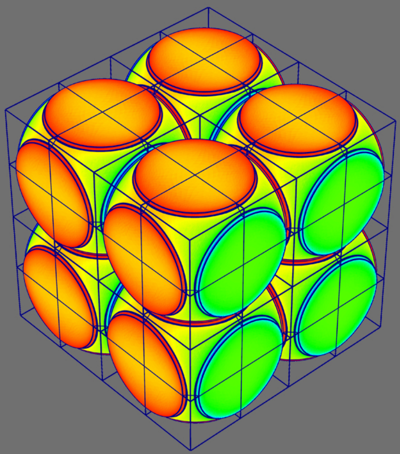
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

УДК 539.3

Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений

© С.В. Шешенин, К.А. Скопцов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Приведено сравнение результатов асимптотического анализа поперечного изгиба многослойной пластины под воздействием поверхностной нагрузки с классическими теориями тонких и толстых пластин. Слои пластины полагаются составленными из однородных упругих ортотропных материалов.

Ключевые слова: *асимптотический метод, метод осреднения, слоистая пластина, теории тонких и толстых пластин, пластины Кирхгофа и Миндлина — Рейснера.*

Одним из способов упрощения трехмерной краевой задачи является понижение размерности, которое может быть проведено, например при учете малости каких-либо параметров, входящих в задачу. Поскольку толщина пластины мала по сравнению с ее другими характерными размерами, пластину можно моделировать плоскими конечными элементами, функции формы для которых получают исходя из решения вспомогательной задачи деформирования тонкого тела. Понижение размерности при этом может быть осуществлено при помощи методов асимптотического анализа [1, 2], заменяющих традиционные гипотезы теории пластин.

Исследование асимптотического поведения уравнений равновесия при помощи рядов специального вида, применяющихся при осреднении уравнений с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами [1–3], позволяет при некоторых допущениях о граничных условиях на боковой поверхности построить решение, асимптотически сходящееся к решению задач трехмерной теории упругости. Для случая пластин применение асимптотического разложения в ряд началось с работы [4]. Обзор литературы можно найти в [2]. Анализ первых трех приближений приведен в [5, 6]. Исследование пологих оболочек дано в [7]. Сравнение асимптотической теории пластин с трехмерной теорией можно найти в [8, 9].

Разложение в асимптотический ряд позволяет разделить трехмерную задачу линейной теории упругости на серию одномерных задач, решения которых (так называемые локальные функции) задают распределение компонент вектора перемещения и тензора напряжений по вертикали, и двумерную задачу, по своей структуре аналогичную задачам классических теорий пластин.

Цель статьи состоит в том, чтобы показать, каким образом из асимптотического разложения возникает бигармоническое уравнение теории пластин Кирхгофа — Лява [10] и уравнения теорий толстых пластин [11–12]. Частично этот вопрос уже рассмотрен в [13]. Также в статье описана общая процедура получения локальных функций и уравнений произвольного приближения для изгиба слоистой анизотропной пластины. Отметим, что при выводе уравнений не используются гипотезы, свойственные классическим теориям пластин. Рассмотрение касается только случая линейной теории. Асимптотическому анализу нелинейной проблемы посвящена работа [14], а также работы [15, 16], в которых изучена задача изгиба тонких пластин из физически нелинейного материала.

Постановка задачи. Рассматривается краевая задача линейной теории упругости: уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = \left(C_{ijkl} u_{k,l}\right), \ \ j = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \omega\left[-h/2, h/2\right]$ с границей $\Sigma = \Sigma_n \cup \Sigma_d$ с граничными условиями

$$\sigma_{ij} n_j = C_{ijkl}\, u_{k,l} n_j = s_i \tag{2}$$

на части границы Σ_n и $u_i = 0$ на части границы Σ_d.

Асимптотическое исследование проводится при $h \to 0$. Примем, что модули упругости C_{ijkl} зависят только от вертикальной координаты. Удобно считать, что область определения модулей упругости нормирована толщиной пластины, т. е. модули упругости в слое x_3 суть $C_{ijkl}\left(x_3/h\right)$. Границу области ω, которую занимает тело в плоскости Ox_1x_2, обозначим γ. Если не сказано иного, будем полагать, что нагружена лишь верхняя граница $\left(x_3 = h/2\right)$ нагрузкой $s_i\left(x_1, x_2\right) = s_3\delta_{i3}$. Начнем с замечания относительно гипотезы Кирхгофа — Лява.

