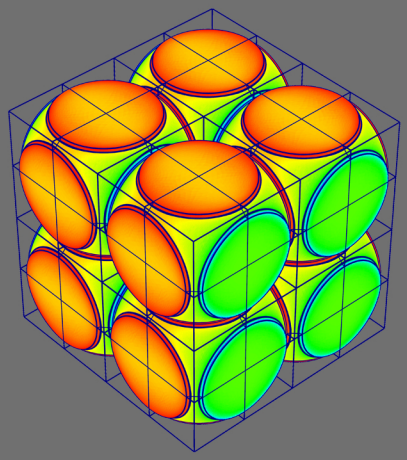
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование нагрузок на составные упругие оболочки методом начального приближения. Математическое моделирование и численные методы, 2017, No 2, с. 28–38.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/132/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.61
08.11.2026 15:15:16

УДК 62-752

Моделирование нагрузок на составные упругие оболочки методом начального приближения

© В.М. Дубровин, Т.А. Бутина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод расчета нагрузок (усилий, моментов) на составную оболочку, состоящую из внешней и внутренней оболочек, соединенных упругими связями, в случае когда внешняя оболочка находится под воздействием поперечной нагрузки (изгибающего момента, перерезывающих сил и распределенной инерционной нагрузки). В качестве примера использования метода исследовано влияние жесткостных характеристик внешней оболочки на нагружение внутренней оболочки.

Ключевые слова: *внешняя оболочка, внутренняя оболочка, составная оболочка, изгибающий момент, изгибная жесткость, передаточная матрица, матрица сосредоточенных нагрузок*

Введение. В настоящей статье рассматривается составная оболочка в случае, когда цилиндрическая оболочка переменной жесткости и массы с помощью ряда дискретных упругих опор закреплена в другой цилиндрической оболочке. Такая конструктивная композиция присутствует в различных технических системах: в магистральных трубопроводах, железнодорожном транспорте, авиационной технике, ракетостроении, рефрижераторах и др. Для оценки внутренних сил и моментов в конструкции составной оболочки можно использовать методы строительной механики, основанные на общей теории оболочек [1–7]. Однако в рассматриваемом случае с учетом сложности задачи более продуктивным с точки зрения временных затрат и простоты получения результата является метод начальных параметров. Этот метод для простых стержневых систем был предложен в работе [8]. В настоящей работе метод начальных параметров обобщен на случай сложной конструкции, которой является составная цилиндрическая оболочка. Данный метод позволяет получить оценку изгибающих моментов и перерезывающих сил, действующих как на внешнюю, так и на внутреннюю оболочку, если на внешнюю оболочку действует система нагрузок, приводящая ее в движение. При решении задачи было исследовано влияние проектных параметров на нагружение внутренней оболочки.

Математическая модель для расчета нагрузок на составную оболочку. Предположим, что цилиндрическая оболочка переменной жесткости и массы закреплена в другой цилиндрической оболочке с помощью ряда дискретных упругих опор. На внешнюю оболочку действует система сосредоточенных сил и моментов, приводящая ее

в движение, что обуславливает нагружение оболочки инерционными усилиями.

При решении задачи исследовалось влияние на нагружение внутренней оболочки жесткости внешней оболочки, соотношения жесткостей обеих оболочек, числа и жесткостных характеристик упругих связей между оболочками при заданном уровне воздействия на внешнюю оболочку.

Разобьем оболочки на участки с постоянными по длине массовыми и жесткостными характеристиками согласно методу начальных параметров. Выделим участки малой длины Δy_i, на которых действуют сосредоточенные нагрузки — реакции упругих связей между оболочками. Для участков, на которых отсутствуют сосредоточенные нагрузки, уравнения равновесия элемента оболочки, выделенного сечениями, перпендикулярными оси оболочки, имеют вид [7–12]

$$y_{i+1} = y_i + l_i\Theta_i + \frac{l_i^2}{2E_iJ_i}M_i + \frac{l_i^3}{6E_iJ_i}Q_i + \Delta y_i,$$

