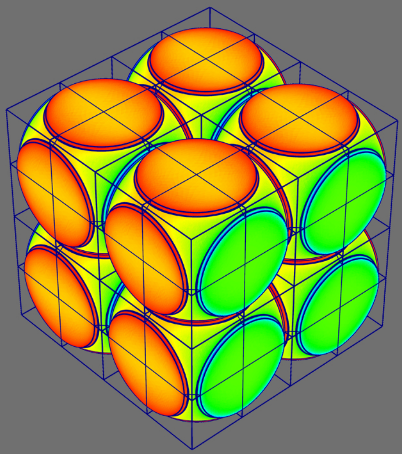
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Чуев В. Ю., Дубограй И. В., Дьякова Л. Н. «Смешанные» вероятностные модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. Математическое моделирование и численные методы, 2017, №1 (13), с. 91-101

УДК 519.8 DOI 10.18698/2309-3684-2017-1-91101

«Смешанные» вероятностные модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй, Л.Н. Дьякова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработаны «смешанные» вероятностные модели двусторонних боевых действий на основе теории непрерывных марковских процессов. Получены расчетные формулы для вычисления основных показателей боя небольших по численности группировок. Разработан численный алгоритм для вычисления основных показателей боя многочисленных группировок. Проведено сравнение с результатами моделирования боя при использовании детерминированной модели двусторонних боевых действий, разработанной на основе метода динамики средних. Показано, что на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих сторон, а не их начальные численности.

Ключевые слова: *непрерывный марковский процесс, модели двусторонних боевых действий, боевые единицы, эффективные скорострельности, параметр соотношения сил*

Введение. Для оценки качества работы новых видов технических устройств на этапе их разработки возникает задача построения математической модели их функционирования [1]. Большое значение при создании новых образцов вооружения и военной техники имеет оценка их боевой эффективности, которая позволяет оценить степень их пригодности к решению поставленных боевых задач. Модель двусторонних боевых действий позволяет более полно и достоверно учесть ряд факторов, влияющих на эффективность в реальных боевых условиях, чем модель без учета ответного огня [2, 3], поэтому ее целесообразно выбрать в качестве основы такой оценки.

В настоящее время разработаны детерминированные модели, построенные на основе метода динамики средних [4–8], и вероятностные [9–13] модели «высокоорганизованного» боя, т. е. когда противоборствующие стороны имеют полную и не запаздывающую информацию о состоянии боевых единиц противника (поражены или нет) и ведут огонь только по уцелевшим единицам. Кроме того, разработаны детерминированные [5, 6, 14] и вероятностные [15–18] модели «плохо организованного» боя, т. е. такие, когда противоборствующие стороны не имеют информации о состоянии боевых единиц противника и не переносят огонь с пораженных единиц.

Определенный интерес представляет так называемая «смешанная» модель двусторонних боевых действий. Она представляет собой ситуацию, когда одна из противоборствующих сторон, допустим, сторона X, имеет информацию о состоянии боевых единиц противника и ведет равномерный огонь только по уцелевшим единицам, а другая сторона Y такой информации не имеет и ведет огонь как по уцелевшим, так и по пораженным единицам противника. Детерминированные модели такого типа, построенные на основе метода динамики средних, представлены в работах [19, 20]. Настоящая статья посвящена разработке вероятностных моделей данного типа, построенных на основе теории непрерывных марковских процессов.

Основные математические зависимости и формулы, используемые при описании процесса протекания боя. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если для каждого момента времени вероятность системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [21].

Примем следующие обозначения: p_x, p_y — вероятности поражения боевой единицы противника одним выстрелом единицы сторон X и Y соответственно; λ_x, λ_y — практические скорострельности боевых единиц сторон X и Y соответственно; $v = p_x\lambda_x$, $u = p_y\lambda_y$ — эффективные скорострельности боевых единиц сторон X и Y.

Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [22]. Используется также прием, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским [2]. Выстрел назовем «успешным», если он поражает боевую единицу противника [3].