Гипотеза Кирхгофа — Лява и линейная часть поля перемещений. Гипотеза Кирхгофа — Лява состоит в том, что поле перемещений в тонкой однородной изотропной пластине, находящейся в состоянии изгиба, представляется в виде

$$\begin{gathered} u_I\left(x_1, x_2, x_3\right) = -x_3 w_I\left(x_1, x_2\right); \\ u_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = w\left(x_1, x_2\right),\ I = 1, 2, \end{gathered} \tag{3}$$

где $w\left(x_1, x_2\right)$ — прогиб пластины. Здесь и далее прописными латинскими буквами будем обозначать индексы, принимающие значения 1, 2 в отличие от индексов, обозначаемых строчными латинскими буквами, принимающими значения 1, 2, 3.

Покажем, что указанные представления суть главные линейные части поля перемещений трехмерной задачи. Не снижая общности, считаем, что $\sigma_{IJ}(x_1, x_2, 0) = 0$ (состояние изгиба без растяжения-сжатия отсчетной поверхности). Из уравнений равновесия следует

$$\sigma_{I3,3}(x_1, x_2, 0) = 0, \tag{4}$$

откуда $\sigma_{I3}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{I3}(x_1, x_2, 0) + O\left(x_3^2\right)$ при $x_3 \to 0$. Так как $\sigma_{I3}(x_1, x_2, h/2) = s_I = 0$, то $\sigma_{I3}(x_1, x_2, x_3) = O\left(h^2\right)$ при $h \to 0$ и $x_3/h = \text{const}$. В силу ортотропности пластины, как следствие, имеем $\varepsilon_{I3}(x_1, x_2, x_3) = O\left(h^2\right)$. Значит,

$$u_{I,3}(x_1, x_2, x_3) + u_{3,I}(x_1, x_2, x_3) = O\left(h^2\right). \tag{5}$$

Разложим u_I в ряд по x_3, тогда

$$u_I(x_1, x_2, x_3) = u_I(x_1, x_2, 0) + x_3 u_{I,3}(x_1, x_2, 0) + O\left(x_3^2\right). \tag{6}$$

Обозначив $w(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2, 0)$, с учетом соотношения (5) и $u_I(x_1, x_2, 0) = 0$ получаем из (6) следующее выражение

$$u_I = -x_3 u_{3,I}(x_1, x_2, 0) + O\left(h^2\right) = -x_3 w_I(x_1, x_2) + O\left(h^2\right), \tag{7}$$

что в первом приближении соответствует гипотезе Кирхгофа — Лява.

Для вертикальной компоненты поля перемещений можно провести похожие рассуждения. А именно в силу уравнений равновесия имеем на свободной границе

$$\sigma_{33,3}(x_1, x_2, -h/2) = 0, \tag{8}$$

откуда $\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = O\left(h^2\right)$ при $h \to 0$. Значит, $u_{3,3}(x_1, x_2, 0) = $ $= O\left(h^2\right)$, следовательно, получаем

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) + O\left(h^2\right), \tag{9}$$

что также соответствует гипотезе Кирхгофа — Лява. Поэтому в работах [5, 6] первые члены асимптотического ряда для представления поля перемещений в трехмерной задаче теории упругости были выбраны в виде (7), (9).

Асимптотическое понижение размерности задачи. Представленное рассмотрение может быть упрощено и обобщено при помощи асимптотического анализа. Будем искать решение задачи (1), (2) в более общем виде, чем в [5, 6]:

$$u_i(x,\xi) = w_i(x) + \sum_{|\alpha|>0} h^{|\alpha|} N_{ij\alpha}(\xi)\, w_{j,\alpha}(x), \tag{10}$$

в котором $x = x_1, x_2$, и суммирование проводится по всевозможным непустым мультииндексам α.

Уравнения равновесия (1) предполагаются выполненными при подстановке $\xi = x_3/h$. Таким образом, ξ играет роль «быстрой» координаты, как в стандартном методе осреднения [1, 3].

Подстановка ряда (10) в выражение $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, u_{k,l}$ для компонент тензора напряжений и приведение подобных по степеням параметра h дает асимптотический ряд

$$\sigma_{ij} = \sum_{|\alpha|>0} h^{|\alpha|-1} P_{ijk\alpha} w_{k,\alpha}, \tag{11}$$

в котором

$$P_{ijk\alpha L} = C_{ijrL} N_{rk\alpha} + C_{ijr3} N'_{rk\alpha L} \text{ и } N_{ik} = \delta_{ik}. \tag{12}$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная соответствующей функции от ξ по ξ.