$$\Theta_{i+1} = \Theta_i + \frac{l_i}{E_iJ_i}M_i + \frac{l_i^2}{2E_iJ_i}Q_i + \Delta y_i,$$

$$M_{i+1} = M_i + l_iQ_i + \Delta M_i,$$

$$Q_{i+1} = Q_i + \Delta Q_i,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta y_i &= \left(n_{y_i}\frac{l_i^3}{4!} + n_\varphi\frac{l_i^4}{5!}\right)\frac{\Delta G_i}{E_iJ_i},\\
\Delta\Theta_i &= -\left(n_{y_i}\frac{l_i^2}{3!} + n_\varphi\frac{l_i^3}{4!}\right)\frac{\Delta G_i}{E_iJ_i},\\
\Delta M_i &= -\left(n_{y_i}\frac{l_i}{2!} + n_\varphi\frac{l_i^2}{3!}\right)\Delta G_i,\\
\Delta Q_i &= -\left(n_{y_i} + n_\varphi\frac{l_i}{2!}\right)\Delta G_i,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$n_{y_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\sum_{i=1}^{n}\Delta G_i},$$

$$n_\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{Kj}^* + \sum_{i=1}^{n} Q_{Kj}^*(x_j - x_\tau)}{J_0 g}.$$

Здесь y_i, Θ_i, M_i, Q_i — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и перерезывающая сила в i-м сечении оболочек; n_{y_i} — поперечная перегрузка в i-м сечении; n_φ — угловая перегрузка; M^*_{Kj}, Q^*_{Kj} — сосредоточенные момент и сила, действующие на внешнюю оболочку; l_i, ΔG_i, E_i, J_i — длина, масса и погонная изгибная жесткость i-го участка; J_0 — момент инерции составной оболочки; x_j, x_τ — координаты j-го сечения и центра масс составной оболочки; g — ускорение свободного падения.

Уравнения (1) справедливы как для внутренней, так и внешней оболочки.

В векторно-матричной форме уравнения (1) имеют вид

$$\eta_{i+1} = A_i \eta_i .$$

Здесь $\eta_{i+1} = \left(y_{p(i+1)} \Theta_{p(i+1)} M_{p(i+1)} Q_{p(i+1)} 1 y_{k(i+1)} \Theta_{k(i+1)} M_{k(i+1)} Q_{k(i+1)} 1 \right)^T$ — матрица параметров в $(i+1)$-м сечении; A_i — передаточная матрица i-го сечения; $\eta_i = \left(y_{pi} \Theta_{pi} M_{pi} Q_{pi} 1 y_{ki} \Theta_{ki} M_{ki} Q_{ki} 1 \right)^T$ — матрица параметров в i-м сечении. При этом индексы p и k относятся соответственно к внутренней и внешней оболочкам, а передаточная матрица имеет вид

$$A_i = \left(\begin{array}{ccccc:ccccc}
1 & \Delta l_i & \frac{\Delta l_i^2}{2(EJ)_{pi}} & \frac{\Delta l_i^3}{6(EJ_i)_{pi}} & \Delta y_i & & & & & \\
0 & 1 & \frac{\Delta l_i}{(EJ)_{pi}} & \frac{\Delta l_i^2}{2(EJ)_{pi}} & \Delta\Theta_i & & & & & \\
0 & 0 & 1 & \Delta l_i & \Delta M_i & & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \Delta Q_i & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
\hdashline
 & & & & & 1 & \Delta l_i & \frac{\Delta l_i^2}{2(EJ)_{ki}} & \frac{\Delta l_i^3}{6(EJ_i)_{ki}} & \Delta y_i \\
 & & & & & 0 & 1 & \frac{\Delta l_i}{(EJ)_{ki}} & \frac{\Delta l_i^2}{2(EJ)_{ki}} & \Delta\Theta_i \\
 & & & 0 & & 0 & 0 & 1 & \Delta l_i & \Delta M_i \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta Q_i \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right) .$$

