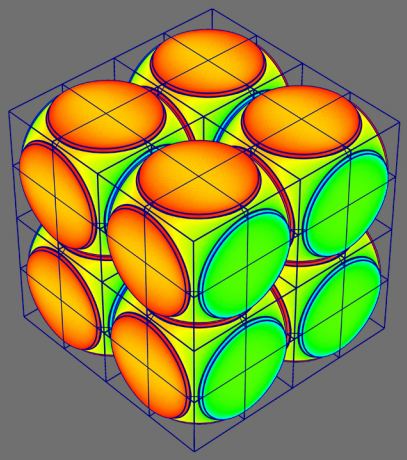
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Meschikhin I., Gavryushin S. Quality criteria and algorithm for selecting reduced finite element models for technical design monitoring. Mathematical Modeling and Cотputational Methods, 2016, №4 (12), pp. 103-121

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/120/

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
11.10.2026 18:16:57

УДК 626.422.23 DOI 10.18698/2309-3684-2016-4-103121

Критерии качества и алгоритм выбора редуцированных моделей для мониторинга технических конструкций

© И.А. Мещихин, С.С. Гаврюшин

ИНЭУМ им. И.С. Брука, Москва, 119334, Россия
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены вопросы разработки моделей сложных технических конструкций для мониторинга, что необходимо при организации эффективного мониторинга их эксплуатационного состояния и восстановления значений параметров состояния по результатам измерения с использованием модели объекта мониторинга. Предложено использовать модель, построенную расчетным путем и редуцированную до малого размера. В качестве параметров состояния могут выступать значения нагрузок и их комбинации, на которые накладываются либо непосредственные ограничения, либо определяемые по их значениям предельные состояния. Приведены критерии качества редуцированной модели и эффективный алгоритм их поиска.

Ключевые слова: *параметры идентификации, метод конечных элементов, линейные системы, мониторинг прочности, редуцированная модель.*

Мониторинг прочности современных систем сопряжен с необходимостью обрабатывать большой объем данных с высокой скоростью [1]. Для успешного выполнения данной задачи необходимо обеспечить систему мониторинга исходным сигналом надлежащего качества.

Для этих целей предлагается использовать для выделения полезного сигнала, его фильтрации и разделения по каналам элементы самой конструкции. Разработка системы мониторинга с надлежащими параметрами заключается в определении взаимного размещения точек измерения — параметров идентификации, в качестве которых могут выступать перемещения [2], деформации [3], виброускорения [4] и другие параметры, измеренные либо в дискретном множестве точек, либо вдоль некоторой траектории в зависимости от особенностей объекта мониторинга и его нагружений.

Излагаемый подход основан на допущении возможности описать поведение объекта мониторинга линейной моделью [5], с одной стороны, и возможности представления модели нагружения [6] как линейной комбинации независимо действующих нагрузок — с другой.

Так, класс гидрозапорных сооружений (шлюзовые затворы, ворота) возможно описать линейными моделями ввиду жестких требований по допускаемым напряжениям (сопоставимым с пределом пропорциональности) и по жесткости элементов конструкции [7]. Принятые допущения позволяют понизить размерность конечно-элементной модели кон-

струкции до размерности [8] модели нагружения (числа независимо действующих нагружений). Размерность редуцированной модели ниже размерности полномасштабной модели. Часть информации о состоянии объекта мониторинга утрачивается при редукции.

Под качеством редуцированной модели (далее для краткости — критерий) понимается характеристика ее возможности восстановления состояния объекта мониторинга. Редуцированная модель устанавливает соотношения между параметрами состояния и параметрами идентификации. Выбор редуцированной модели предполагает выбор состава параметров идентификации.