Пусть в начале боя сторона X имеет m однотипных боевых единиц, а сторона Y — n также однотипных боевых единиц, не обязательно однородных с единицами стороны X. Стороны открывают огонь по противнику одновременно. При этом сторона X имеет полную и не запаздывающую информацию о боевых единицах противника (поражены или нет) и стреляет только по непораженным единицам. Сторона Y такой информации не имеет и ведет равномерный огонь как по уцелевшим, так и по пораженным единицам противника. Считаем, что бой ведется до полного уничтожения хотя бы одной из противоборствующих сторон. При использовании модели динамики средних процесс протекания боя опишем системой уравнений [19, 20]

$$\begin{cases} x'(t) = -u\,\dfrac{x(t)y(t)}{m}, \\ y'(t) = -vx(t) \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = m$, $y(0) = n$.

Здесь $x(t), y(t)$ — математические ожидания численностей сторон X и Y соответственно в момент времени t, $x'(t), y'(t)$ — их производные по времени.

Величины $v = p_x\lambda_x$ и $u = p_y\lambda_y$ будем считать постоянными в течение всего боя.

При $æ < \sqrt{2}$ победу одержит сторона X, при этом

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{m\left(2 - æ^2\right)}{2}, \\ y_k = 0, \end{cases} \tag{1}$$

а при $æ > \sqrt{2}$ победу одержит сторона Y, вместе с тем

$$\begin{cases} x_k = 0, \\ y_k = \dfrac{n\sqrt{æ^2 - 2}}{æ}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь x_k, y_k — математические ожидания сохранившихся боевых единиц к концу боя сторон X и Y соответственно; $æ = (n/m)\sqrt{u/v}$ — параметр соотношения сил [17].

При $æ = \sqrt{2}$ обе противоборствующие стороны к концу боя будут полностью уничтожены, т. е. $x_k = y_k = 0$.

При использовании вероятностной модели процесс боевых действий опишем системой уравнений

$$\begin{cases} F'_{i0}(t) = ivF_{i1}(t) \quad \text{при } i = 1, \ldots, m, \\ F'_{0j}(t) = \dfrac{ju}{m} F_{1j}(t) \ \text{ при } \ j = 1, \ldots, n, \\ F'_{ij}(t) = -\left(iv + \dfrac{iju}{m}\right) F_{ij}(t) + ivF_{i,j+1}(t) + \dfrac{(i+1)ju}{m} F_{i+1,j}(t) \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } \ i = 1, \ldots, m-1, \ \ j = 1, \ldots, n-1, \\ F'_{mj}(t) = -\left(mv + ju\right) F_{mj}(t) + mvF_{m,j+1}(t) \ \text{ при } j = 1, \ldots, n-1, \\ F'_{in}(t) = -\left(iv + \dfrac{inu}{m}\right) F_{in}(t) + \dfrac{(i+1)nu}{m} F_{i+1,n}(t) \ \text{ при } \ i = 1, \ldots, m-1, \\ F'_{mn}(t) = -\left(mv + nu\right) F_{mn}(t) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} F_{mn}(0) = 1, \\ F_{ij}(0) = 0 \quad \text{при } \ i + j < m + n. \end{cases}$$

Здесь $F_{ij}(t)$ — вероятности того, что в момент времени t сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y, $F'_{ij}(t)$ — их производные по времени.

Для исследуемой модели $1:n$ (одна единица стороны X против произвольного числа единиц стороны Y) бой протекает так же, как «высокоорганизованный» [10], а бой $m:1$ — так же, как «плохо организованный» [18], поскольку если противник представлен в начале боя только одной боевой единицей, перенос огня не осуществляется.

Формулы для вычисления основных показателей таких боев приведены в работах [10, 18], к ним в первую очередь относятся: P_{0x}, P_{0y} — вероятности побед сторон X и Y соответственно; M_x, M_y — математические ожидания относительных количеств сохранившихся к концу боя боевых единиц сторон X и Y соответственно.

