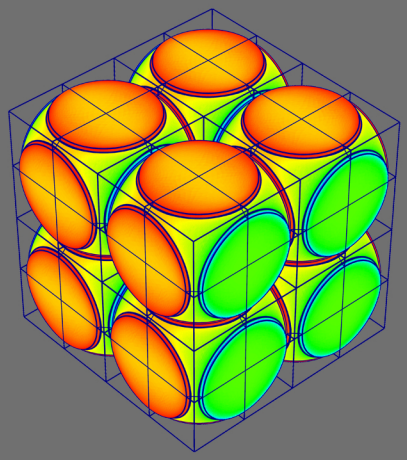
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Кольжанова Д. Ю., Каримов С. Б. Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения. Математическое моделирование и численные методы, 2017, №1 (13), с. 32-54

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/126/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.214
28.01.2026 23:43:11

УДК 539.3 DOI 10.18698/2309-3684-2017-1-3254

Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева,
Д.Ю. Кольжанова, С.Б. Каримов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлены результаты разработки модели деформирования несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями по характеристикам отдельных слоев. Предложен вариант метода асимптотического осреднения для слоистых нелинейно-упругих несжимаемых композитов с конечными деформациями и периодической структурой. Использовано универсальное представление определяющих соотношений для несжимаемых слоев композита, предложенное Ю.И. Димитриенко, позволяющее проводить моделирование одновременно для комплекса различных нелинейно-упругих моделей сред, отличающихся выбором пары энергетических тензоров. Доказано, что, если все слои композита являются несжимаемыми, то композит в целом также является несжимаемой, но анизотропной средой. Рассмотрена задача об одноосном растяжении слоистой пластины из несжимаемых слоев с конечными деформациями, с помощью разработанного метода рассчитаны эффективные диаграммы деформирования, связывающие компоненты осредненных тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа и градиента деформаций, а также распределение напряжений в слоях композита. Разработанный метод расчета эффективных диаграмм деформирования и напряжений в слоях композита может быть использован при проектировании эластомерных композитов с заданными свойствами.

Ключевые слова: *слоистые композиты, конечные деформации, несжимаемые среды, метод асимптотического осреднения, тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, градиент деформации, универсальные модели определяющих соотношений, диаграммы деформирования*

Введение. Значительный интерес для промышленности представляют композиционные материалы, способные выдерживать большие деформации (до 100 % и более) и состоящие из резиноподобных и эластомерных матриц и высокопрочных армирующих наполнителей (тканей, волокон и др.). Для расчета прочности таких композитов с конечными деформациями в зависимости от их микроструктуры необходимы методики, позволяющие связать эффективные механические характеристики — диаграммы деформирования в области больших деформаций с нелинейно-упругими характеристиками отдельных фаз композита. Для малых деформаций существует достаточно много методов решения этой задачи [1–7], однако для композитов с конечными деформациями большинство из них неприменимы в силу существенной нелинейности задачи.

Наиболее перспективен для расчета эффективных диаграмм деформирования метод асимптотического осреднения [1–3]. В работах [8, 9] этот метод был применен для расчета нелинейно-упругих свойств слоистых композитов с большими деформациями. В настоящей работе предложено дальнейшее развитие этого метода для расчета диаграмм деформирования несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями. Несжимаемыми средами с конечными деформациями являются практически все резиноподобные материалы [10–15]. Известно, что несжимаемые материалы некорректно рассматривать как предельный случай слабосжимаемых материалов, для них используется специальная постановка задач теории упругости с дополнительным условием несжимаемости, требующая особых методов решения.

Для определяющих соотношений фаз композита были использованы так называемые универсальные представления моделей несжимаемых нелинейно-упругих сред с конечными деформациями [9], предложенные Ю.И. Димитриенко [15, 16]. Они позволяют в рамках единого методического подхода решать задачи нелинейной теории упругости сразу для нескольких классов моделей сред с конечными деформациями.

Исходная задача нелинейной упругости для несжимаемых композитов с периодической структурой и конечными деформациями. Обозначим эйлеровы (декартовы) координаты материальных точек в отсчетной и актуальной конфигурациях как x^k и $\overset{0}{x}_k$, лагранжевы координаты как X^i (их будем полагать совпадающими с декартовыми $X^i = \overset{0}{x}{}^i$). Рассмотрим слоистый композит, в отсчетной конфигурации представляющий собой область $\overset{0}{V}$, являющуюся системой параллельных периодически повторяющихся N слоев, ортогональных к направлению OX^3. Тогда можно ввести ячейку периодичности (ЯП) — набор из N слоев суммарной толщиной l. Введем малый параметр $\kappa = l / L \ll 1$, как отношение толщины ЯП l к общей толщине композита L в отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$, а также локальную лагранжеву координату ξ в $\overset{0}{K}$, которая связана с X^i соотношениями

$$\xi = \frac{\bar{X}^3}{\kappa}, \quad \bar{X}^i = \frac{X^i}{L}. \tag{1}$$

Поместим нулевое положение локальной лагранжевой координаты в середину ЯП, тогда ξ будет изменяться в диапазоне $-0,5 \le \xi \le 0,5$. Границы раздела слоев в ЯП обозначим как $\xi = \xi_\alpha$, $\alpha = 1, ..., N-1$.

Рассматривая слоистый композит как неоднородную среду, сформулируем для него задачу нелинейной теории упругости в лагранжевом описании в общей формулировке [14] с использованием универсальных моделей сред с конечными деформациями, предложенных Ю.И. Димитриенко, для несжимаемых упругих сред

$$\overset{0}{\nabla}_i P^{ij} + \overset{0}{\rho} f^j = 0, \quad X^i \in \overset{0}{V}; \tag{2}$$

$$P^{ij} = -pF^{-1ij} + \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(F^k{}_l, \xi\right), \quad X^i \in \overset{0}{V} \cup \overset{0}{\Sigma}; \tag{3}$$

$$F^k{}_l = \delta^k_l + \overset{0}{\nabla}_l u^k, \quad X^i \in \overset{0}{V} \cup \overset{0}{\Sigma}; \tag{4}$$

$$\det\left(F^k_l\right) = 1; \tag{5}$$

$$\overset{0}{n}_i [P^{ij}] = 0, \quad [u^i] = 0, \quad X^i \in \overset{0}{\Sigma}_{\alpha\beta}; \tag{6}$$

$$\overset{0}{n}_i P^{ij} = t^j_e, \quad X^i \in \overset{0}{\Sigma}_1, \quad u^i = u^i_e, \quad X^i \in \overset{0}{\Sigma}_2. \tag{7}$$

Здесь: (2) — уравнения равновесия; (3) — определяющие соотношения нелинейно-упругой среды; (4) — кинематическое соотношение; (5) — условие несжимаемости; (6) — условия идеального контакта на поверхностях раздела $\overset{0}{\Sigma}_{\alpha\beta}$ α и β-й компоненты композита; (7) — граничные условия на частях $\overset{0}{\Sigma}_1$ и $\overset{0}{\Sigma}_2$ внешней поверхности композита ($\overset{0}{\Sigma}_1 \cup \overset{0}{\Sigma}_2 = \partial \overset{0}{V}$). Скачок функций на границе раздела $\overset{0}{\Sigma}_{\alpha\beta}$ компонент композита обозначен $[P^{ij}]$. Все компоненты векторов и тензоров отнесены к неподвижному ортонормированному базису $\mathbf{e}_k$ — отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$.