Далее, располагая рациональным набором параметров идентификации, предлагается восстановить по их значениям параметры состояния. Предварительный анализ позволяет определить зону допускаемых значений параметров состояний (из соображений прочности, устойчивости и пр.). Если параметр состояния находится в зоне допускаемых значений, можно оценить годность конструкции к дальнейшей эксплуатации. Область допускаемых значений может зависеть от истории нагружений [9], ее также можно уточнять по данным периодических обследований (к примеру с учетом коррозионного износа).

При длительном опыте эксплуатации конкретного объекта мониторинга редуцированная модель может быть использована в качестве априорной для дальнейшего уточнения статистическими методами [10].

Критерии качества редуцированных моделей. В случае линейной модели связь параметров идентификации и параметров состояния выражается следующей зависимостью:

$$\overline{\delta} = \mathbf{A}\overline{f} + \mathbf{B}\overline{e}, \qquad (1)$$

где δ_i — параметр идентификации (результат наблюдения); **A** — матрица учитываемых параметров; f_i — учитываемое при разработке модели нагружение; **B** — матрица неучитываемых параметров (**A** и **B** искомые); e_i — неучитываемое нагружение.

Матрицы **A** и **B** создаются путем редукции полномасштабной модели, которая, как правило, разрабатывается методом конечных элементов. Например, если параметрами идентификации являются перемещения, а нагружения составляют сосредоточенные силы, то элементы *редуцированной* матрицы численно равны соответствующим коэффициентам матрицы жесткости. Каждому выбору параметров идентификации при заданном наборе (базисе) нагружений соответствует своя редуцированная модель. При составлении наборов нагружений f и e ключевым аспектом является учет (полнота) всех возможных нагружений. Каждой линейной комбинации базисных

нагружений — элементу пространства нагружений — соответствует свое значение критерия состояния (к примеру, максимальные эквивалентные напряжения). При большом числе нагружений актуально исключение таких нагружений *e* и их комбинаций, влияние которых на состояние конструкции пренебрежимо мало. Тогда влияние нагружений *e* на результат измерений сопоставим с влиянием аддитивного *шума*, учет которого в модели 1 осуществляется за счет диагональных элементов матрицы **B**.

Восстановлению подлежат не сами силы, а безразмерные масштабные коэффициенты для выбранного при разработке модели комплекса единичных нагружений. Размерность параметров идентификации нормируется размерностью соответствующих столбцов матриц **A** и **B**.

После регистрации вектора параметров идентификации необходимо восстановить параметры состояния. К параметрам, используемым для идентификации объекта, предъявляют следующие требования.

1. Значения параметров идентификации для заданного набора действующих нагрузок должны быть максимальными. Параметры идентификации измеряются с определенной точностью, зависящей от способа измерения. Под *набором нагружений* понимают некоторую совокупность различных сочетаний одновременно действующих на объект воздействий, определяемую по условиям функционирования объекта. При малых значениях результата измерения $\left(\delta_i < \Delta a\right)$ невозможно различить полезный сигнал и шум. Численно данный критерий можно представить как $\left\|\overline{\delta}\right\| \to \max$.

2. Параметры идентификации должны, по возможности, обеспечивать линейно независимый отклик конструкции для заданного набора нагружений. При малом значении $\delta_j \left(1 - \dfrac{\left\langle \delta_i, \delta_j \right\rangle}{\left\|\delta_i\right\|\left\|\delta_j\right\|}\right) < \Delta a$ нет возможности различить результаты измерений при нагружениях *i* и *j*. Численно данный критерий можно представить как $\langle \delta_i, \delta_j \rangle \to \min$, $i \neq j$.

3. Максимальная близость диапазона изменения параметров идентификации. Численно данный критерий можно представить как число обусловленности матрицы **A**: $\dfrac{S_{\min}(\mathbf{A})}{S_{\max}(\mathbf{A})} \to \max$, где *S* — сингулярные [11] числа матрицы **A**. При оценке несимметричных или прямоугольных матриц **A** и **B** удобнее использовать сингулярные числа при работе в поле вещественных чисел.