Для боя $m:n$ эти величины вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} P_{0x}=\sum_{i=1}^{m}F_{i0}(\infty),\ \ P_{0y}=\sum_{j=1}^{n}F_{0j}(\infty), \\ M_x=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}iF_{i0}(\infty),\ \ M_y=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}jF_{0j}(\infty). \end{gathered} \tag{3}$$

Для модели динамики средних получаем $M_x = x_k / m,\ M_y = y_k / n.$

Для «смешанной» вероятностной модели авторами получены расчетные формулы для вычисления основных показателей боя 2:2 при постоянных (т. е. $v=\text{const},\ u=\text{const}$) эффективных скорострельностях боевых единиц сторон:

$$\begin{cases} F_{10}(\infty)=2vu\left(\dfrac{1}{(v+u)^2}-\dfrac{1}{(2v+u)^2}\right), \\ F_{20}(\infty)=\dfrac{2v^2}{(v+u)(2v+u)}, \\ F_{01}(\infty)=\dfrac{u}{2v}F_{10}(\infty), \\ F_{02}(\infty)=\dfrac{u^2}{(v+u)^2}, \\ F_{11}(\infty)=F_{12}(\infty)=F_{21}(\infty)=F_{22}(\infty)=0, \end{cases} \tag{4}$$

а также

$$\begin{cases} P_{0x} = F_{10}(\infty) + F_{20}(\infty), \\ P_{0y} = F_{01}(\infty) + F_{02}(\infty), \\ M_x = \frac{1}{2} F_{10}(\infty) + F_{20}(\infty), \\ M_y = \frac{1}{2} F_{01}(\infty) + F_{02}(\infty). \end{cases} \tag{5}$$

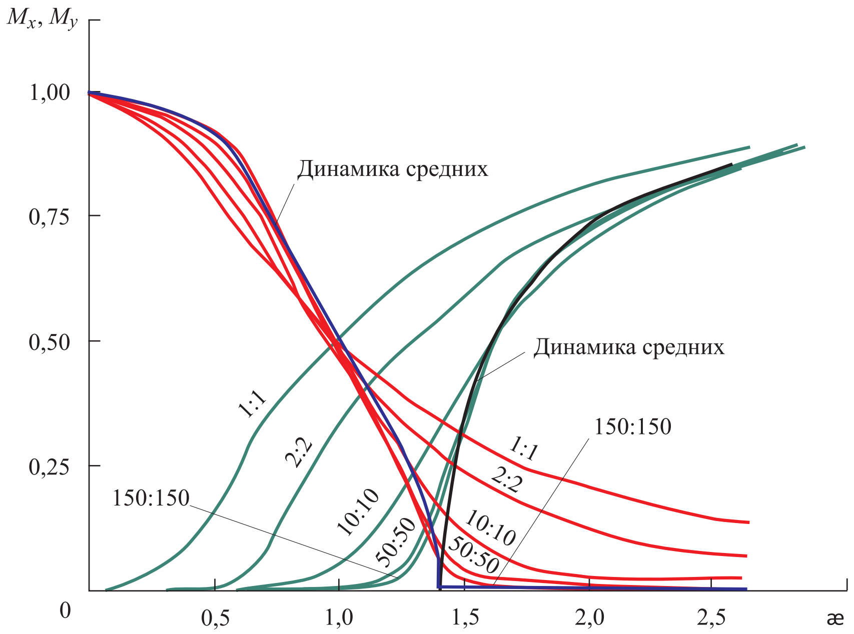
где $F_{ij}(\infty)$ — вероятности того, что к концу боя сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y.

Для исследования боев более многочисленных группировок авторами разработан численный алгоритм, позволяющий вычислить основные показатели этих боев.