Кроме того, введены следующие обозначения: $\overset{0}{\rho}$ — плотность, p — гидростатическое давление, а также компоненты тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа P^{ij}, тензора градиента деформации F^k_l, обратного градиента деформации F^{-1ij}, вектора перемещений u^k, вектора нормали $\overset{0}{n}_i$ к поверхности в $\overset{0}{K}$, вектора поверхностных

усилий t_e^j, вектора заданных перемещений поверхности u_e^i, вектора плотности массовых сил f^j, набла-оператор $\overset{0}{\nabla}_i = \dfrac{\partial}{\partial X^i}$.

В соотношении (3) $\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}$ — компоненты тензора, описывающего нелинейно-упругие свойства фаз композита согласно моделям B_n упругих несжимаемых сред с конечными деформациями [15, 16]

$$\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(F_l^k,\xi\right) = \overset{0}{\rho}(\xi)\overset{(n)}{\mathrm{E}}{}^{0ijsq}\left(F_l^k\right)\psi_{sq}\left(\overset{(n)}{G}{}^{pr},\xi\right),$$

$$\psi_{sq}\left(\overset{(n)}{G}{}^{pr},\xi\right) = \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{G}{}^{sq}}\psi\left(\overset{(n)}{G}{}^{pr},\xi\right), \tag{8}$$

$$\overset{(n)}{\mathrm{E}}{}^{0ijsq}\left(F_l^k\right) = \sum_{\gamma,\omega=1}^{3} E_{\gamma\omega}^0 \overset{0}{Q}{}_\gamma^i Q_\omega^j \overset{0}{Q}{}_\omega^s \overset{0}{Q}{}_\gamma^q, \quad \overset{(n)}{G}{}^{pr} = \frac{1}{n-3}\sum_{\gamma=1}^{3}\lambda_\gamma^{n-3}\overset{0}{Q}{}_\gamma^p \overset{0}{Q}{}_\gamma^r.$$

Здесь $\overset{(n)}{\mathrm{E}}{}^{0ijsq}$ — компоненты тензора энергетической эквивалентности [16]; $\psi\left(\overset{(n)}{G}{}^{pr},\xi\right)$ — упругий потенциал, различный для каждой фазы композита, и поэтому зависящий явно от ξ; $\overset{(n)}{G}{}^{pr}$ — компоненты симметричного тензора энергетических мер деформации [16]; $E_{\gamma\omega}^0\left(\lambda_\gamma\right)$ — функции собственных значений λ_γ тензоров искажений, собственные значения λ_γ являются также функциями только от компонент тензора F_l^k [16]; $\overset{0}{Q}{}_\gamma^i\left(F_l^k\right)$ и $Q_\omega^j\left(F_l^k\right)$ — матрицы собственных векторов левого и правого тензора искажений, являющиеся неявными функциями от F_l^k.

Асимптотические разложения в нелинейной задаче механики для слоистого композита. Решение нелинейной задачи механики (1)–(7) находим относительно поля вектора перемещений $u^k = u^k\left(X^i,\xi\right)$ и гидростатического давления $p\left(X^i,\xi\right)$ в виде квазипериодических функций координат, т. е. периодических функций по локальной лагранжевой координате ξ и зависящих от глобальных лагранжевых координат X^i:

$$u^k\left(X^i,\xi\right)=u^k\left(X^i,\xi+a\right),\quad p\left(X^i,\xi\right)=p\left(X^i,\xi+a\right), \tag{9}$$

где a — произвольное целое число.

Дифференцирование квазипериодических функций $f^k\left(X^i,\xi\right)$ осуществляем по формальным правилам дифференцирования сложной функции, тогда с учетом (9) имеем

$$\overset{0}{\nabla}_i u^k = u^k_{,i}+\frac{1}{\kappa}u^k_{|3}\delta_{i3}, \tag{10}$$

где $u^k_{,i}=\dfrac{\partial}{\partial X^i}u^k\left(X^l,\xi\right)$, $u^k_{|3}=\dfrac{\partial}{\partial\xi}u^k\left(X^l,\xi\right)$.

Будем искать решение задачи (1)–(5) для композита периодической структуры в виде асимптотических разложений по параметру κ:

$$u^k\left(X^i,\xi\right)=u^{k(0)}\left(X^i\right)+\kappa u^{k(1)}\left(X^i,\xi\right)+\kappa^2\ldots,$$

$$p\left(X^i,\xi^l\right)=p^{(0)}\left(X^i,\xi^l\right)+\kappa p^{(1)}\left(X^i,\xi^l\right)+\kappa^2\ldots. \tag{11}$$

Подобные асимптотические разложения использованы в задачах о тонких упругих многослойных пластинах [17–19]. Подставляя (11) в соотношения (4) с учетом правила дифференцирования (10), находим асимптотическое разложение для градиента деформации:

$$F^k_l=F^{k(0)}_l\left(X^i,\xi\right)+\kappa F^{k(1)}_l\left(X^i,\xi\right)+\kappa^2\ldots,$$

$$F^{k(0)}_l\left(X^i,\xi\right)=\delta^k_l+u^{k(0)}_{,l}+u^{k(1)}_{/3}\delta_{l3},\ F^{k(1)}_l=u^{k(0)}_{,l}+u^{k(2)}_{/3}\delta_{l3}. \tag{12}$$

Подставляя разложение (11) в соотношения (3) и используя формулу Тейлора, находим асимптотические разложения определяющих соотношений и тензора Пиолы — Кирхгофа:

$$P^{ij}=P^{ij(0)}\left(X^k,\xi\right)+\kappa P^{ij(1)}\left(X^k,\xi\right)+\kappa^2P^{ij(2)}\left(X^k,\xi\right)+\ldots,$$

$$P^{ij(0)}=-p^{(0)}\left(F^{-1}\right)^{(0)ij}+\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(F^{k(0)}_l,\xi\right), \tag{13}$$

$$P^{ij(1)}=-p^{(0)}\left(F^{-1}\right)^{(1)ij}-p^{(1)}\left(F^{-1}\right)^{(0)ij}+\frac{\partial}{\partial F^{k(0)}_l}\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(F^{k(0)}_l,\xi\right)F^{k(1)}_l.$$

Подставляя разложение (12) в уравнение (5), с использованием формулы Тейлора находим асимптотическое разложение уравнения несжимаемости:

$$\det\left(F_l^{(0)k}\right)+\kappa\frac{\partial}{\partial F_l^{k(0)}}\det\left(F_r^{(0)p}\right)F_l^{k(1)}+\kappa^2\ldots=1. \qquad (14)$$

