusnin@gmail.com