Дальнейшая процедура понижения размерности состоит в разделении задачи теории упругости на задачу определения локальных функций $N_{ik\alpha}$, зависящих от «быстрой» вертикальной координаты, и задачу определения функций w_k, зависящих от «медленных» планарных координат. При этом n-м приближением мы будем называть асимптотический анализ при учете всех слагаемых рядов (10), (11) при $|\alpha| \le n+1$ (номер приближения соответствует максимальной степени h в ряде (11)).

Нахождение локальных функций. При помощи выбора локальных функций $N_{ik\alpha}$ можно асимптотически обратить дифференциальное уравнение равновесия (2) в тождество. Подстановка ряда (11) в уравнение равновесия (2) дает формальное равенство

$$h^{-1} P'_{i3kL} w_{k,L} + \sum_{|\alpha|>0} h^{|\alpha|-1} \left(P'_{i3k\alpha L} + P_{iLk\alpha}\right) w_{k,\alpha L} = 0. \tag{13}$$

Если потребовать выполнения равенств

$$P'_{i3kL} = 0 \text{ и } P'_{i3k\alpha L} + P_{iLk\alpha} = 0, \tag{14}$$

то левая часть (13) станет асимптотически эквивалентна нулю. Эти равенства являются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка на функции $N_{ik\alpha}$, решения которых приобретают единственность при наложении дополнительных условий на локальные функции. Конкретный вид дополнительных условий выбираем исходя из граничных условий трехмерной задачи, для которой проводится понижение размерности. При этом разные условия приводят к различным теориям пластин. Примеры таких условий рассмотрены в следующем разделе, а непосредственно далее предложена рекуррентная процедура поиска локальных функций.

Предположим, что найдены все локальные функции $P_{ijk\alpha}$ и $N_{ik\alpha}$. Покажем, как найти все функции $P_{ijk\alpha L}$ и $N_{ik\alpha L}$ следующего приближения. Уравнения (14) позволяют получить все $P_{i3k\alpha L}$ с точностью до постоянных слагаемых, которые можно фиксировать дополнительным условием. Из соотношений (12) (при $j = 3$) можно выразить $N_{ik\alpha L}$:

$$N_{ik\alpha L}(\xi) = N_{ik\alpha L}(0) + \int_0^{\xi} M_{ir}(t)\left[P_{r3k\alpha L}(t) - C_{r3pL}(t) N_{pk\alpha}(t)\right] dt, \quad (15)$$

где $M(\xi)$ — матрица, обратная матрице чисел $C_{i3r3}(\xi)$. Остается воспользоваться соотношениями (12) при $j = 1,2$ для нахождения оставшихся функций $P_{iJk\alpha L}$:

$$P_{iJk\alpha L} = C_{iJrL} N_{rk\alpha} + C_{iJr3} M_{rs}\left(P_{s3k\alpha L} - C_{s3pL} N_{pk\alpha}\right). \quad (16)$$

Как видно из соотношений (15), кроме условий на $P_{i3k\alpha L}$, для однозначности локальных функций требуются условия, позволяющие фиксировать $N_{ik\alpha L}(0)$. О них и пойдет речь далее.

Получение двухмерной задачи. Покажем, как можно удовлетворить нагрузке s_i, распределенной по верхней лицевой поверхности тела $x_3 = h/2$ (в линейной задаче можно без потери общности считать, что $s_i = 0$ на нижней лицевой поверхности). Наложим на функции $P_{ijk\alpha}$ условия $P_{i3k\alpha}(-1/2) = 0$. Они обеспечивают равенство нулю вектора напряжений на свободной границе. Тогда граничные условия при $x_3 = h/2$ можно записать следующим образом:

$$\sum_{|\alpha|>0} h^{|\alpha|-1} P_{i3k\alpha}(1/2)\, w_{k,\alpha}(x_1, x_2) = s_i(x_1, x_2). \quad (17)$$

Как отмечалось, для однозначного определения всех локальных функций $P_{ijk\alpha}$ и $N_{ik\alpha}$ требуется серия дополнительных условий, которые определяют физический смысл функций w_k.