После подстановки разложения (13) в уравнения равновесия (2) с учетом (10), получаем асимптотическое разложение уравнений равновесия и граничных условий:

$$\frac{1}{\kappa}P_{/3}^{ij(0)}\delta_{i3}+\left(P_{,i}^{ij(0)}+P_{/3}^{ij(1)}\delta_{i3}+\overset{0}{\rho}f^j\right)+\kappa\left(P_{,i}^{ij(1)}+P_{/3}^{ij(2)}\delta_{i3}\right)+\kappa^2\ldots=0,$$

$$\overset{0}{n}_3\left[P^{3j(0)}\right]+\kappa\overset{0}{n}_3\left[P^{3j(1)}\right]+\kappa^2\ldots=0,$$

$$\left[u^{k(0)}\right]+\kappa\left[u^{k(1)}\right]+\kappa^2\ldots=0,\quad X^i\in\overset{0}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \qquad (15)$$

$$\overset{0}{n}_3P^{3j(0)}+\kappa\overset{0}{n}_3P^{3j(1)}+\kappa^2\ldots=t_e^j,\quad X^i\in\overset{0}{\Sigma}_1,$$

$$u^{k(0)}+\kappa u^{k(1)}+\kappa^2\ldots=u_e^i,\quad X^i\in\overset{0}{\Sigma}_2.$$

Локальные задачи нелинейной теории упругости для несжимаемых сред. Приравнивая к нулю в уравнениях (13)–(15) члены при одинаковых степенях κ, получаем рекуррентную последовательность L_κ локальных задач нелинейной теории упругости для несжимаемых сред. Задача L_0 имеет следующий вид:

$$P_{/3}^{3j(0)}=0,$$

$$P^{ij(0)}=-p^{(0)}\left(F^{-1}\right)^{(0)ij}+\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(F^k{}_l{}^{(0)},\xi\right),$$

$$F_l^{k(0)}\left(X^i,\xi\right)=\overline{F}_l^k+u_{/3}^{k(1)}\delta_{l3},$$

$$\det\left(F_l^{(0)k}\right)=1, \qquad (16)$$

$$\left[P^{3j(0)}\right]=0,\quad \left[u^{k(1)}\right]=0,\quad \xi=\xi_\alpha,\ \alpha=1,\ldots,n-1,$$

$$\left\langle u^{k(1)}\right\rangle=0,\ \left[\left[u^{k(1)}\right]\right]_3=0,\ \left\langle p^{(0)}\right\rangle=\overline{p}.$$

Здесь введена операция осреднения по ЯП $\overset{0}{V}_\xi$

$$<u^{k(1)}>=\int_{-0,5}^{0,5}u^{k(1)}d\xi, \qquad (17)$$

обозначены средний градиент деформации композита

$$\overline{F}_l^k = \delta_l^k + u_{,l}^{k(0)} \tag{18}$$

и среднее гидростатическое давление в композите $\overline{p}$.

Наличие условий $\left\langle u^{k(1)} \right\rangle = 0$ и $\left\langle p^{(0)} \right\rangle = \overline{p}$ вызвано требованием единственности задачи на ячейке и делает ее интегро-дифференциальной. Условие $\left[\left[u^{k(1)} \right]\right]_3 = 0$ означает периодичность неизвестных функций на границе ЯП $\left[\left[u^{k(1)} \right]\right]_3 = u^{k(1)}\Big|_{\xi=0,5} - u^{k(1)}\Big|_{\xi=-0,5} = 0.$

Задачу L_0 рассмотрим относительно неизвестных перемещений $u^{k(1)}$, при этом средний тензор-градиент $\overline{F}_l^k$ и среднее давление $\overline{p}$ являются «входными данными» локальной задачи L_0.

Локальная задача L_1 имеет вид:

$$P_{,i}^{ij(0)} + P_{/3}^{ij(1)}\delta_{i3} + \overset{0}{\rho} f^j = 0,$$

$$P^{ij(1)} = -p^{(0)}\left(F^{-1}\right)^{(1)ij} - p^{(1)}\left(F^{-1}\right)^{(0)ij} + \frac{\partial}{\partial F_l^{k(0)}} \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(F_l^{k(0)}, \xi\right) F_l^{k(1)},$$

$$F_l^{k(1)} = u_{,l}^{k(1)} + u_{/3}^{k(2)}\delta_{l3},$$

$$\frac{\partial}{\partial F_l^{k(0)}} \det\left(F_r^{(0)p}\right) F_l^{k(1)} = 0, \tag{19}$$

$$\left[P^{3j(1)}\right] = 0,\ \left[u^{k(2)}\right] = 0,\ \xi = \xi_\alpha,\ \alpha = 1,\ldots,n-1,$$

$$\left\langle u^{k(2)} \right\rangle = 0,\ \left[\left[u^{k(2)} \right]\right]_3 = 0,\ \left\langle p^{(1)} \right\rangle = 0.$$

Эта система уравнений рассматривается относительно перемещений $u^{k(2)}$ и давления $p^{(1)}$ и является линейной относительно данных функций.

Осредненная задача нелинейной теории упругости для композита. В силу периодичности функций на ЯП имеет место соотношение

$$< P_{/3}^{3j(0)} >= P^{3j(0)}\Big|_{\xi=0,5} - P^{3j(0)}\Big|_{\xi=-0,5} = 0. \tag{20}$$

Осредняя систему уравнений (15), в том числе уравнения (13), с учетом (20), получаем осредненную задачу нелинейной упругости для композита

$$< P^{ij(0)} >_{,i} + < \overset{0}{\rho} f^{j} >= 0,$$

$$< P^{ij(0)} >= - < p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)ij} > + < \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij} \left(F_l^{k(0)}, \xi \right) >, \qquad (21)$$

$$< F_l^{k(0)} >= \delta_l^k + u_{,l}^{k(0)},$$

$$\overset{0}{n}_i < P^{ij(0)} >=< t_e^j >, \;\; X^i \in \overset{0}{\Sigma}_1, \;\; u^{k(0)} =< u_e^i >, \;\; X^i \in \overset{0}{\Sigma}_2 .$$

Покажем, что осредненный градиент деформации $< F_l^k >$ совпадает со средним градиентом деформаций $\bar{F}_l^k$:

$$< F_l^k >= \bar{F}_l^k . \qquad (22)$$

Действительно, используя третью формулу из системы (16) и осредняя ее по ЯП, в силу периодичности функций $u^{k(1)}$, получаем:

$$< F_l^{k(0)} >=< \bar{F}_l^k + u_{/3}^{k(1)} \delta_{l3} >= \bar{F}_l^k + \delta_{l3} \int_{-0,5}^{0,5} u_{/3}^{k(1)} d\xi =$$

$$= \bar{F}_l^k + \delta_{l3} \left(u^{k(1)} \Big|_{\xi=0,5} - u^{k(1)} \Big|_{\xi=-0,5} \right) = \bar{F}_l^k . \qquad (23)$$

Вычислим теперь детерминант градиента деформации $F_l^{(0)k}$. С учетом (12) и (16), получаем

$$\det\left(F_l^{(0)k} \right) = \det\left(\bar{F}_l^k + u_{/3}^{k(1)} \delta_{l3} \right) = \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 & \bar{F}_3^1 + u_{/3}^{1(1)} \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 & \bar{F}_3^2 + u_{/3}^{2(1)} \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 & \bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Раскрывая детерминант матрицы по третьему столбцу, получаем линейную дифференциальную форму

$$\det\left(F_l^{(0)k} \right) = \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \left(\bar{F}_3^1 + u_{/3}^{1(1)} \right) - \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \left(\bar{F}_3^2 + u_{/3}^{2(1)} \right) +$$

$$+ \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} \left(\bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} \right). \qquad (25)$$

