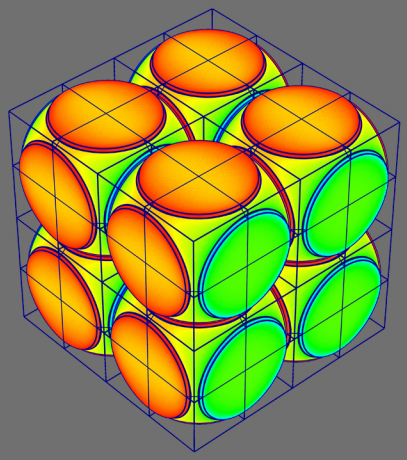
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Савин А. С., Горлова Н. Е., Струнин П. А. Численное моделирование воздействия точечного импульсного источника в жидкости на ледяной покров. Математическое моделирование и численные методы, 2017, №1 (13), с. 78-90

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/128/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.130
18.11.2026 06:50:41

УДК 532.5:551.465 DOI 10.18698/2309-3684-2017-1-7890

Численное моделирование воздействия точечного импульсного источника в жидкости на ледяной покров

© А.С. Савин, Н.Е. Горлова, П.А. Струнин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены плоская и пространственная задачи о возмущении ледяного покрова точечным импульсным источником, локализованным в толще бесконечно глубокой жидкости. Проведено численное исследование возмущений ледяного покрова разной толщины источниками, находящимися на разных глубинах. Основное внимание уделено возмущениям ледяного покрова, возникающим непосредственно над источником.

Ключевые слова: *жидкость с ледяным покровом, точечный источник, возмущения ледяного покрова*

Введение. В настоящее время все большее значение приобретает изучение динамики водной среды с ледяным покровом, что связано, в частности, с расширением хозяйственной деятельности в арктических широтах. В силу значительных трудностей в организации лабораторных, а тем более натурных экспериментов, посвященных изучению возмущений, возникающих в жидкости с ледяным покровом, существенно возрастает важность их математического и численного моделирования.

Обзор основных теоретических результатов динамики жидкости с ледяным покровом содержится в работе [1]. Следует отметить, что до настоящего времени предметом изучения были, как правило, свободные волны на ледяном покрове жидкости, а вопрос об их генерации различными источниками не привлекал внимание исследователей. В то же время в классической механике жидкости без ледяного покрова были разработаны методы решения задач о генерации волн различными источниками возмущений. В частности, методы, основанные на моделировании локализованных в толще жидкости источников возмущений точечными гидродинамическими особенностями, позволили исследователям существенно продвинуться в аналитическом изучении возникающих на поверхности жидкости волн [2–8]. В последнее время были опубликованы работы, распространяющие этот подход на случай жидкости с ледяным покровом [9–15].

Так, в работе [9] рассмотрена задача о точечном источнике переменной интенсивности, локализованном в слое жидкости с ледяным покровом, а также приведены асимптотические выражения потенци-

ала скорости течения, устанавливающегося при длительной работе пульсирующего источника, и потенциала скорости течения на большом расстоянии от источника. В работе [10] изучены возмущения, возникающие на ледяном покрове жидкости, при импульсном воздействии на лед, а также при мгновенном выбросе некоторой массы точечным источником в толще жидкости. В этой работе методом стационарной фазы найдены асимптотические представления для волн, образующихся на ледяном покрове под влиянием таких возмущений. Эти представления получены для точек с фиксированным отношением расстояния от источника возмущений ко времени, т. е. в системе координат, движущейся с определяемой этим отношением скоростью. Обобщение данных результатов на случай источника с произвольно меняющейся во времени интенсивностью проведено в работе [11]. Заметим, что в настоящее время идет активная разработка новых методов моделирования сред, находящихся в напряженно-деформируемом состоянии [16, 17]. Приложение этих методов к перечисленным выше задачам может дать более реалистичное описание динамики ледяного покрова на основе более полного учета его многообразных физических свойств.

Целью настоящей работы является изучение влияния на ледяной покров точечных импульсных источников, локализованных в толще жидкости. Такие источники могут служить элементами более сложных моделей воздействия на ледяной покров различных глубинных процессов. Стоит отметить, что наиболее универсальные оценки возможных возмущений ледяного покрова, сочетающие в себе простоту и практическую значимость, получаются при выборе наиболее простых источников в толще жидкости.