В классических теориях пластин принято считать прогиб w вертикальным перемещением серединной поверхности (в теории Миндлина [11]) или же усредненным вертикальным перемещением (в теории Рейсснера [12]). Аналогичным физическим смыслом обладает поле w_k при выборе условий вида

$$N_{ikL\alpha}(0) = 0 \tag{18}$$

или

$$\int_{-1/2}^{1/2} N_{ikL\alpha}(\xi)\,d\xi = 0. \tag{19}$$

В первом случае функции w_k имеют смысл перемещений серединной поверхности, а во втором — усредненных перемещений вертикальных отрезков тела.

Уравнение (17) (формально бесконечного порядка) может быть стандартным образом преобразовано к последовательности уравнений конечного порядка подстановкой

$$w_k = \sum_{n=0}^{\infty} h^n w_{kn} \tag{20}$$

и приравниванием членов при одинаковых степенях h. При этом получаются уравнения вида

$$\sum_{|\alpha|=m} D_{ik\alpha} w_{kn,\alpha}(x_1, x_2) = f_i(x_1, x_2), \tag{21}$$

в которых m — наименьший порядок ненулевых $D_{ik\alpha}$, а f_i выражаются через s_i и $w_{kl,\beta}$ при $l < m$ и $|\beta| = 2m - l.$ Заметим, что в данном пункте описана общая процедура получения двумерного уравнения, в том числе и для случая $s_I \neq 0.$ Далее подробно изучается случай поперечного изгиба, когда $s_I = 0.$

Локальные функции нулевого приближения. Покажем, как при помощи вышеописанной методики получить локальные функции нулевого приближения. В силу условия $P_{i3kL}(-1/2) = 0$ и уравнений (14) имеем $P_{3ikL}(\xi) = P_{i3kL}(\xi) = 0.$ Последнее равенство эквивалентно уравнению

$$C_{i3kL} + C_{i3r3} N'_{rkL} = 0. \tag{22}$$

Соотношения (15) принимают вид

$$N_{ikL}(\xi) = N_{ikL}(0) - \int_0^{\xi} M_{ir}(t)\,C_{r3kL}(t)\,dt. \tag{23}$$

Теперь можно выразить P_{IJkL} через найденные функции согласно (16):

$$P_{IJkL} = C_{IJkL} - C_{IJr3} M_{rp} C_{p3kL}. \tag{24}$$

Заметим, что при $k = 3$ формула (23) приобретает вид

$$N_{i3L}(\xi) = N_{i3L}(0) - \delta_{iL}\xi, \tag{25}$$

что с учетом любого из условий вида (18) или (19) превращается в $N_{i3L}(\xi) = -\delta_{iL}\xi.$ Это значит, что нулевое приближение асимптотического метода при нулевых w_I и отсутствии растяжения-сжатия отсчетной поверхности дает поле перемещений вида

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \delta_{i3} w_3(x_1, x_2) - h\xi w_{3,i}(x_1, x_2), \tag{26}$$

соответствующее гипотезе Кирхгофа — Лява. Еще раз отметим, что в [5, 6] это соотношение в нулевом приближении принималось априори, а последующие приближения получались с помощью асимптотического разложения.

Уравнения третьего приближения в частном случае. Продемонстрируем полную процедуру получения уравнений третьего приближения в частном случае симметричных (относительно плоскости $x_3 = 0$) свойств пластины.

Для начала заметим, что коэффициенты $P_{i3k\alpha}(1/2)$ двумерной задачи (17) могут быть выражены через функции $P_{i3k\beta}$ меньших порядков:

$$P_{i3k\alpha L}(1/2) = \int_{-1/2}^{1/2} P'_{i3k\alpha L}(\xi)\,d\xi = -\int_{-1/2}^{1/2} P_{iLk\alpha}(\xi)\,d\xi. \tag{27}$$

Если $i = 3,$ то такое преобразование может быть проведено еще один раз:

$$P_{33k\alpha LR}(1/2) = -\int_{-1/2}^{1/2} P_{3Rk\alpha L}(\xi)\,d\xi =$$

$$= -P_{3Rk\alpha L}(1/2)/2 + \int_{-1/2}^{1/2} \xi P_{LRk\alpha}(\xi)\,d\xi. \tag{28}$$

Применив к первому слагаемому правой части (28) преобразование (27), получим в итоге

$$P_{33k\alpha LR}(1/2) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\xi - \frac{1}{2}\right) P_{LRk\alpha}(\xi)\,d\xi. \tag{29}$$