Осредним теперь соотношение (25) по ЯП и примем во внимание, что детерминанты матриц размером 2 в этом выражении от ξ не зависят, а $< u_{/3}^{j(1)} >= 0$ в силу периодичности $u^{j(1)}$. Тогда

$$< \det\left(F_l^{(0)k}\right) >= \det\begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} < \bar{F}_3^1 + u_{/3}^{1(1)} > -$$

$$-\det\begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} < \bar{F}_3^2 + u_{/3}^{2(1)} > +$$

$$+\det\begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} < \bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} >= \det\begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \bar{F}_3^3 -$$

$$-\det\begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \bar{F}_3^2 + \det\begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} \bar{F}_3^3 = \det(\bar{F}_l^k). \qquad (26)$$

В силу того, что все компоненты композита являются несжимаемыми, $\det\left(F_l^{(0)k}\right) = 1,$ поэтому с учетом (24)

$$\det\left(\bar{F}_l^k\right) = 1. \qquad (27)$$

Иначе говоря, композит в целом — несжимаемый материал.

Из соотношения (27) вытекает, что в системе из $N+1$ уравнения

$$\det\left(F_l^{(0)k}\left(X^i, \xi\right)\right) = 1, \ -\xi_\alpha \le \xi \le \xi_{\alpha+1}, \qquad \alpha = 0, 1, ..., N-1,$$

$$\det\left(\bar{F}_l^k\left(X^i\right)\right) = 1 \qquad (28)$$

независимыми являются только N уравнений.

Перемещение $u^{k(1)}$, являющееся решением задачи L_0 (16), может быть представлено как функция локальных координат и «входных данных задачи»: среднего градиента деформаций $\bar{F}_l^k$ и среднего гидростатического давления $\bar{p}$. Тогда в виде такой же зависимости

$$F_l^{k(0)} = F_l^{k(0)}\left(\bar{F}_s^m, \bar{p}, \xi\right), \ u^{k(1)} = u^{k(1)}\left(\bar{F}_s^m, \bar{p}, \xi\right) \qquad (29)$$

может быть представлен и градиент $F_l^{k(0)}$ нулевого приближения.

Осредненные определяющие соотношения для композита с несжимаемыми фазами. Подставляя (29) во вторую группу соотношений (21), получаем осредненные определяющие соотношения композита, записанные в неявной форме:

$$< P^{ij(0)} >= - < p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)ij} > + \overset{(n)}{\bar{\mathcal{F}}}{}^{0ij} \left(\bar{F}_l^k, \bar{p} \right),$$

$$\overset{(n)}{\bar{\mathcal{F}}}{}^{0ij} \left(\bar{F}_l^k, \bar{p} \right) = < \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij} \left(\bar{F}_l^k + u^{k(1)} \left(\bar{F}_r^p, \bar{p}, \xi^m \right)_{/3} \delta_{l3} \right), \xi > . \qquad (30)$$

Вычислим компоненты тензора $< p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)ij} >$. Поскольку $\det\left(F^{(0)ij} \right) = 1,$ компоненты обратного тензора $\left(F^{-1} \right)^{(0)ij}$, вычисленные через алгебраические дополнения элементов $F^{(0)ij}$, в явном виде могут быть записаны как

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)11} = \bar{F}_2^2 \left(\bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} \right) - \bar{F}_2^3 \left(\bar{F}_3^2 + u_{/3}^{2(1)} \right),$$

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)22} = \bar{F}_1^1 \left(\bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} \right) - \bar{F}_1^3 \left(\bar{F}_3^1 + u_{/3}^{1(1)} \right),$$

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)33} = \bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2 - \bar{F}_1^2 \bar{F}_2^1,$$

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)12} = -\bar{F}_2^1 \left(\bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} \right) + \bar{F}_2^3 \left(\bar{F}_3^1 + u_{/3}^{1(1)} \right),$$

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)21} = -\bar{F}_1^2 \left(\bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} \right) + \bar{F}_1^3 \left(\bar{F}_3^2 + u_{/3}^{2(1)} \right), \qquad (31)$$

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)13} = \bar{F}_2^1 \left(\bar{F}_3^2 + u_{/3}^{2(1)} \right) - \bar{F}_2^2 \left(\bar{F}_3^1 + u_{/3}^{1(1)} \right),$$

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)31} = \bar{F}_1^2 \bar{F}_2^3 - \bar{F}_1^3 \bar{F}_2^2,$$

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)23} = \bar{F}_2^2 \left(\bar{F}_3^1 + u_{/3}^{1(1)} \right) - \bar{F}_1^1 \left(\bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} \right),$$

$$\left(F^{-1} \right)^{(0)32} = \bar{F}_2^1 \bar{F}_1^3 - \bar{F}_1^1 \bar{F}_2^3.$$

Часть этих компонент $\left(F^{-1} \right)^{(0)ij}$ не зависят от координаты ξ и совпадают с соответствующими компонентами обратного осредненного тензора $\left(\bar{F}^{-1} \right)^{ij}$. Остальные компоненты $\left(F^{-1} \right)^{(0)ij}$ являются линейными функциями от частных производных $u_{/3}^{k(1)}$. Тогда при осреднении компонент из первой группы, умноженных на $p^{(0)} \left(X^k, \xi \right)$, получаем:

$$< p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)ij} >=< p^{(0)} > \left(\bar{F}^{-1} \right)^{ij}. \qquad (32)$$

При осреднении компонент из второй группы, умноженных на $p^{(0)} \left(X^k, \xi \right)$, получаем выражения

$$< p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)23} >=< p^{(0)} \left(\bar{F}_2^2 \left(\bar{F}_3^1 + u_{/3}^{1(1)} \right) - \bar{F}_1^1 \left(\bar{F}_3^3 + u_{/3}^{3(1)} \right) \right) >=$$

$$=< p^{(0)} > \left(\bar{F}_2^2 \bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1 \bar{F}_3^3 \right) + < p^{(0)} u_{/3}^{1(1)} > \bar{F}_2^2 - < p^{(0)} u_{/3}^{3(1)}) \Big) > \bar{F}_1^1. \qquad (33)$$

Очевидно, что $\left(\bar{F}_2^2 \bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1 \bar{F}_3^3 \right) = \left(\bar{F}^{-1} \right)^{23}$. Положим далее, что ЯП обладает симметрией относительно плоскости $\xi = 0$. Тогда в силу периодичности функции $p^{(0)}$, $u^{k(1)}$ являются симметричными по координате ξ: $p^{(0)} \left(X^k, \xi \right) = p^{(0)} \left(X^k, -\xi \right)$, $u^{k(1)} \left(X^k, \xi \right) = u^{k(1)} \left(X^k, -\xi \right)$. Производные $u_{/3}^{k(1)}$ от симметричной функции являются антисимметричными: $u_{/3}^{k(1)} \left(X^k, \xi \right) = -u_{/3}^{k(1)} \left(X^k, -\xi \right)$. Антисимметричными будут и произведения функций $p^{(0)} \left(X^k, \xi \right) u_{/3}^{k(1)} \left(X^k, \xi \right) = -p^{(0)} \left(X^k, -\xi \right) \times$ $\times u_{/3}^{k(1)} \left(X^k, -\xi \right)$. Тогда интегралы по всей ЯП от антисимметричных функций обращаются в нуль:

$$< p^{(0)} u_{/3}^{k(1)} >= \int_{-0,5}^{0} p^{(0)} u_{/3}^{k(1)} d\xi + \int_{0}^{0,5} p^{(0)} u_{/3}^{k(1)} d\xi = 0. \qquad (34)$$