В настоящей статье приведены результаты численного моделирования импульсного воздействия на ледяной покров мгновенного выброса некоторой массы жидкости. Численное исследование основано на аналитических решениях плоской и пространственной задач об импульсном точечном источнике в толще бесконечно глубокой жидкости, покрытой льдом. Решения получены в предположении, что на границе раздела жидкости и льда возникают волны, амплитуда которых много меньше их длины, а течение жидкости потенциально всюду кроме точки локализации источника. Ледяной покров рассмотрен как тонкая упругая пластина постоянной толщины, плавающая на поверхности жидкости. В отличие от работы [9] основное внимание уделено возмущениям ледяного покрова, возникающим непосредственно над источником, т. е. там, где его влияние наиболее существенно.

Плоская задача. Введем прямоугольную декартову систему координат так, что ось x пройдет по невозмущенной границе раздела

жидкости и льда, ось y направим вверх. Расположим источник интенсивности $Q = Q(t)$ в точке $(0, -l)$, где $l > 0$ — глубина погружения источника, равная расстоянию от него до ледяного покрова, t — время. Будем считать течение потенциальным всюду кроме точки $\mathbf{r}_0 = (0, -l)$ локализации источника. В этом предположении потенциал скорости $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области течения Ω кроме точки $\mathbf{r}_0$, где имеет логарифмическую особенность, и отвечает условию затухания волновых возмущений с глубиной

$$\begin{aligned} &\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, && (\mathbf{r} \in \Omega \setminus \mathbf{r}_0), \\ &\Phi(\mathbf{r}, t) \sim \frac{Q(t)}{2\pi} \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, && (\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0), \\ &|\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)| \to 0, && (y \to -\infty), \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим отклонение границы раздела жидкости и льда от ее равновесного положения $y = 0$ через $\eta = \eta(x, t)$. В рассматриваемом приближении малых волн граничные условия ставятся на невозмущенной линии раздела жидкости и льда $y = 0$ и имеют вид [1]:

$$\Phi_t + g\eta - C\eta_{xx} + B\eta_{xxxx} + A\eta_{tt} = 0, \quad \eta_t = \Phi_y, \tag{2}$$

где g — ускорение свободного падения.

Коэффициенты A, B, C определяются равенствами

$$A = \frac{\rho_1 h}{\rho_0}, \quad B = \frac{Eh^3}{12\rho_0\left(1 - \nu^2\right)}, \quad C = \frac{\sigma_{11} h}{\rho_0}, \tag{3}$$

где ρ_1 — плотность льда; h — толщина льда; ρ_0 — плотность воды; E — модуль Юнга льда; ν — коэффициент Пуассона льда; σ_{11} — начальное напряжение льда. В морских условиях эти величины имеют характерные значения: $\rho_0 = 1025$ кг/м^3; $\rho_1 = 0,9\rho_0$; $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м^2; $\nu = 0,3$; $\sigma_{11} = 10^5$ Н/м^2.

Используя предложенные в работах [10, 14] подходы, можно показать, что если источник начинает свою работу в некоторый момент времени в изначально невозмущенной среде, то из решения задач (1), (2) следует выражение для возникающего на ледяном покрове возмущения

$$\eta(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-l\lambda)\cos(\lambda x)}{1+A\lambda}\int_{-\infty}^{t}Q(\tau)\cos\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau d\lambda,$$

$$\omega^2=\lambda(1+A\lambda)^{-1}\left(g+C\lambda^2+B\lambda^4\right). \qquad (4)$$

Пусть импульсный источник осуществляет выброс жидкости в момент времени $t=0$. Тогда его интенсивность равна $Q(t)=W\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. В этом случае из выражения (4) следует, что при $t>0$ на ледяном покрове возникает возмущение

$$\eta(x,t)=\frac{W}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-l\lambda)\cos(\lambda x)}{1+A\lambda}\cos(\omega t)d\lambda. \qquad (5)$$

Поскольку в соответствии с равенством (5) величина отклонения границы раздела жидкости и льда от ее равновесного положения $\eta(x,t)$ линейно зависит от величины W, для упрощения расчетных формул примем $W=\pi$ м^2. На рис. 1 представлены профили волны на ледяном покрове в моменты времени t, равные 0, 6 и 25 с, рассчитанные по формуле (5) для глубины погружения источника $l=10$ м и толщины льда $h=0,5$ м.