Для участков, имеющих в своем составе сосредоточенные нагрузки (в местах постановки упругих связей между оболочками либо в местах передачи на внешнюю оболочку) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Q_{pi} &= \overline{Q}_{pi} + C_{pi}\left(y_{pi} - y_{ki}\right) - Q^*_{pi}, \\ Q_{ki} &= \overline{Q}_{ki} + C_{ki}\left(y_{ki} - y_{pi}\right) - Q^*_{ki}, \\ M_{pi} &= \overline{M}_{pi} + C_{\varphi i}\left(\Theta_{pi} - \Theta_{ki}\right) - M^*_{pi}, \\ M_{ki} &= \overline{M}_{ki} + C_{\varphi i}\left(\Theta_{ki} - \Theta_{pi}\right) - M^*_{ki}, \end{aligned} \tag{2}$$

где C_{pi}, $C_{\varphi i}$ — линейная и угловая жесткость *i*-й поперечной связи между оболочками; C_{ki} — жесткость упругой опоры на *K*-м участке; Q^*_{pi}, Q^*_{ki}, M^*_{pi}, M^*_{ki} — внешние сосредоточенные силы и моменты, действующие на оболочку.

Черта сверху обозначает параметры от сосредоточенной нагрузки слева (при условии, что отсчет координат ведется от левого конца оболочки). В векторно-матричной форме уравнения (2) можно записать как $\eta_i = B_i \overline{\eta}_i$, где B_i — матрица сосредоточенных нагрузок, определяемая по формуле

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\varphi i} & 1 & 0 & M^*_{pi} & 0 & -C_{\varphi i} & 0 & 0 & 0 \\ C_{ki} & 0 & 0 & 1 & -Q^*_{pi} & -C_{ki} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\varphi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\varphi i} & 1 & 0 & M^*_{ki} \\ -C_{ki} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{ki} & 0 & 0 & 1 & -Q^*_{ki} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью матриц сосредоточенных нагрузок и передаточных матриц может быть получено векторно-матричное уравнение, связывающее параметры нагрузок конечного и начального сечений составной оболочки:

$$\eta_n = B_1 A_1 B_2 A_2 \ldots B_n A_n \eta_0 = \prod_{i=1}^{n} B_i A_i \eta_0. \tag{3}$$

Для определения матрицы начальных параметров используются граничные условия на концах оболочки, соответствующие условиям их закрепления [9–14]: на левом конце $y_p(0) = y_k(0) = 0$, $\Theta_p(0) = \Theta_k(0) = 0$; на правом конце $y_p(l) = y_k(l) = 0$, $\Theta_p(l) = \Theta_k(l) = 0$ (где l — длина оболочки). При этом получается замкнутая система, допускающая однозначное решение. Так могут быть определены изгибающие моменты и перерезывающие силы в любом сечении оболочки.

Анализ влияния проектных параметров составной оболочки на нагружение внутренней оболочки. Используя предложенный метод, оценим влияние проектных параметров составной оболочки на нагружение внутренней оболочки.

В качестве проектных параметров выбраны число упругих опор, упругие характеристики опор, изгибная жесткость внешней и внутренней оболочек. Исходными данными при этом являются:

- линейная жесткость $C_i = 0,5 \cdot 10^7$ кг/м;
- угловая жесткость опоры $C_\varphi = 10^{17}$ кг/рад;
- изгибная погонная жесткость внутренней оболочки $EI_p = 10^{11} - 19 \cdot 10^{11}$ кг·см^2;
- изгибная погонная жесткость внешней оболочки $EI_k = 3,5 \cdot 10^{12}$ кг·см^2;
- погонная масса внутренней оболочки $\Delta G_p = 0,5 - 6,0$ т/м;
- погонная масса внешней оболочки $\Delta G_k = 10$ т/м.

Результаты расчета изгибающего момента $M_{\text{изг}}$ по длине внутренней оболочки представлены в зависимости от числа упругих опор (рис. 1), жесткости упругих опор (рис. 2), изгибной жесткости внешней (рис. 3) и внутренней (рис. 4) оболочек, сочетания изгибных жесткостей внутренней и внешней оболочек (рис. 5).