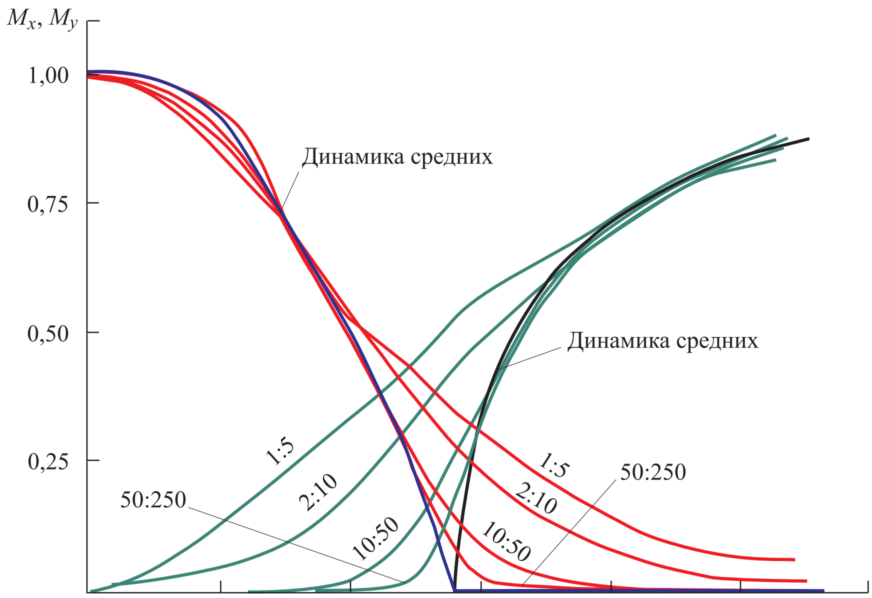
Анализ результатов расчетов. На основе формул (1)–(5), а также с использованием разработанного численного алгоритма проведены расчеты основных показателей боя при разных начальных численностях противоборствующих группировок и значениях параметра соотношения сил æ. Результаты расчетов отражены на рисунке. Значения M_x и M_y относительных численностей, сохранившихся к концу боя единиц сторон X и Y соответственно для различных начальных численностей группировок в зависимости от параметра соотношения сил æ, полученные на основе разработанных авторами вероятностных моделей, показаны красными и зелеными линиями. Значения M_x и M_y, полученные методом динамики средних, обозначены синими и черными линиями.

На рисунке показаны результаты боев при равных начальных численностях противоборствующих группировок (*а*) и отображены две ситуации: когда начальные численности стороны Y в пять раз превосходят начальные численности стороны X $(n = 5m)$ (*б*) и когда начальные численности стороны X в пять раз превосходят начальные численности стороны Y $(m = 5n)$ (*в*).

Согласно результатам расчетов наличие информации о состоянии боевых единиц противника при отсутствии ее у противоборствующей стороны существенно повышает боевые возможности группировки с увеличением начальных численностей противоборствующих сторон. Так, например, при æ $= 1$ для боя 2:2 получаем $M_x = 0{,}472$, $M_y = 0{,}319$, $P_{0x} = 0{,}611$ и $P_{0y} = 0{,}389$, а для боя 25:25 при том же значении æ получаем $M_x = 0{,}482$, $M_y = 0{,}005$, $P_{0x} = 0{,}984$ и $P_{0y} = 0{,}016$.