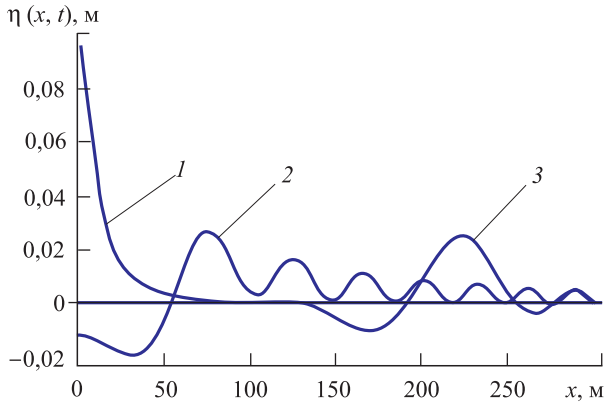


Рис. 1. Профили волны на ледяном покрове в зависимости от горизонтальной координаты в разные моменты времени t (с):
1 — 0; *2* — 6; *3* — 25

В наибольшей степени возмущение льда проявляется непосредственно над источником. По этой причине значительный интерес представляет зависимость от времени величины отклонения ледяного покрова от его равновесного положения в точке $x=0$. Графики зави-

симостей величины $\eta(0,t)$ от времени, визуализирующие колебания точки поверхности льда, находящейся непосредственно над источником, при разных толщинах льда h, представлены на рис. 2. При проведении расчетов по формуле (5) была принята глубина погружения источника $l=10$ м.

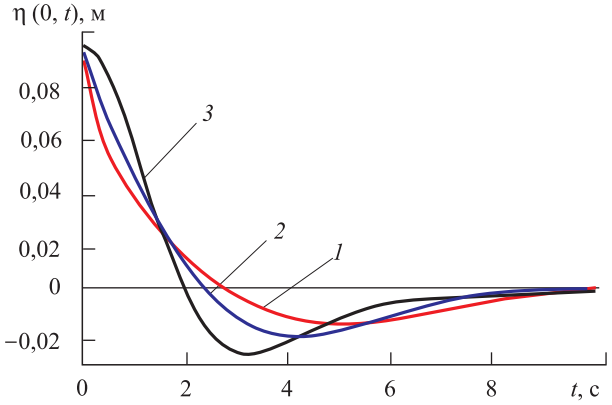


Рис. 2. Зависимости отклонения точки поверхности льда, находящейся непосредственно над источником (при $x=0$ м), от времени при различных значениях h (м): *1* — 1; *2* — 0,5; *3* — 0,1

Согласно результатам расчетов, представленным на рис. 2, при любой фиксированной толщине льда максимальное значение отклонения точки поверхности льда, находящейся непосредственно над источником, достигается в начальный момент времени $t=0$, после чего эта точка совершает быстро затухающие колебания и стремится к положению равновесия. На рис. 3 представлены графики зависимостей величины максимального отклонения ледяного покрова $\eta(0,0)$ непосредственно над источником от толщины льда h, найденные при различных глубинах погружения источника l.

Как и следовало ожидать, максимальное отклонение ледяного покрова непосредственно над источником монотонно убывает с ростом толщины льда при всех глубинах погружения источника. Графики зависимостей $\eta(0,0)$ максимального отклонения ледяного покрова от глубины погружения источника l при различных значениях h приведены на рис. 4. Видно, что максимальное отклонение ледяного покрова монотонно убывает с увеличением глубины погружения источника при всех значениях h. При этом максимальные отклонения льда тем более существенно различаются при разных h, чем меньше l.

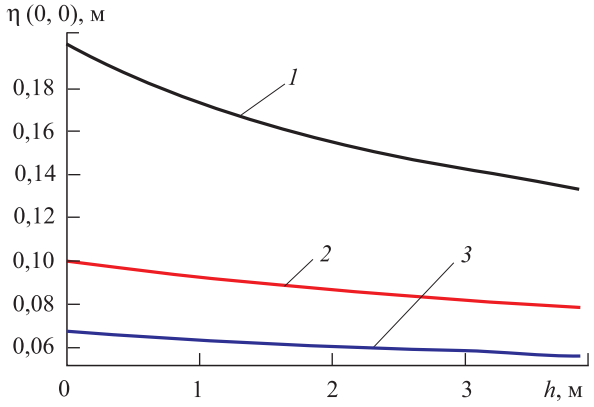


Рис. 3. Зависимость величины $\eta(0,0)$ (при $x = 0$ м) от толщины льда h при различных глубинах погружения источника l (м):
1 — 5; *2* — 10; *3* — 15