По данным представленных графиков (см. рис. 1), число упругих опор существенно влияет на величину $M_{\text{изг}}$. Однако увеличение числа опор не всегда дает одинаковый эффект с точки зрения снижения нагрузок на оболочку. Так, в рассматриваемом случае существенное снижение величины изгибающего момента достигается при увеличении числа опор с двух до четырех. Дальнейшее же увеличение дает сравнительно малый эффект. Учитывая, что постановка дополнительных опор приведет к усложнению конструкции, можно утверждать, что увеличение числа опор целесообразно лишь до определенного предела — в рассматриваемом случае это число равно четырем. Таким образом, для каждого конкретного случая существует оптимальное число опор.

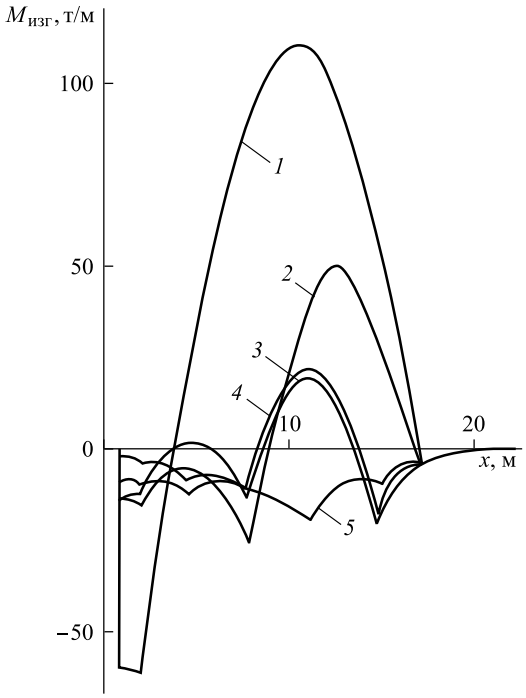


Рис. 1. Изменение изгибающего момента $M_{изг}$ по длине внутренней оболочки для двух (*1*), трех (*2*), четырех (*3*), пяти (*4*) и шести (*5*) опор

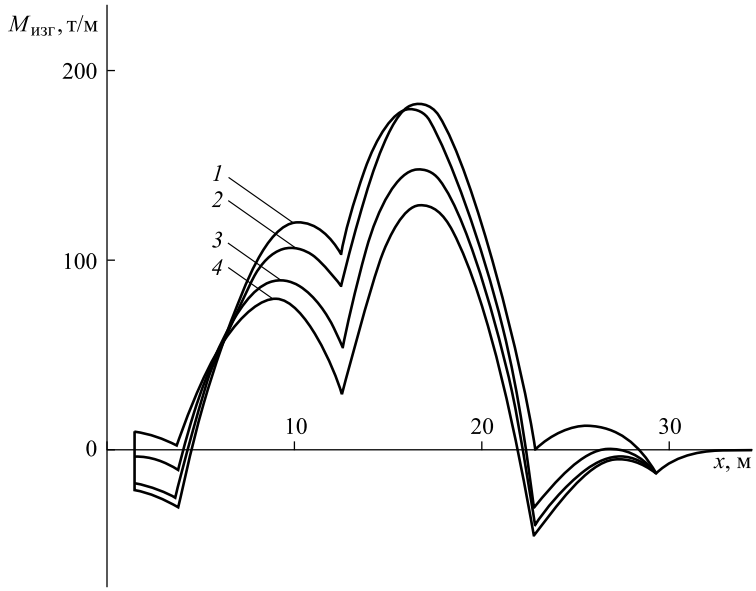


Рис. 2. Изменение изгибающего момента $M_{изг}$ по длине внутренней оболочки для различных жесткостей опор:

1 — $C_1 = C_3 = C_4 = C$, $C_2 = C/2$; *2* — $C_1 = C_4 = C$, $C_2 = C_4 = C/2$; *3* — $C_1 = C_4 = C$, $C_2 = C_3 = 2C$; *4* — $C_1 = C_4 = C/2$, $C_2 = C_4 = 5C$