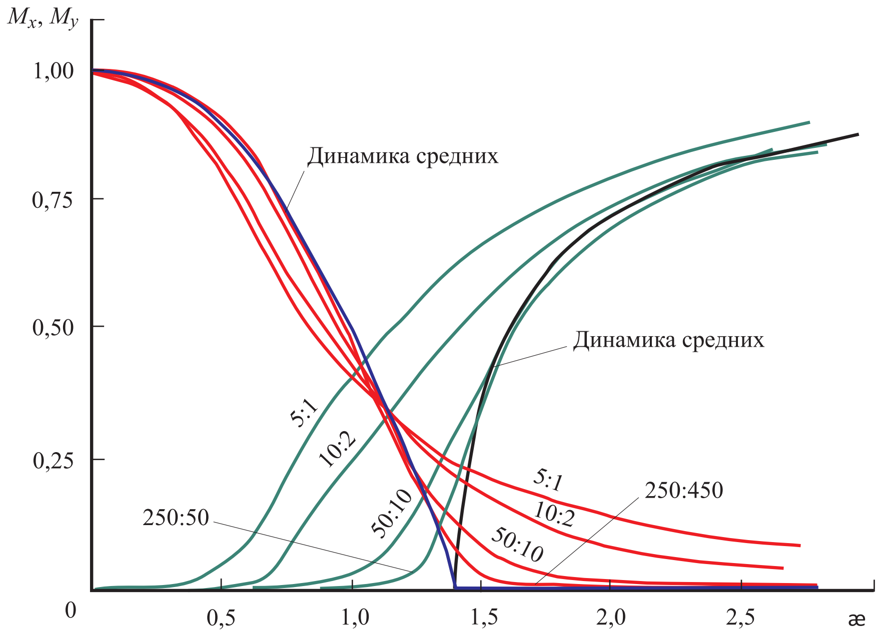


а



б

Математические ожидания M_x и M_y относительных количеств сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при: $а — n = m$; $б — n = 5m$



в

Математические ожидания M_x и M_y относительных количеств сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при:
в — $m = 5n$

Отметим также, что если для «высокоорганизованного» и «плохо организованного» боя граничным значением параметра соотношения сил является $æ_0 = 1$ (при этом согласно методу динамики средних обе стороны будут к концу боя полностью уничтожены), то для исследуемой «смешанной» модели таковым является $æ_0 = \sqrt{2}$.

Кроме того, на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих группировок, а не их начальные численности. Так, при $æ \le 0,75$ и $æ \ge 2$ ошибки метода динамики средних при вычислении величин M_x и M_y не превосходят 5 %, если каждая из противоборствующих сторон имеет в начале боя не менее шести боевых единиц. В то время как при значениях параметра соотношения сил $æ$, достаточно близких к своему граничному значению $æ_0 = \sqrt{2}$ $(1,4 \le æ \le 1,42)$, даже для боя 100:100 ошибка в вычислении величины M_y превосходит 10 %. Причина таких ошибок — достаточно высокие вероятности победы противоборствующих сторон P_{0x} и P_{0y}, каждая из которых превосходит 0,4.

Выводы. Исходя из сказанного выше можно сделать следующие выводы.

1. На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны стохастические «смешанные» модели двусторонних боевых действий, позволяющие вычислить основные показатели боя многочисленных группировок.

2. Установлено, что наличие информации о состоянии боевых единиц противника при отсутствии таковой у противоборствующей стороны значительно (до $\sqrt{2}$ раз) повышает боевые возможности группировки при достаточно больших численностях противоборствующих сторон.

3. Показано существенное возрастание преимущества стороны, имеющей информацию о состоянии боевых единиц противника, с пропорциональным ростом начальных численностей противоборствующих сторон.

4. Установлено, что на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих сторон, а не их начальные численности. При значениях параметра соотношения сил æ, близких к своему граничному значению $æ_0 = \sqrt{2}$, использование модели динамики средних приводит к существенным ошибкам в вычислении основных показателей боя даже при больших начальных численностях противоборствующих группировок.

5. Показано, что при значительном превосходстве одной из участвующих в бою группировок применение модели динамики средних приводит к небольшим ошибкам в вычислении основных показателей боя даже небольшого количества единиц.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1 (1), с. 3–4.

[2] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы и методология*. Москва, УРСС, 2007, 208 с.

[3] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[4] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[5] Дубограй И.В., Дьякова Л.Н., Чуев В.Ю. Учет упреждающего удара при моделировании двухсторонних боевых действий. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/842.html (дата обращения 14.06.2017). DOI 10.18698/2308-6033-2013-7-842

[6] Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm.* London, Constable and Co, 1916, 243 p.

[7] Taylor J.G. Dependence of the parity-condition parameter on the combat-intensity parameter for Lanchester-type equations of modern warfare. *Operations-Research-Spectrum*, 1980, vol. 1 (3), pp. 199–205.