Следовательно, в выражениях (33) все слагаемые, содержащие множители $< p^{(0)} u_{/3}^{k(1)} >$, равны нулю. Исходя из этого, получаем

$$< p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)23} >=< p^{(0)} > \left(\bar{F}_2^2 \bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1 \bar{F}_3^3 \right) =< p^{(0)} > \left(\bar{F}^{-1} \right)^{23}. \qquad (35)$$

Аналогично преобразуем все остальные компоненты тензора $< p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)ij} >$ второй группы компонент:

$$< p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)ij} >=< p^{(0)} > \left(\bar{F}^{-1} \right)^{ij}. \qquad (36)$$

Объединяя формулы (32) и (36), получаем, что для всех компонент обратного тензора $< p^{(0)} \left(F^{-1} \right)^{(0)ij} >$ имеет место соотношение (36). Тогда осредненные определяющие соотношения (30) для композита можно записать:

$$\overline{P}^{ij} = -\overline{p}\left(\overline{F}^{-1}\right)^{ij} + \overset{(n)}{\overline{\mathcal{F}}}{}^{0ij}\left(\overline{F}_l^k, \overline{p}\right), \tag{37}$$

$$\overline{P}^{ij} = < P^{ij(0)} >, \quad \overset{(n)}{\overline{\mathcal{F}}}{}^{0ij}\left(\overline{F}_l^k, \overline{p}\right) = < \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(\overline{F}_l^k + u^{k(1)}\left(\overline{F}_r^p, \overline{p}, \xi^m\right)_{/3} \delta_{l3}\right), \xi > .$$

Таким образом, доказано, что осредненные определяющие соотношения для композита имеют вид, характерный для несжимаемых упругих сред, отличающийся наличием слагаемого с гидростатическим осредненным давлением $\overline{p}$. Однако если исходные фазы композита несжимаемые и изотропные, то композит в целом является несжимаемой нелинейно-упругой анизотропной средой. Кроме того, гидростатическое давление $\overline{p}$ входит в тензорную функцию $\overset{(n)}{\overline{\mathcal{F}}}{}^{0ij}\left(\overline{F}_l^k, \overline{p}\right)$ определяющих соотношений композита. Для фаз композита имеет место более простое определяющее соотношение (3).

Тензор истинных напряжений Коши композита вычисляем по формуле $\overline{T}^{ij} = \overline{F}^{im}\overline{P}^{mj}$. Тогда из формулы (37) получаем

$$\overline{T}^{ij} = -\overline{p}\delta^{ij} + \overset{(n)}{\overline{\mathcal{F}}}{}^{0ij}\left(\overline{F}_l^k, \overline{p}\right), \qquad \overset{(n)}{\overline{\mathcal{F}}}{}^{ij}\left(\overline{F}_l^k, \overline{p}\right) = \overline{F}^{im}\overset{(n)}{\overline{\mathcal{F}}}{}^{0mj}\left(\overline{F}_l^k, \overline{p}\right), \tag{38}$$

т. е. представление определяющих соотношений композита в виде связи тензора напряжений Коши $\overline{T}^{ij}$, осредненного градиента деформации $\overline{F}_l^k$ и среднего давления $\overline{p}$.

Решение локальной задачи нулевого приближения. Задача (16) является нелинейной, но одномерной, в ней все функции зависят только от ξ, что позволяет найти ее формальное решение.

Интегрируя уравнения равновесия в системе (16), получаем, что напряжения $P^{3j(0)}$ постоянны в ЯП

$$P^{3j(0)} = C^j = \text{const}, \tag{39}$$

где C^j — постоянные интегрирования.

Из третьего уравнения системы (16) следует, что из девяти компонент градиента деформаций $F_l^{k(0)}$ от координаты ξ зависят только три, а остальные шесть совпадают с компонентами среднего градиента

$$F_3^{k(0)} = \overline{F}_3^k + u_{/3}^{k(1)}, \quad F_L^{k(0)} = \overline{F}_L^k, \qquad L = 1,\ 2. \tag{40}$$

Тогда, подставляя (37) во второе соотношение в системе (16) для напряжений $P^{ij(0)}$ вместе с условием несжимаемости (четвертое со-

отношение в системе (16)) и условием нормировки (последнее условие в (16)), для каждого слоя композита получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно трех компонент $F_3^{k(0)}$ и $p^{(0)}$:

$$C^j = -p^{(0)}\left(F^{-1}\right)^{(0)3j} + \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{03j}\left(F_3^{k(0)}, \overline{F}_L^k, \xi\right),$$

$$\det\left(F_l^{(0)k}\right) = 1, \tag{41}$$

$$\left\langle p^{(0)} \right\rangle = \overline{p}, \quad -\xi_\alpha \le \xi \le \xi_{\alpha+1}, \qquad \alpha = 0, 1, ..., N-1.$$

Средний градиент $\overline{F}_l^k$ в системе (41) считается известным и удовлетворяющим осредненному условию несжимаемости (27). Тогда с учетом (28) только для $N-1$ слоя система первых двух уравнений в системе (41) является независимой. Для всех N слоев эта система будет зависимой, поэтому условие несжимаемости для одного из слоев в системе (41) заменена на условие нормировки $\left\langle p^{(0)} \right\rangle = \overline{p}$.

Запишем формальное решение системы (41):

$$F_3^{k(0)} = \overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^k\left(C^j, \overline{F}_l^k, \overline{p}, \xi\right),$$

$$p^{(0)} = \overset{(n)}{\mathcal{P}}\left(C^j, \overline{F}_l^k, \overline{p}, \xi\right). \tag{42}$$

Тогда, подставляя первую формулу системы (42) в выражение (40), получаем систему трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно перемещений $u^{k(1)}$

$$\overline{F}_3^k + u_{/3}^{k(1)} = \overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^k\left(C^j, \overline{F}_l^k, \overline{p}, \xi\right), \tag{43}$$

которую легко интегрируем:

$$u^{k(1)} = \int_{-0,5}^{\xi} \overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^k\left(C^j, \overline{F}_l^k, \overline{p}, \xi\right) d\xi - \overline{F}_3^k \xi + B^k. \tag{44}$$

Здесь B^k — константы интегрирования.

Условия идеального контакта в системе (16) $\left[P^{3j(0)}\right] = 0$, $\left[u^{k(1)}\right] = 0$ выполняются автоматически. Подставляя выражение (44)

в условие нормировки в системе (16) $\left\langle u^{k(1)} \right\rangle = 0,$ находим константы интегрирования:

$$B^k = < \int\limits_{-0,5}^{\xi} \overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^k \left(C^j, \bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi \right) d\xi > . \tag{45}$$

После подстановки выражения (44) в условие периодичности системы (16), получаем

$$< \overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^k \left(C^j, \bar{F}_l^k, \bar{p}, \xi \right) > = \bar{F}_3^k , \tag{46}$$

представляющее собой систему трех нелинейных алгебраических уравнений относительно трех констант C^j.