Для простоты дальнейшего изложения примем $w_I = 0$ и $w_3(x_1, x_2) = w(x_1, x_2)$ и будем искать лишь $P_{ij3\alpha}$ и $N_{i3\alpha}$. Нетрудно показать, что для симметричных пластин при отсутствии горизонтально направленной составляющей нагрузки эти предположения справедливы. При $k = 3$ соотношение (24) принимает вид $P_{IJ3L} = 0$. Поэтому $P'_{i33LQ} = 0$, соответственно $P_{i33LQ} = P_{3i3LQ} = 0$, а вот функции P_{IJ3LQ}, определяемые из соотношений (16), вообще говоря, отличны от нуля. Это значит, что в силу (14) P_{I33LQR} также отличны от нуля. При этом P_{333LQR} по-прежнему равны нулю. Отсюда можно сделать вывод, что первое асимптотическое приближение позволяет получить аппроксимацию компонент σ_{IJ}, второе — компонент σ_{I3}, третье — σ_{33}.

Итак имеем, что все $P_{333\alpha}(1/2)$ при $|\alpha| < 4$ равны нулю. Однако функции $P_{333LQRS}(1/2)$ отличны от нуля и могут быть выражены с помощью (29) в виде

$$P_{333LQRS}(1/2) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\xi - \frac{1}{2}\right) P_{RS3LQ}(\xi)\, d\xi. \tag{30}$$

Если материал пластины изотропен, то вычисления показывают, что

$$P_{333LQRS}(1/2) = \frac{E}{12}\left(1 - \nu^2\right) = Dh^{-3}, \tag{31}$$

где D — стандартная изгибная жесткость пластины, а первое (и единственное) из уравнений (21) при условии $s_3 \sim h^3$ принимает вид

$$Dw_{IIJJ}(x_1, x_2) = s_3(x_1, x_2), \tag{32}$$

что соответствует уравнению для прогиба в теории Кирхгофа — Лява. Подчеркнем еще раз, что это уравнение получается в третьем приближении, т. е. при учете всех слагаемых ряда (11) для σ_{ij} порядка h^3 и ниже. При этом заметим, что для вычисления σ_{ij} и получения уравнения (32) не обязательно искать функции $N_{ik\alpha}$ при $|\alpha| > 2$, а достаточно найти все функции только первого приближения, так как функции $P_{ijk\alpha}$ разных приближений связаны между собой по формулам (27), (30).

Решив уравнение (32) с граничными условиями на боковой поверхности [1, 2, 8], можно по формулам (11), (12) найти напряжения

σ_{ij}. При этом в разложении (11) имеет смысл рассматривать лишь первые члены с ненулевыми локальными функциями (т. е. σ_{IJ} могут быть найдены с погрешностью порядка h^2, σ_{I3} — с погрешностью порядка h^3, а σ_{33} — с погрешностью порядка h^4).

Рассмотрение же всех уравнений (21), соответствующих пятому приближению (т. е. при учете всех слагаемых ряда для σ_{ij} порядка h^5 и ниже), дает при том же предположении относительно s_3 (т. е. s_3 порядка h^3) соотношение вида

$$Dw_{IIJJ}(x_1, x_2) = s_3 + \frac{D}{k_a \mu h} s_{3II}, \tag{33}$$

характерное для теорий толстых пластин (Рейснера — Миндлина). Поле w, найденное по уравнению (33), имеет погрешность порядка h^3, поэтому формулы (11), (12) позволяют найти σ_{IJ} с погрешностью порядка h^4, σ_{I3} — с погрешностью порядка h^5, σ_{33} — с погрешностью порядка h^6.

Сравнение с теорией толстых пластин. В качестве типичной теории толстых пластин рассмотрим теорию Миндлина [10], [11], иногда называемую теорией Тимошенко. В теории Миндлина поле перемещений (в отсутствие растяжения-сжатия) представлено в виде

$$u_I(x_1, x_2, x_3) = -x_3\varphi_I(x_1, x_2) \text{ и } u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2). \tag{34}$$

При этом считается, что $w(x_1, x_2)$ есть прогиб серединной поверхности. Поле деформаций представлено в виде

$$\varepsilon_{IJ}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}x_3\left(\varphi_{I,J}(x_1, x_2) + \varphi_{J,I}(x_1, x_2)\right); \tag{35}$$

$$\varepsilon_{I3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}k\left(w_I(x_1, x_2) - \varphi_I(x_1, x_2)\right). \tag{36}$$

Множитель k в формуле (36) обычно принимается отличным от 1 (в то время как дифференцирование соотношений (34) дает $k = 1$). Это связано с тем, что распределение касательных деформаций по x_3 в трехмерной задаче близко к параболическому, а в (36) ε_{I3} не зависят от x_3. Потому k обычно выбирают так, чтобы внутренняя энергия деформации соответствовала тем или иным соображениям адекватности теории [10], [17]. Наиболее распространенные значения: $k = 5/6$ и $k = 4/5$.