[8] Chen X., Jing Y., Li C., Li M. Warfare command stratagem analysis for winning based on Lanchester attrition models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.
[9] Дубограй И.В., Чуев В.Ю. Дискретная марковская модель боя многочисленных группировок. *Наука и образование: электронное научное издание*, 2013, вып. 10, с. 109–122.
[10] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 2, с. 53–62.
[11] Jaswall N.K. *Military operations research: quantitative decision making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.
[12] Taylor J.G. *Force-on-force attrition modeling.* Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.
[13] Shamahan L. *Dynamics of Model Battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2005, pp. 1–43.
[14] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.
[15] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to operations research*. New York, MeGrew-Hill, 2005, 998 p.
[16] Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. *Марковские модели боя*. Москва, Министерство обороны СССР, 1985, 85 с.
[17] Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011. Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 223–232.
[18] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 89–104.
[19] Пашков Н.Ю., Строгалев В.П., Чуев В.Ю. Смешанная модель динамики средних для многочисленных группировок. *Оборонная техника*, 2000, № 9–10, с. 19–21.
[20] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. *Модели динамики средних двухсторонних боевых действий многочисленных группировок*. Саарбрюккен, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 с.
[21] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения*. Москва, КноРус, 2016, 448 с.
[22] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, КноРус, 2016, 658 с.

Статья поступила в редакцию 22.02.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В., Дьякова Л.Н. «Смешанные» вероятностные модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 91–101.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Дьякова Людмила Николаевна — старший преподаватель кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: ddos@mail.ru

“Mixed” probabilistic models of bilateral military operations of numerous groups

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubogray, L.N. Dyakova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The purpose of this work was to develop "mixed" probabilistic models of bilateral military operations according to the theory of continuous Markov processes. In our research we obtained calculation formulas for estimating the main combat indices of groups small in number. Moreover, we developed a numerical algorithm to calculate the main combat indices of numerous groupings and made a comparison with the results of combat simulation using a deterministic model of two-way combat operations, the model being developed according to themean-value method dynamics. Findings of the research show that the correlation of the forces of the opposing sides, rather than their initial numbers, affects the errors in the mean-value method dynamics.

Keywords: *continuous Markov process, models of bilateral military operations, combat units, effective rate of fire, force ratio parameter*

REFERENCES

[1] Aleksandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1 (1), pp. 3–4.

[2] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy i metodologiya* [Research operations: tasks, principles and methodology]. Moscow, URSS Publ., 2007, 208 p.

[3] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Investigation of military operations]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[4] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deystviy* [Mathematical models of military operations]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 240 p.

[5] Dubogray I.V., Dyakova L.N., Chuev V.Yu. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/842.html (accessed June 14, 2017). DOI 10.18698/2308-6033-2013-7-842

[6] Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm.* London, Constable and Co, 1916, 243p.

[7] Taylor J.G. *Operations-Research-Spectrum*, 1980, vol. 1 (3), pp. 199–205.

[8] Chen X., Jing Y., Li C., Li M. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.

[9] Dubogray I.V., Chuev V.Yu. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchnoe izdanie — Scientific edition of Bauman MSTU Science and Education*, 2013, no. 10, pp. 109–122.

[10] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2015, no. 2, pp. 53–62.

[11] Jaswall N.K. *Military operations research: quantitative decision making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.
[12] Taylor J.G. *Force-on-force attrition modeling.* Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.
[13] Shamahan L. *Dynamics of Model Battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2005, pp. 1–43.
[14] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.
[15] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to operations research*. New York, MeGrew-Hill, 2005, 998 p.
[16] Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov's combat models]. Moscow, the USSR Ministry of Defense, 1985, 85 p.
[17] Chuev V.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. Spets. vypusk "Matematicheskoe modelirovanie" — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, *Spec. issue "Mathematical Modeling"*, 2011, pp. 223–232.
[18] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 89–104.
[19] Pashkov N.Yu., Strogalev V.P., Chuev V.Yu. *Oboronnaya tekhnika — Defense technology*, 2000, no. 9–10, pp. 19–21.
[20] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Modeli dinamiki srednikh dvukhstoronnikh boevykh deystviy mnogochislennykh gruppirovok* [Dynamics models of the average bilateral military operations of numerous groupings]. Saarbryukken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 p.
[21] Venttsel E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya sluchaynykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [The theory of stochastic processes and its engineering applications]. Moscow, KnoRus, 2016, 448 p.
[22] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability Theory]. Moscow, KnoRus, 2016, 658 p.

Chuev V.Yu., Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Dyakova L.N., Senior Lecturer of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics. e-mail: ddos@mail.ru