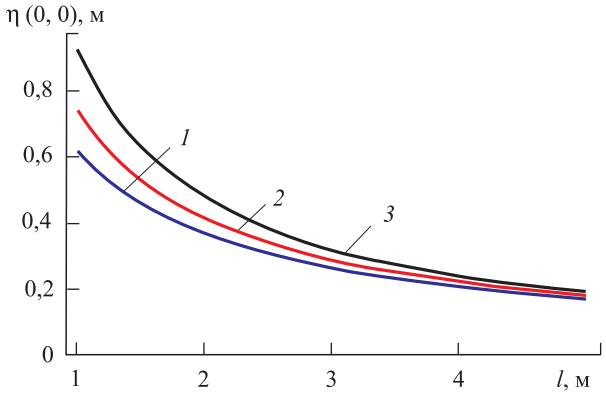


Рис. 4. Зависимость величины $\eta(0,0)$ (при $x = 0$ м) от глубины погружения источника l при различных значениях h (м):
1 — 1; *2* — 0,5; *3* — 0,1

Пространственная задача. Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z, в которой плоскость $z = 0$ совмещена с невозмущенной границей раздела жидкости и льда, а ось z направлена вверх. Пусть в жидкости под ледяным покровом находится точечный источник интенсивности $Q = Q(t)$. Будем считать течение потенциальным всюду кроме точки $\mathbf{r}_0 = (0, 0, -l)$ локализации источника. В этом предположении потенциал скорости $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области течения Ω кроме точки $\mathbf{r}_0$, где имеет характерную для точечного источника особенность, и отвечает условию затухания волновых возмущений с глубиной:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \qquad (\mathbf{r} \in \Omega \setminus \mathbf{r}_0),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \sim \frac{Q(t)}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \qquad (\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0), \tag{6}$$

$$|\nabla \Phi(\mathbf{r}, t)| \to 0, \qquad (z \to -\infty).$$

Обозначим через $\eta = \eta(x, y, t)$ отклонение границы раздела жидкости и льда от ее равновесного положения $z = 0$. В предположении малости таких отклонений граничные условия ставятся на плоскости $z = 0,$ после чего они принимают вид [1]

$$\Phi_t + g\eta - C\Delta_\eta + B\Delta^2_\eta + A\eta_{tt} = 0, \qquad \eta_t = \Phi_z, \tag{7}$$

где $\Delta_ = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ — горизонтальный оператор Лапласа.

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) так, что ось z пройдет через источник. Тогда в силу цилиндрической симметрии создаваемого источником поля скорости ни одна из фигурирующих в задаче величин не зависит от полярного угла φ. Обобщая на этот случай предложенные в статьях [10, 14] подходы, можно показать, что если источник начинает свою работу в некоторый момент времени в изначально невозмущенной среде, то из решения задачи (6), (7) следует выражение для возникающего на ледяном покрове возмущения

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \exp(-l\lambda) J_0(\lambda r)}{1 + A\lambda} \int_{-\infty}^{t} Q(\tau) \cos\left[\omega(t - \tau)\right] d\tau d\lambda, \tag{8}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка; величина ω по-прежнему определяется вторым из выражений (4).

Для импульсного источника, выбрасывающего в момент времени $t = 0$ объем жидкости W, интенсивность определяется равенством $Q(t) = W\delta(t),$ где $\delta(t)$ — дельта-функция. Тогда из выражения (8) найдем, что при $t > 0$ на ледяном покрове возникает возмущение

$$\eta(r, t) = \frac{W}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \exp\left(-l\lambda\right) J_0\left(\lambda r\right)}{1 + A\lambda} \cos(\omega t) d\lambda. \tag{9}$$

Как и в случае ранее рассмотренной плоской задачи, в соответствии с формулой (9) величина отклонения границы раздела жидкости и льда от ее равновесного положения $\eta(r, t)$ линейно зависит от выбрасываемого источником объема жидкости W, поэтому для упрощения расчетных формул примем $W = 2\pi$ м^3. На рис. 5 представлены се-

чения профилей кольцевых волн на ледяном покрове в моменты времени t, равные 0, 6, 25 с, рассчитанные по формуле (9) для глубины погружения источника $l = 10$ м и толщины льда $h = 0,5$ м.