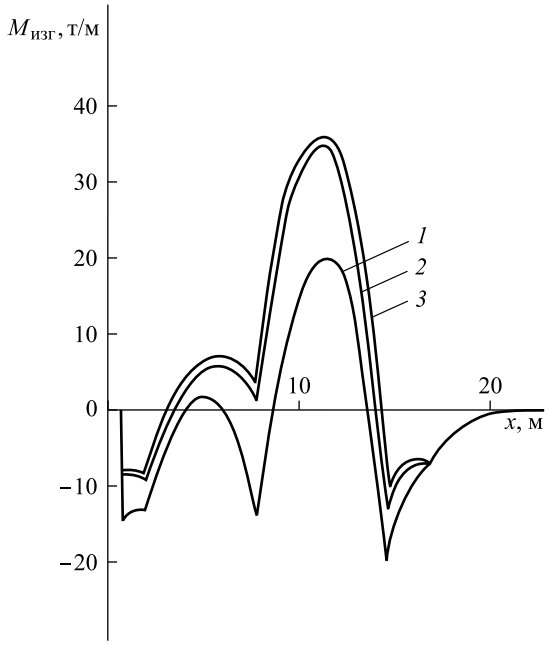


Рис. 3. Изменение изгибающего момента $M_{изг}$ по длине внутренней оболочки для изгибных жесткостей внешней оболочки, равных EI_k (*1*), $5EI_k$ (*2*), $10EI_k$ (*3*)

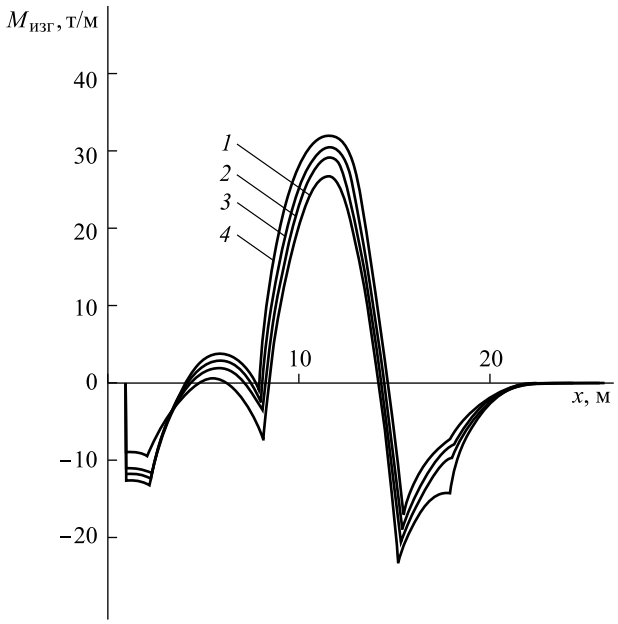


Рис. 4. Изменение изгибающего момента $M_{изг}$ по длине внутренней оболочки для изгибных жесткостей внутренней оболочки, равных EI_p (*1*), $2EI_p$ (*2*), $3EI_p$ (*3*), $5EI_p$ (*4*)