Запишем формальное решение этой системы уравнений в виде

$$C^j = \overset{(n)}{\mathcal{S}}{}^j \left(\bar{F}_l^k, \bar{p} \right). \tag{47}$$

Подставляя (47) в системы (42) и (43), находим:

$$F_3^{k(0)} = \overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^k \left(\overset{(n)}{\mathcal{S}}{}^j \left(\bar{F}_l^s, \bar{p} \right), \bar{F}_l^s, \xi \right),$$

$$p^{(0)} = \overset{(n)}{\mathcal{P}} \left(\overset{(n)}{\mathcal{S}}{}^j \left(\bar{F}_l^s, \bar{p} \right), \bar{F}_l^s, \xi \right), \tag{48}$$

$$u_{/3}^{k(1)} = \overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^k \left(\overset{(n)}{\mathcal{S}}{}^j \left(\bar{F}_l^s, \bar{p} \right), \bar{F}_l^s, \xi \right) - \bar{F}_3^k .$$

После подстановки третьего выражения (48) в третье уравнение системы (16), получаем соотношение между градиентом $F_l^{k(0)}$ и осредненным градиентом $\bar{F}_j^k$:

$$F_l^{k(0)} = \bar{F}_l^k + \left(\overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^k \left(\overset{(n)}{\mathcal{S}}{}^j \left(\bar{F}_m^s, \bar{p} \right), \bar{F}_m^s, \xi \right) - \bar{F}_3^k \right) \delta_{l3}. \tag{49}$$

Подставляя выражения (48), (49) для $p^{(0)}$ в определяющие соотношения системы (16), находим компоненты тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа в нулевом приближении

$$P^{ij(0)} = -\overset{(n)}{\mathcal{P}}\left(\overset{(n)}{\mathcal{S}}{}^{j}\left(\bar{F}_l^s, \bar{p}\right), \bar{F}_l^s, \xi\right)\left(F^{-1}\right)^{(0)ij} +$$

$$+\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(\bar{F}_l^k + \left(\overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^{k}\left(\overset{(n)}{\mathcal{S}}{}^{j}\left(\bar{F}_l^s, \bar{p}\right), \bar{F}_l^s, \xi\right) - \bar{F}_3^k\right)\delta_{l3}, \xi\right). \qquad (50)$$

При осреднении соотношения (50) получим выражение для осредненной функции определяющих соотношений композита

$$\overset{(n)}{\bar{\mathcal{F}}}{}^{0ij}\left(\bar{F}_l^k, \bar{p}\right) = \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(\bar{F}_l^k + \left(\overset{(n)}{\mathcal{G}}{}^{k}\left(\overset{(n)}{\mathcal{S}}{}^{j}\left(\bar{F}_l^s, \bar{p}\right), \bar{F}_l^s, \xi\right) - \bar{F}_3^k\right)\delta_{l3}, \xi\right)\right\rangle. \qquad (51)$$

Алгоритм численной реализации предложенного метода решения локальной задачи и вычисления функции осредненных определяющих соотношений (51) аналогичен алгоритму, описанному для сжимаемых нелинейно-упругих композитов [8, 9].

Задача об одноосном растяжении слоистой композитной пластины. Рассмотрим задачу об одноосном растяжении пластины из слоистого композита. Для этой задачи средний тензор деформаций $\bar{F}_l^k$ композита имеет три ненулевые компоненты, не зависящие от координат X^i,

$$\bar{F}_1^1 = 1 + u_{,1}^{1(0)} \quad \bar{F}_2^2 = 1 + u_{,2}^{2(0)}, \ \bar{F}_3^3 = 1 + u_{,3}^{3(0)}, \text{ остальные } \bar{F}_l^k = 0. \qquad (52)$$

Отсюда находим закон движения пластины из осредненного композита при одноосном растяжении

$$x^\gamma = \bar{F}_\gamma^\gamma X^\lambda, \qquad \gamma = 1,\ 2,\ 3. \qquad (53)$$

Из условия несжимаемости (27) следует, что независимыми являются только две компоненты $\bar{F}_\gamma^\gamma$:

$$\bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2 \bar{F}_3^3 = 1. \qquad (54)$$

Будем искать решение локальной задачи нулевого приближения (39)–(47) для случая одноосного растяжения в виде

$$F_3^{k(0)} = F_3^{3(0)}\delta_3^k, \ F_l^{(0)k} = \sum_{\gamma=1}^{3} F_\gamma^{(0)\gamma}\delta_\gamma^k\delta_\gamma^l, \ C^j = C^3\delta_3^j. \qquad (55)$$

Тогда из системы (40) и условия несжимаемости слоев следует, что все градиенты деформации слоев совпадают со средним градиентом

$$F_{\gamma}^{(0)\gamma} = \overline{F}_{\gamma}^{\gamma}, \qquad \gamma = 1,\ 2,\ 3. \tag{56}$$

Тогда система (41) принимает вид

$$\begin{gathered} C^3 = -p^{(0)} / \overline{F}_3^3 + \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{033}\left(\overline{F}_3^3, \overline{F}_1^1, \overline{F}_2^2, \xi\right), \\ \left\langle p^{(0)} \right\rangle = \overline{p} \end{gathered} \tag{57}$$

и допускает решение в явном виде относительно C^3 и $p^{(0)}$:

$$\begin{gathered} C^3 = -\overline{p}^{(0)} / \overline{F}_3^3 + \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{033}\left(\overline{F}_3^3, \overline{F}_1^1, \overline{F}_2^2, \xi\right) \right\rangle, \\ p^{(0)} = \overline{p} + \overline{F}_3^3 \left(\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{033}\left(\overline{F}_3^3, \overline{F}_1^1, \overline{F}_2^2, \xi\right) - \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{033}\left(\overline{F}_3^3, \overline{F}_1^1, \overline{F}_2^2, \xi\right) \right\rangle \right). \end{gathered} \tag{58}$$

Уравнение (46) с учетом (56) выполняется тождественно. Формулы (58) вместе с $u_{/3}^{3(1)} = 0$ представляют собой явный вид решения (48) для одноосного растяжения. Выражения (56) — это явная форма уравнений (49) для данного случая. Формула (50) для напряжений в слоях композита принимает следующий вид:

$$P^{ij(0)} = -\left(p^{(0)} / \overline{F}_{\gamma}^{\gamma}\right)\delta_{\gamma}^{i}\delta_{\gamma}^{j} + \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(\overline{F}_3^3, \overline{F}_1^1, \overline{F}_2^2, \xi\right). \tag{59}$$

Осредненное определяющее соотношение (37) для данного случая получаем осреднением выражения (59)

$$\overline{P}^{ij} = -\left(\overline{p} / \overline{F}_{\gamma}^{\gamma}\right)\delta_{\gamma}^{i}\delta_{\gamma}^{j} + \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(\overline{F}_3^3, \overline{F}_1^1, \overline{F}_2^2, \xi\right) \right\rangle. \tag{60}$$