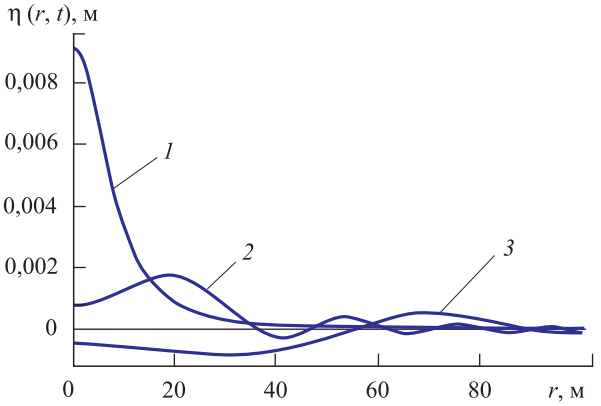


Рис. 5. Сечения профилей волн на ледяном покрове в зависимости от радиальной координаты в различные моменты времени t (с):
1 — 0; *2* — 6; *3* — 25

Воздействие источника на лед в наибольшей степени проявляется непосредственно над ним, поэтому значительный интерес представляет зависимость от времени величины отклонения ледяного покрова от его равновесного положения в точке $r = 0$. Графики зависимостей величины $\eta(0, t)$ от времени, иллюстрирующие колебания точки поверхности льда, находящейся непосредственно над источником, при разных значениях h представлены на рис. 6. При проведении расчетов глубина погружения источника l была принята равной 10 м.

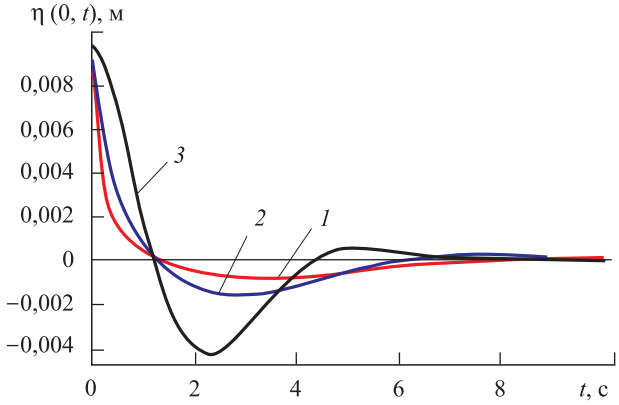


Рис. 6. Зависимости отклонения точки поверхности льда, находящейся непосредственно над источником (при $r = 0$ м), от времени t при разных значениях h (м):
1 — 1; *2* — 0,5; *3* — 0,1

По результатам проведенных расчетов можно заключить, что, как и в случае плоской задачи, максимальное значение отклонения точки поверхности льда, находящейся непосредственно над источником, достигается при любой фиксированной толщине льда в начальный момент времени $t = 0$, после чего эта точка совершает быстро затухающие колебания и стремится к положению равновесия. На рис. 7 представлен график зависимости величины максимального отклонения $\eta(0,0)$ от толщины льда h при различных глубинах погружения источника. Как и в случае плоской задачи, имеет место монотонное убывание максимального отклонения ледяного покрова над источником при увеличении его толщины при всех глубинах погружения источника.

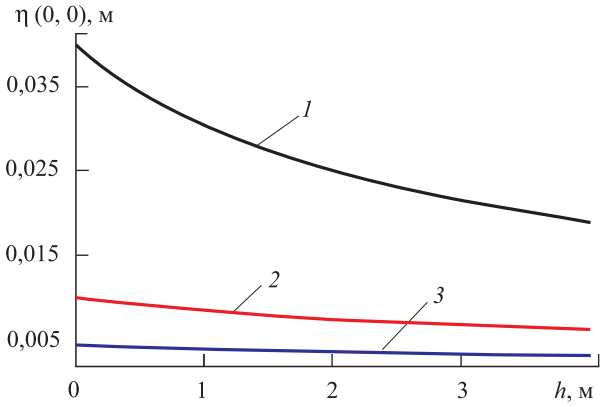


Рис. 7. Зависимость величины $\eta(0,0)$ (при $r = 0$ м) от толщины льда h при различных глубинах погружения источника l (м):
1 — 5; *2* — 10; *3* — 15