4. Минимальное влияние неучитываемых факторов относительно учитываемых. Численно данный критерий можно представить как $S_{\max}\left(\mathbf{BA}^{-1}\right) \to \max$.

Первым двум требованиям удовлетворяет выбор n замеряемых параметров идентификации, который доставляет максимум детерминанту матрицы редуцированной системы (далее матрицы откликов) на n-нагружений.

Критерий детерминанта привлекателен простотой в интерпретации. Матрица откликов **A** формируется по столбцам. Каждый столбец матрицы откликов представлен в виде вектора в пространстве параметров идентификации. Компонента матрицы откликов A_{ij} численно равна величине i-го обобщенного перемещения (параметра идентификации), вызванного действием j-го нагружения. Численное значение детерминанта интерпретируется как ориентированный объем параллелепипеда [12], ребра которого заданы векторами-столбцами матрицы откликов.

Геометрическая интерпретация для матрицы откликов размером 2×2 представлена на рис. 1. Матричный оператор **A** производит линейное отображение из пространства нагружений в пространство измерений. В частности, он отображает единичную окружность в эллипс, длины главных осей которого равны модулям собственных значений (сингулярных чисел) матрицы **A**, а их ориентация — ее собственным векторам.

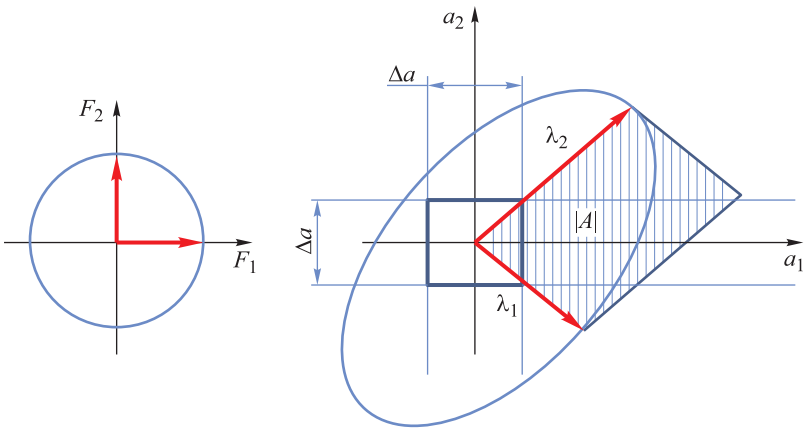


Рис. 1. Геометрическая интерпретация процедуры выбора множества информативных параметров для $n = 2$

Предполагается, что для измеряемых величин задан некоторый уровень шума, определяемый погрешностью используемых средств измерений $\pm\Delta a$. Примем, что сигнал пригоден для идентификации

нагрузки, если хотя бы одна компонента вектора измерений превосходит по модулю Δa. Качество выбора оператора **A** удобно оценивать по величине отношения модуля его минимального собственного значения к уровню шума. В дальнейшем для оценки погрешности идентификации параметров нагружения будем использовать условие

$$\left|\frac{\Delta a}{\lambda_{\min}}\right| \le [\beta], \tag{2}$$

где $[\beta]$ — допускаемый приемлемый уровень отношения шум/сигнал.

Первые два требования эквивалентны требованию к детерминанту матрицы редуцированной модели, а требование 3 эквивалентно требованиям к схожести ее собственных значений. Матрица **A**, оптимальная для требований 1—3, подобна единичной.

Подходы к повышению качества редуцированной модели. При невозможности выбрать набор параметров идентификации, удовлетворяющий предъявленным требованиям, возникает необходимость модифицировать набор параметров идентификации с целью улучшения значения целевой функции. Рассмотрим два подхода:

1) введем эффективную матрицу **D**, которая минимизирует в среднем [13] разницу между истинными δ и восстановленными параметрами идентификации;

2) добавим в перечень параметров идентификации такую линейную комбинацию из неучитываемых и ортогональных основным нагружений, к которым конструкция наиболее чувствительна.