Выражение (37) для компонент осредненного тензора напряжений Коши принимает вид

$$\overline{T}^{\gamma\gamma} = -\overline{p} + \overline{F}_{\gamma}^{\gamma}\left\langle \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0\gamma\gamma}\left(\overline{F}_3^3, \overline{F}_1^1, \overline{F}_2^2, \xi\right) \right\rangle, \qquad \gamma = 1,\ 2,\ 3. \tag{61}$$

Используем граничные условия на боковых поверхностях композита $\overline{T}^{22} = \overline{T}^{33} = 0$ при одноосном растяжении. В силу того, что напряжения $\overline{T}^{\gamma\gamma}$ в пластине однородны, из граничных условий и формул (55) и (61)

$$\bar{T}^{11} = -\bar{p} + \bar{F}_1^1 \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{011}\left(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2, \xi\right)\right\rangle,$$

$$0 = -\bar{p} + \bar{F}_\gamma^\gamma \left\langle \overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0\gamma\gamma}\left(\bar{F}_3^3, \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^2, \xi\right)\right\rangle, \ \gamma = 1,\ 2, \tag{62}$$

$$\bar{F}_1^1 \bar{F}_2^2 \bar{F}_3^3 = 1$$

получаем систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных: $\bar{T}^{11}$, $\bar{F}_2^2$, $\bar{F}_3^3$, $\bar{p}$, являющихся функциями от $\bar{F}_1^1$. Решая эту систему, находим диаграммы деформирования

$$\bar{T}^{11} = \bar{T}^{11}\left(\bar{F}_1^1\right), \ \bar{P}^{11} = \bar{P}^{11}\left(\bar{F}_1^1\right) \tag{63}$$

композита при одноосном растяжении.

Результаты численного моделирования. В качестве конкретных моделей нелинейно-упругих сред была рассмотрена модель несжимаемых сред класса Bv [16] (модель Муни, для которой индекс n принимает значение 5). Тензорная функция $\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(F_l^k, \xi\right)$ для нее имеет явное выражение через градиент деформации

$$\overset{(V)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}\left(F_l^k, \xi\right) = 2\mu(\xi)\left(\left(1 + \beta(\xi) + \left(1 - \beta(\xi)\right) I_1\right) F^{ji} - \left(1 - \beta(\xi)\right) F^{ki} F^{kl} F^{jl}\right), \tag{64}$$

где $I_1 = F^{ki} F^{ki}$ — первый инвариант меры деформации $\overset{(V)}{G}{}^{il} = F^{ki} F^{kl}$; $\mu(\xi)$ и $\beta(\xi)$ — упругие константы слоев. Вычислять собственные векторы $\overset{0}{Q}{}_\gamma^i\left(F_l^k\right)$ и собственные значения λ_γ для этой модели не требуется.

Для численного решения системы (62) был использован метод минимизации численной ошибки путем покоординатного спуска [8, 9]. Ячейка периодичности композита состояла из трех слоев. Были выбраны следующие упругие константы слоев:

– слой 1: $\mu_1 = 0,8$ МПа, $\beta_1 = 1,0$, относительная толщина слоя $h_1 = 0,2$;

– слой 2: $\mu_2 = 1,4$ МПа, $\beta_2 = 1,0$, относительная толщина слоя $h_2 = 0,6$;

– слой 3: $\mu_3 = 0,7$ МПа, $\beta_3 = 0,9$, относительная толщина слоя $h_3 = 0,2$.

Графики функций (63), построенные с помощью описанного выше алгоритма для отдельных слоев композита и для самого композита, отражены на рис. 1.

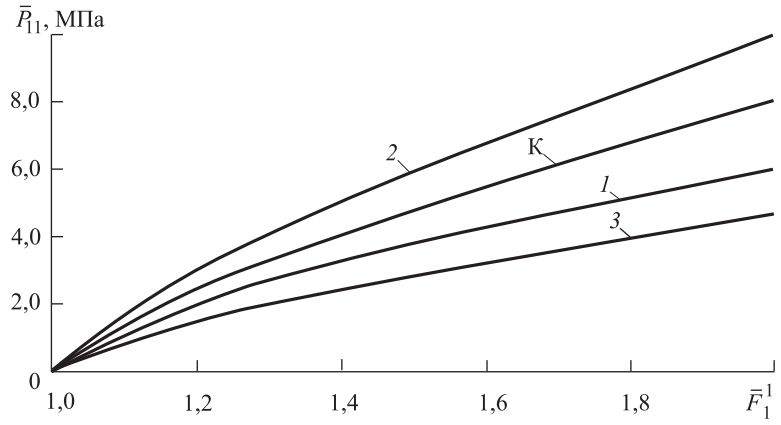


Рис. 1. Диаграммы деформирования $\bar{P}_{11}\left(\bar{F}_1^1\right)$ для слоистого композита (К) и отдельных составляющих его слоев (*1*, *2* и *3*), построенные с помощью разработанного метода

Функция $\bar{P}_{11}\left(\bar{F}_1^1\right)$ для композита располагается между соответствующими функциями для отдельных его слоев: слоя *2* с более высокой жесткостью и слоев *1* и *3* с меньшей жесткостью, чем сам композит.

Были проведены расчеты для трех значений относительных толщин слоев композита: $h_2 = 0,8$, $h_2 = 0,6$ и $h_2 = 0,4$, где h_2 — толщина «жесткого» слоя, толщины слоев *1* и *2* были одинаковы. Результаты расчетов приведены на рис. 2. С увеличением толщины жесткого слоя диаграмма деформирования композита приближается к диаграмме деформирования жесткого слоя.

На рис. 3 представлены результаты расчетов напряжений $P_{11}(\xi)$ в слоях композита с толщиной $h_2 = 0,6$ при фиксированном значении $\bar{F}_1^1 = 2,0$. Напряжения постоянны по каждому слою, но меняются при переходе от слоя к слою; наибольшие их значения возникают в жестком слое, превышая среднее напряжение $\bar{P}_{11}\left(\bar{F}_1^1\right)$ в композите $\bar{P}_{11}\left(\bar{F}_1^1\right)$.

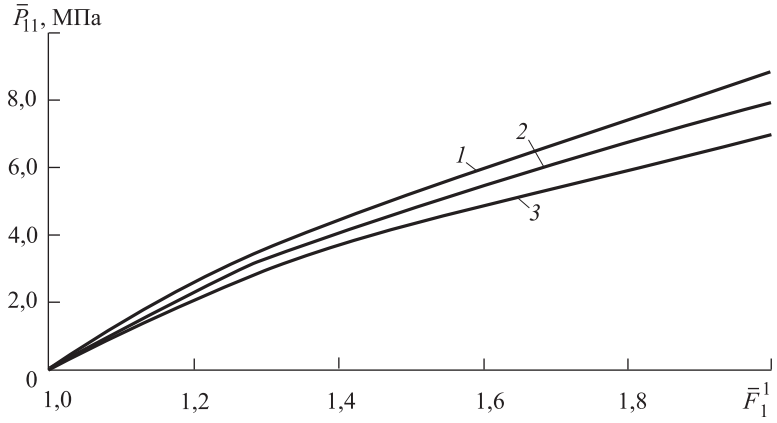


Рис. 2. Диаграммы деформирования $\bar{P}_{11}\left(\bar{F}_1^1\right)$ для слоистого композита, построенные с помощью разработанного метода, при разных относительных толщинах h_2 второго (жесткого) слоя:
1 — 0,8; *2* — 0,6; *3* — 0,4