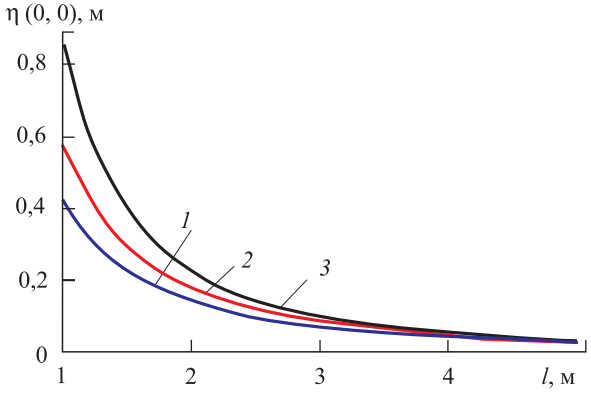


Рис. 8. Зависимость величины $\eta(0,0)$ (при $r = 0$ м) от глубины погружения источника l при различных значениях h (м):
1 — 1; *2* — 0,5; *3* — 0,1

На рис. 8 приведены графики зависимостей величины максимального отклонения ледяного покрова от глубины погружения источника при различных толщинах льда. Как и в плоском случае, максимальное отклонение ледяного покрова монотонно убывает с увеличением глубины погружения источника при всех толщинах льда. При этом чем меньше глубина погружения источника, тем более существенно различаются максимальные отклонения льда при разных значениях h.

Заключение. Проведенное исследование показало, что решения плоской и пространственной задач о возмущении ледяного покрова локализованным в толще жидкости точечным импульсным источником описывают похожие в качественном отношении процессы. Действительно, в обоих случаях под действием источника на ледяном покрове начинают распространяться изгибно-гравитационные волны. Ледяной покров непосредственно над источником, получив максимальное отклонение в начальный момент времени, совершает весьма быстро затухающие колебания и стремится к своему положению равновесия. Отметим, что это затухание не связано с рассеянием энергии, а обусловлено уходом волны из области начальных возмущений. Как и следовало ожидать, чем больше толщина льда, тем скорее происходит затухание его колебаний. При этом с ростом толщины ледяного покрова и глубины погружения источника начальное отклонение уменьшается.

Полученные результаты могут найти применение при оценке возмущений ледяного покрова, вызванных локализованными в водной толще источниками как естественного, так и искусственного происхождения, а также при разработке методов идентификации таких источников по вызываемым ими возмущениям ледяного покрова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильичев А.Т. *Уединенные волны в моделях гидромеханики*. Москва, Физматлит, 2003, 256 с.

[2] Ламб Г. *Гидродинамика*. Москва, Ленинград, Гостехиздат, 1947, 928 с.

[3] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика. В 2 ч. Ч. 1*. Москва, ОГИЗ, 1948, 535 с.

[4] Кочин Н.Е. *О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Собр. соч. в 2 т. Т. 2*. Москва, Ленинград, Изд-во АН СССР, 1949, с. 105–182.

[5] Келдыш М.В., Лаврентьев М.А. *О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Избранные труды. Механика*. Москва, Наука, 1985, с. 120–151.

[6] Келдыш М.В. *Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости. Избранные труды. Механика*. Москва, Наука, 1985, с. 100–103.

[7] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.

[8] Милн-Томпсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. Москва, Мир, 1964, 660 с.

[9] Chowdhury R.G., Mandal B.N. Motion due to fundamental singularities in finite depth water with an elastic solid cover. *Fluid Dynamics Research*, 2006, vol. 38, no. 4, pp. 224–240.

[10] Lu D.Q., Dai S.Q. Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice-cover. *Archive of Applied Mechanics*, 2006, vol. 76, no. 1–2, pp. 49–63.

[11] Lu D.Q., Dai S.Q. Flexural – and capillary – gravity waves due to fundamental singularities in an inviscid fluid of finite depth. *International Journal Engineering Science*, 2008, vol. 46, no. 11, pp. 1183–1193.

[12] Савин А.А., Савин А.С. Возмущение ледяного покрова движущимся в жидкости диполем. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2012, № 2, с. 3–10.

[13] Ильичев А.Т., Савин А.А., Савин А.С. Установление волны на ледяном покрове над движущимся в жидкости диполем. *Доклады Академии наук*, 2012, т. 444, № 2, с. 156–159.