Теория Миндлина при $p(x_1, x_2) = s_3(x_1, x_2) \sim h^3$ приводит к уравнениям для прогиба w и углов φ отклонения нормали от вертикального направления:

$$w_{IIJJ} = \frac{p}{D} + \frac{p_{II}}{k\mu h}; \tag{37}$$

$$\varphi_{I,I} = w_{II} - \frac{p}{k\mu h} \text{ и } \left(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}\right)_{II} = -\frac{2k\mu h}{D(1-\nu)}\left(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}\right). \tag{38}$$

Уравнение (33), аналогичное (37), получается при применении асимптотического метода в пятом приближении. При наложении на локальные функции условия (18) функции w из разложений (10) и (34) приобретают одинаковый смысл $u_3(x_1, x_2, 0)$. Поэтому множитель k может быть найден из уравнения пятого приближения (33), в котором $k = \frac{5}{6} + \frac{29}{6}\frac{\nu}{12 - 7\nu}$.

Отметим, что несмотря на совпадение уравнений для прогиба, теория Миндлина дает качественно другие распределения деформаций (и соответственно, напряжений) по толщине пластины, чем пятое приближение асимптотического метода. В асимптотическом методе ε_{IJ} представляют собой линейные функции с углом наклона, равным $-w_{IJ}$ с поправками порядка h^3, пропорциональными кубу вертикальной координаты, а ε_{I3} с точностью до поправок распределены параболически по толщине пластины. В теории Миндлина ε_{IJ} линейны по толщине, но с другим угловым коэффициентом (отличающимся от $-w_{IJ}$ на величину порядка h^2, которая задается уравнениями (38)), а ε_{I3} постоянны по толщине.

Выводы. Описана общая процедура понижения размерности трехмерной задачи линейной теории упругости для случая изгиба толстой слоистой ортотропной пластины, основанная на разложении поля перемещений в асимптотический ряд. Для частного случая изгиба симметричной пластины получены уравнения третьего и пятого приближений, аналогичные уравнениям классических теорий пластин. Дано сравнение с теориями Кирхгофа — Лява и Миндлина.

Достоинством предложенного метода является отсутствие кинематических гипотез (типа гипотезы Кирхгофа — Лява или Рейсснера), обычно используемых для анализа тонких и толстых пластин. Наоборот, кинематические гипотезы можно считать следствием результатов асимптотического анализа.

Работа выполнена частично при поддержке гранта РФФИ 13-01-00688.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984.

[2] Levinski T., Telega J.J. *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*. New York, World Scientific Publishing Co., 2010.

[3] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1984.

[4] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct*, 1984, pp. 333–350.

[5] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.

[6] Шешенин С.В. Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане. Вестник Моск. ун-та. *Сер. 1. Математика и механика*, 2006, № 1, с. 47–51.

[7] Скопцов К., Шешенин С. Асимптотический анализ слоистых пластин и пологих оболочек. Изв. РАН. *Механика твердого тела*, 2011, № 1, с. 161–171.

[8] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 7(19). URL: http://engjournal.ru/articles/899/899.pdf

[9] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.

[10] Reddy J.N. *Theory and analysis of elastic plates*. Philadelphia, Taylor and Francis, 1999.

[11] Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1951, vol. 18, pp. 31–38.

[12] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1945, vol. 12, pp. 68–77.

[13] Скопцов К., Шешенин С.В. Асимптотический метод получения уравнений теории пластин Рейсснера — Миндлина. *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика*, 2013, № 2, с. 65–67.

[14] Ghosh S., Lee K., Moorthy S. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model. *Comput. Methods Appl. Mech. Enrgr*, 1996, no. 132, pp. 63–116.

[15] Шешенин С.В., Савенкова М.И. Осреднение нелинейных задач в механике композитов. *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.* 2012, № 5, с. 58–61.