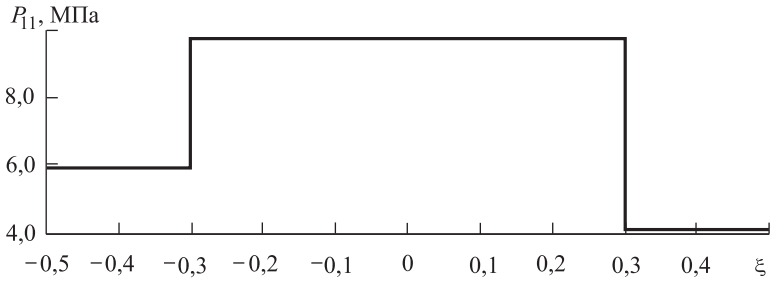


Рис. 3. Распределение напряжения $P_{11}(\xi)$ по толщине слоистого композита с ЯП из трех слоев при продольном растяжении

Заключение. Предложен вариант метода асимптотического осреднения для слоистых упругих несжимаемых композитов с конечными деформациями и периодической структурой. Использовано универсальное представление определяющих соотношений для комплекса различных моделей сред с конечными деформациями.

Разработан алгоритм решения задачи на ячейке периодичности для слоистых несжимаемых композиционных материалов с конечными деформациями, позволяющий рассчитывать эффективные диаграммы деформирования слоистых композитов с конечными деформациями, связывающие компоненты осредненных тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа и градиента деформаций, а также напряжения в слоях композита.

Приведенный пример построения диаграммы деформирования композита с конечными деформациями при одноосном растяжении

показывает реализуемость предложенного алгоритма, и его возможности для моделирования нелинейно-упругих свойств композитов по свойствам составляющих его слоев.

Разработанный метод расчета эффективных диаграмм деформирования и напряжений в слоях композита может быть использован при проектировании эластомерных композитов с заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials.* New York, John Wiley & Sons, 1979, 324 p.

[2] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* Москва, Наука, 1984, 356 с.

[3] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов.* Москва, Изд-во МГУ, 1984, 336 с.

[4] Dimitrienko Yu.I. A Structural thermos-mechanics model of textile composite materials at high temperatures. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, issue 7, pp. 1041–1053.

[5] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–48.

[6] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечного элемента. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.

[7] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[8] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю. Моделирование слоистых композитов с конечными деформациями методом асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1405.html (дата обращения 24.05.2017). DOI 10.18698/2308-6033-2015-5-1405

[9] Димитриенко Ю.И. Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2015, № 11, с. 68–77. DOI 10.18698/0536-1044-2015-11-68-77

[10] Yang Q., Xu F. Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, vol. 4, issue 3, pp. 284–288.

[11] Aboudi J. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. *International Journal Multiscale Computational Engineering*, 2008, vol. 6, no. 5, pp. 411–434.

[12] Zhang B., Yu X., Gu B. Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension. *Polymer Composites*, 2015. DOI 10.1002/pc.23596

[13] Ge Q., Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Qi H.J. A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape

polymeric composites based on dual thermal transitions. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.

[14] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[15] Димитриенко Ю.И., Даштиев И.З. Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2001, № 1, с. 21–41.

[16] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды.* Москва, Физматлит, 2009, 610 с.

[17] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.

[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.

[19] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.

Статья поступила в редакцию 31.01.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю., Каримов С.Б. Моделирование слоистых несжимаемых композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 32–54.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 350 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Кольжанова Дарья Юрьевна — ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: darya.kolzhanova@yandex.ru

Каримов Суннат Бахтиярович — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: sunnat49@yandex.ru

Incompressible layered composites with finite deformations on the basis of the asymptotic averaging method

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, D.Yu. Kolzhanova, S.B. Karimov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the modeling results of incompressible layered composites with finite strains deformation according to the individual layers characteristics.
The article proposes an asymptotic averaging method version for layered nonlinearly elastic incompressible composites with finite deformations and periodic structure. We are using a universal representation of the defining relations for incompressible composite layers, proposed by Yu.I. Dimitrienko, which allows us to simulate simultaneously for a complex of various nonlinear elastic media models characterizedby the choice of a pair of energy tensors. We proved that if all composite layers are incompressible, the composite as a whole is also an incompressible, but anisotropic, medium. The article considers the problem of laminated plate uniaxial stretching from incompressible layers with finite deformations. Using the developed method, we calculated the effective deformation diagrams connecting the averaged Piola — Kirchhoff stress tensors components and the strain gradient, as well as the stress distribution in the composite layers.
The developed method for calculating effective deformation diagrams and stresses in composite layers can be used in the design of elastomeric composites with specified properties.

Keywords: *layered composites, finite deformations, incompressible media, asymptotic averaging method, Piola — Kirchhoff stress tensor, strain gradient, universal models of determining relations, deformation diagrams*

REFERENCES

[1] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley & Sons, 1979, 324 p.
[2] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 356 p.
[3] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 336 p.
[4] Dimitrienko Yu.I. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, issue 7, pp. 1041–1053.
[5] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 28–48.
[6] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.
[7] Dimitrienko Yu. I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2007, no.1, pp. 102–116.
[8] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Kolzhanova D.Yu. *Inzhenerny zhurnal*: *nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, no. 5. Available at: http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1405.html (accessed May 24, 2017). DOI 10.18698/2308-6033-2015-5-1405

[9] Dimitrienko Yu.I. *Izvestiya vyshikh uchebnykh zavedeny. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2015, no. 11, pp. 68–77. DOI 10.18698/0536-1044-2015-11-68-77
[10] Yang Q., Xu F. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, vol. 4, no. 3, pp. 284–288.
[11] Aboudi J. *International Journal Multiscale Computational Engineering*, 2008, vol. 6, no. 5, pp. 411–434.
[12] Zhang B., Yu X., Gu B. *Polymer Composites*, 2015. DOI 10.1002/pc.23596
[13] Ge Q., Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Qi H.J. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.
[14] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of mechanics of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[15] Dimitrienko Yu.I., Dashtiev I.Z. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Series. Natural Sciences*, 2001, no. 1, pp. 21–41.
[16] Dimitrienko Yu.I. *Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Nonlinear mechanics of continuous medium]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 610 p.
[17] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonyuk N.N., Sborschikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigorev M.M., Prozorovsky A.A. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.
[18] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
[19] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.

Dimitrienko Yu.I., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Development of Software Complexes, Bauman Moscow State Technical University, Head of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 350 research papers in the field of continuum mechanics, computational mechanics, mechanics and thermomechanics of composites, mathematical modeling in the science of materials, computational gas dynamics.
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Gubareva E.A., Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Deputy Director of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 50 research papers in the field of continuum mechanics, the mechanics of contact interaction, mathematical modeling, and the mechanics of composites. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Kolzhanova D.Yu., assistant of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: darya.kolzhanova@yandex.ru

Karimov S.B., student of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: sunnat49@yandex.ru