[14] Савин А.А., Савин А.С. Генерация волн на ледяном покрове пульсирующим в жидкости источником. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2013, № 3, с. 24–30.

[15] Савин А.А., Савин А.С. Пространственная задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2015, № 5, с. 16–23.

[16] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.

[17] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом ползучести. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 101–118.

Статья поступила в редакцию 18.02.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Савин А.С., Горлова Н.Е., Струнин П.А. Численное моделирование воздействия точечного импульсного источника в жидкости на ледяной покров. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 78–90.

Савин Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 100 печатных работ. Область научных интересов: теоретическая и прикладная гидромеханика.

Горлова Надежда Евгеньевна — магистрант кафедры высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: математическая физика, численные методы.

Струнин Павел Алексеевич — магистрант кафедры высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: техническая гидромеханика, численные методы.

Numerical simulation of the point pulse source impact in a liquid on the ice cover

© Savin A.S., Gorlova N.E., Strunin P.A.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The research examines the planar and three-dimensional problems of an ice cover perturbed by a point pulse source localized in the depth of an infinitely deep liquid. We studied the ice cover of different thickness and carried out numerical study of its perturbations by sources located at different depths. The main attention is paid to the ice cover perturbations that arise directly above the source.

Keywords: *ice-covered liquid, point source, ice cover perturbations*

REFERENCES

[1] Ilichev A.T. *Uedinennye volny v modelyakh gidromekhaniki* [Solitary waves in hydromechanical models]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 256 p.

[2] Lamb G. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1947, 928 p.

[3] Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. V 2 chastyah. Chast 1* [Theoretical hydromechanics. In 2 parts. Part 1]. Moscow, OGIZ Publ., 1948, 535 p.

[4] Kochin N.E. *O volnovom soprotivlenii i podemnoy sile pogruzhennykh v zhidkost tel. Sobr. soch. v 2 tomah. Tom 2* [On the wave resistance and lifting force of bodies immersed in a liquid. Coll. pap. In 2 vols. Vol. 2]. Moscow, Leningrad, USSR Academy of Sc. Publ., 1949, pp. 105–182.

[5] Keldysh M.V., Lavrentev M.A. *O dvizhenii kryla pod poverkhnostyu tyazheloy zhidkosti. Izbrannye trudy. Mekhanika* [On the motion of the wing beneath the surface of a heavy liquid. Selected works. Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 120–151.

[6] Keldysh M.V. *Zamechaniya o nekotorykh dvizheniyakh tyazheloy zhidkosti. Izbrannye trudy. Mekhanika* [Remarks on some motions of a heavy fluid. Selected works. Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 100–103.

[7] Sretenskiy L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions of a fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 815 p.

[8] Milne-Thompson L.M. *Teoreticheskaya gidrodinamika.* [Theoretical hydrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1964, 660 p.

[9] Chowdhury R.G., Mandal B.N. *Fluid Dynamics Research*, 2006, vol. 38, no. 4, pp. 224–240.

[10] Lu D.Q., Dai S.Q. *Archive of Applied Mechanics*, 2006, vol. 76, no. 1, 2, pp. 49–63.

[11] Lu D.Q., Dai S.Q. *International Journal Engineering Science*, 2008, vol. 46, no. 11, pp. 1183–1193.

[12] Savin A.A., Savin A.S. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics. A journal of Russian Academy of Sciences*, 2012, no. 2, pp. 3–10.

[13] Ilichev A.T., Savin A.A., Savin A.S. *Doklady Akademii nauk*, 2012, vol. 444, no. 2, pp. 156–159.

[14] Savin A.A., Savin A.S. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics. A journal of Russian Academy of Science*, 2013, no. 3, pp. 24–30.

[15] Savin A.A., Savin A.S. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics. A journal of Russian Academy of Science*, 2015, no. 5, pp. 16–23.
[16] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.
[17] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3, pp. 101–118.

Savin A.S., Dr. Phys.-Math. Sc., Professor of the Department of Higher Mathematics of the Bauman Moscow State Technical University. Author of nearly100 publications. Science research interests include: theoretical and applied hydromechanics.

Gorlova N.E., Master's Degree student of the Department of Higher Mathematics of the Bauman Moscow State Technical University. Science research interests include: mathematical physics, computational methods.

Strunin P.A., Master's Degree student of the Department of Higher Mathematics of the Bauman Moscow State Technical University. Science research interests include: technical hydromechanics, computational methods.