[16] Шешенин С.В., Савенкова М.И. Об осреднении композитов при наличии нелинейности. Упругость и неупругость. *Доп. материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 2012, с. 260–269.

[17] Yu Liu, Chee-Kiong Soh. Shear correction for Mindlin type plate and shell elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 2007, no. 69, pp. 2789–2806.

Статья поступила в редакцию 02.09.2014

Ссылку эту на статью просим оформлять следующим образом:

Шешенин С.В., Скопцов К.А. Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 49–61.

Шешенин Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор, зам. заведующего кафедрой «Механика композитов» механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. e-mail: sheshenin@mech.math.msu.su

Скопцов Кирилл Александрович — аспирант кафедры «Механика композитов» механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
e-mail: arbrk1@gmail.com

Theory of plates based on the method of asymptotic decompositions

© S.V. Sheshenin, K.A. Skoptsov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

The paper presents comparison of asymptotic analysis of a composite plate lateral bending under the impact of surface load against classical theories of thin and thick plates. Layers of the plate are assumed to be homogeneous linear elastic orthotropic materials.

Keywords: *asymptotic method, averaging method, laminated plate, theory of thin plates, theory of thick plates, Kirchhoff plate, Mindlin — Reissner plate.*

REFERENCES

[1] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [The averaging of processes in periodic media. Mathematical problems of mechanics of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1984.

[2] Levinski T., Telega J.J. *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*. N.J., World Scientific Publishing Co., 2nd ed., 2010.

[3] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Moscow State University Publ., 1984.

[4] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct*, 1984, no. 20, pp. 333–350.

[5] Sheshenin S.V. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. Journal of the Russian Academy of Sciences,* 2006, no. 6, pp. 71–79.

[6] Sheshenin S.V. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Matem. Mekhan. — MSU Bulletin. Mathematics.Mechanics*, 2006, no. 1, pp. 47–51.

[7] Skoptsov K., Sheshenin S. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. Journal of the Russian Academy of Sciences,* 2011, no. 1, pp. 161–171.

[8] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Enzhinerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, 7(19). Available at: http://engjournal.ru/articles/899/899.pdf

[9] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennye metody — Mathematical Modelling and Numerical Methods,* 2014, no. 1, pp. 36–57.

[10] Reddy J.N. *Theory and analysis of elastic plates*. Taylor and Francis, Philadelphia, 1999.
[11] Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, 1951, pp. 31–38.
[12] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1945, vol. 12, pp. 68–77.
[13] Skoptsov K., Sheshenin S.V. *Vestnik Moscovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika i Mechanika — MSU Bulletin. Series 1. Mathematics and Mechanics,* 2013, no. 2, pp. 65–67.
[14] Ghosh S., Lee K., Moorthy S. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*., 1996, no. 132, pp. 63–116.
[15] Sheshenin S.V., Savenkova M.I. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika i Mechanika — MSU Bulletin. Series 1. Mathematics and Mechanics*, 2012, no. 5, pp. 58–61.
[16] Sheshenin S.V., Savenkova M.I. *Ob osrednenii kompozitov pri nalichii nelineynosti.Uprugost' i neuprugost': dopolnitel'nye materialy Mezhdunarodnogo nauchnogo simpoziuma po problemam mekhaniki deformiruemykh tel, posvyashchennogo 100-letiyu so dnya rozhdeniya A.A. Il'yushina.* [On the Averaging of Composites with Nonlinearity. Elasticity and Inelasticity: the Additional Materials of the International Scientific Symposium on Problems of Mechanics of Deformable Bodies, dedicated to the 100th anniversary of the birthday of A. A. Ilyushin]. Moscow, Moscow State University Publ., 2012, pp. 260–269.
[17] Yu Liu, Chee-Kiong Soh. Shear correction for Mindlin type plate and shell elements, *Int. J. Numer. Meth. Eng*., 2007, 69, pp. 2789–2806.

Sheshenin S.V., Dr. Sci. (Phys.&Math.), professor, deputy head of the Department of Composite Mechanics, Faculty of Mechanics and Mathematics, at Lomonosov Moscow State University. e-mail: sheshenin@mech.math.msu.su

Skoptsov K.A., graduate student of the Department of Composite Mechanics, Faculty of Mechanics and Mathematics, at Lomonosov Moscow State University.
e-mail: arbrk1@gmail.com