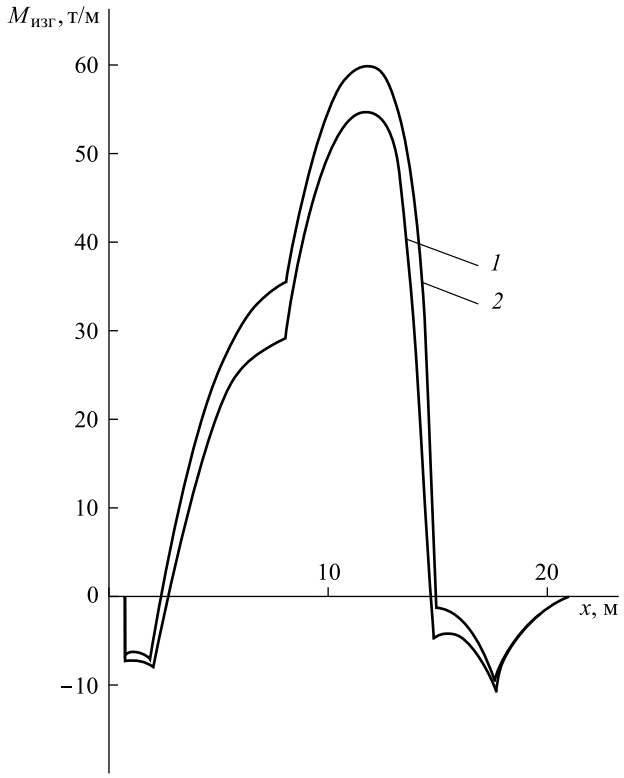


Рис. 5. Изменение изгибающего момента $M_{изг}$ по длине внутренней оболочки для сочетаний изгибных жесткостей внутренней и внешней оболочек:
1 — $2EI_p$; $5EI_k$; *2* — $3EI_p$; $10EI_k$

Еще один существенный фактор, влияющий на нагружения внутренней оболочки, — это характеристики упругих опор. Как следует из полученных результатов (см. рис. 2), для четырехопорной схемы при жесткости средних опор на порядок больше жесткости крайних опор максимальный изгибающий момент $M_{изг}$ на 30 % ниже максимального изгибающего момента при жесткости средних опор, в два раза меньшей жесткости крайних опор. Из этого следует, что путем выбора жесткостей опор можно обеспечить оптимальный режим нагружения оболочки.

Кроме того, на нагружения внутренней оболочки влияет изгибная жесткость внешней и внутренней оболочек. Этот фактор имеет существенное значение и для величины изгибающего момента (см. рис. 3–5). Изменяя изгибную жесткость оболочек, можно не только уменьшить максимальное значение изгибающего момента, но и изменить его место приложения, что дает возможность перераспределять нагрузку по длине оболочки. Следовательно, в каждом конкретном случае есть оптимальное соотношение между изгибными жесткостями внутрен-

ней и внешней оболочки с точки зрения нагружения внутренней оболочки.

Таким образом, соответствующим выбором проектных параметров составной оболочки можно обеспечить оптимальные условия ее работы с точки зрения минимизации нагрузки, действующей на оболочку.

Заключение. Метод начальных параметров, предложенный в настоящей статье, позволяет при воздействии на внешнюю оболочку оценить нагрузки, действующие на внешнюю и внутреннюю оболочки, образующие составную оболочку. Было установлено, что число упругих опор существенно влияет на величину изгибающего момента. Варьируя это число, можно обеспечить оптимальное условие нагружения внутренней оболочки.

Нагрузка на внутреннюю оболочку существенно зависит от жесткостных характеристик внешней оболочки. При этом увеличение жесткости внешней оболочки может снижать нагрузку на отдельных участках внутренней оболочки и одновременно увеличивать ее на других участках, что позволяет оптимально выбирать характеристики внешней оболочки для обеспечения равнопрочности внутренней оболочки по всей ее длине.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоносов С.М. *Математическое моделирование равновесных упругих тонких оболочек*. Москва, Наука, 1993, 158 с.

[2] Жилин П.А. *Основы теории оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во политехнического университета, 2006, 306 с.

[3] Работнов Ю.Н. *Проблемы механики деформируемого твердого тела. Избранные труды*. Москва, Наука, 1991, 194 с.

[4] Окопный Ю.А., Родин В.П., Чарков И.П. *Механика материалов и конструкций*. Москва, Машиностроение, 2001, 407 с.

[5] Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек*. Москва, Наука, 1989, 373 с.

[6] Агамиров В.Л. *Динамические задачи нелинейной теории оболочек*. Москва, Наука, 1990, 269 с.

[7] Бакулин В.Н. *Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек*. Москва, Наука, 1998, 462 с.

[8] Ивович В.А. *Переходные матрицы в динамике упругих систем*. Москва, Машиностроение, 1969, 197 с.

[9] Димитриенко Ю.И. *Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. *В 2 т. Т. 2*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[10] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 456 с.

[11] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматгиз, 2009, 624 с.

[12] Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при воздействии ударной сосре-

доточенной нагрузки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9 (21). DOI 10.18698/2308-6033-2013-9-957

[13] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Устойчивость цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, с. 127–133.

[14] Бушуев А.Ю., Яковлев Д.О. О подходе к оптимизации упругих конструкций по частотным характеристикам. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011. Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 66–69.

Статья поступила в редакцию 27.05.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование нагрузок на составные упругие оболочки методом начального приближения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 28–38.

Дубровин Виктор Митрофанович окончил Саратовский государственный университет. Канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Автор пяти изобретений. e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Бутина Татьяна Александровна окончила Московский физико-технический институт. Канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. e-mail: butina_ta@mail.ru

Modeling loads on compound elastic shells by means of the initial approximation method

© V.M. Dubrovin, T.A. Butina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents a method for computing loads (such as strain or torque) on a compound shell consisting of elastically linked external and internal shells for the case when the external shell is subjected to transverse loading (bending moment, shear forces and distributed inertial loads). To demonstrate the application of our method, we investigated the effect the rigidity properties of the external shell have on the internal shell loading.

Keywords: *external shell, internal shell, compound shell, bending moment, flexural rigidity, transfer matrix, concentrated load matrix*

REFERENCES

[1] Belonosov S.M. *Matematicheskoe modelirovanie ravnovesnykh uprugikh tonkikh obolochek* [Mathematical modeling of elastic thin shells in equilibrium states]. Moscow, Nauka Publ., 1993, 158 p.

[2] Zhilin P.A. *Osnovy teorii obolochek* [Foundations of shell theory]. St. Petersburg, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University Publ., 2006, 306 p.

[3] Rabotnov Yu.N. *Problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela. Izbrannye trudy* [Problems of deformable solid mechanics. Selected works]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 194 p.

[4] Okopnyy Yu.A., Rodin V.P., Charkov I.P. *Mekhanika materialov i konstruktsiy* [Mechanics of materials and structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2001, 407 p.

[5] Vorovich I.I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii pologikh obolochek* [Mathematical problems of non-linear flat shell theory]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 373 p.

[6] Agamirov V.L. *Dinamicheskie zadachi nelineynoy teorii obolochek* [Dynamic problems of non-linear shell theory]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 269 p.

[7] Bakulin V.N. *Dinamicheskie zadachi nelineynoy teorii mnogosloynykh obolochek* [Dynamic problems of non-linear theory of multilayered shells]. Moscow, Nauka Publ., 1998, 462 p.

[8] Ivovich V.A. *Perekhodnye matritsy v dinamike uprugikh sistem* [Transfer matrices in dynamics of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969, 197 p.

[9] Dimitrienko Yu.I. *Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy. V 2 tomakh. Tom 2.* [Universal laws of continuum mechanics and electrodynamics. In 2 vols. Vol. 2]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 2011, 560 p.

[10] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 1. Tenzornyy analiz* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor calculus]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 2010, 456 p.

[11] Dimitrienko Yu.I. *Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Non-linear continuum mechanics]. Moscow, State Publishing House for Physical and Mathematical Literature, 2009, 624 p.

[12] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9 (21). DOI 10.18698/2308-6033-2013-9-957

[13] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2012, pp. 127–133.

[14] Bushuev A.Yu., Yakovlev D.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. Spets. vyp. "Matematicheskoe modelirovanie" — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences.* Special edition on mathematical modelling, 2011, pp. 66–69.

Dubrovin V.M. graduated from Saratov State University. Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Bauman Moscow State Technical University. Specialises in strength and stability of deformable systems. Author of five inventions. e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Butina T.A. graduated from Moscow Institute of Physics and Technology. Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Bauman Moscow State Technical University. Specialises in strength and stability of deformable systems. e-mail: butina_ta@mail.ru