Первый подход. Для поиска матрицы **D** воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$\sum\left(\bar{f}-\mathbf{D}\bar{\delta}\right)^2 \to \min \Leftrightarrow \frac{\partial\sum\left(\bar{f}-\mathbf{D}\bar{\delta}\right)^2}{\partial\mathbf{D}}=0,$$

$$2\sum\left(\bar{f}-\mathbf{D}\bar{\delta}\right)\bar{\delta}=\sum\bar{f}\,\bar{\delta}^{\mathrm{T}}-\mathbf{D}\sum\bar{\delta}\,\bar{\delta}^{\mathrm{T}}=0,$$

$$\mathbf{D}=\frac{\sum\bar{f}\,\bar{\delta}^{\mathrm{T}}}{\sum\bar{\delta}\,\bar{\delta}^{\mathrm{T}}},$$

$$\sum\bar{f}\,\bar{\delta}^{\mathrm{T}}=\sum\bar{f}\left(\mathbf{A}\bar{f}+\mathbf{B}\bar{e}\right)^{\mathrm{T}}=\sum\bar{f}\,\bar{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\sum\bar{f}\,\bar{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}},$$

$$\sum\bar{\delta}\,\bar{\delta}^{\mathrm{T}}=\sum\left(\mathbf{A}\bar{f}+\mathbf{B}\bar{e}\right)\left(\mathbf{A}\bar{f}+\mathbf{B}\bar{e}\right)^{\mathrm{T}}=\sum\mathbf{A}\bar{f}\,\bar{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\sum\mathbf{A}\bar{f}\,\bar{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}+\sum\mathbf{B}\bar{e}\,\bar{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+$$

$$+\sum\mathbf{B}\bar{e}\,\bar{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}.$$

Пусть f_i и e_i — реализация случайной величины с нулевым математическим ожиданием; тогда $\sum\bar{f}\,\bar{f}^{\mathrm{T}}$, $\sum\bar{e}\,\bar{e}^{\mathrm{T}}$, $\sum\bar{f}\,\bar{e}^{\mathrm{T}}$ — матрицы

дисперсий и ковариаций, которые могут быть получены в модели нагружения. В случае если e и f — некоррелированные случайные величины с единичной дисперсией $\left(f, e \subset N\left(0,1\right)\right)$:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}. \tag{3}$$

Второй подход. Включим в перечень параметров идентификации такую линейную комбинацию неучитываемых параметров $\sum \alpha_i e_i$, отклик от которой максимален и независим (ортогонален) от отклика основного нагружения, т. е.:

$$\begin{cases} \left\| \delta_e \right\| = \mathbf{B} \sum \alpha_i e_i \to \max; \\ \left\| \delta_f \delta_e \right\| \to \min, \end{cases} \qquad f, e \subset N\left(0,1\right).$$

Поскольку оператор **A** содержит $n - 1$ векторов в n-мерном пространстве, всегда существует возможность дополнить исходный набор ортогональным к нему вектором. Для этих целей удобно использовать сингулярное разложение:

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV};$$

$$\bar{V}_0 = \mathbf{V}_n.$$

Далее задача сводится к определению координат V_0 в операторе **B**:

$$\alpha = \bar{V}_0 \mathbf{B},$$

где компоненты нормированного вектора α являются искомыми коэффициентами при линейной комбинации не учитываемых нагружений; n-я строчка матрицы **A** выражается как $A_n = \left(\alpha / \left\|\alpha\right\|\right) / \mathbf{B}$.

Указанные два подхода удобно применять последовательно: на первом шаге вводить дополнительный параметр идентификации, затем минимизировать среднеквадратичную погрешность от влияния не учитываемых факторов. При неудовлетворительном результате вводят дополнительный параметр идентификации и повторяют процедуры 1 и 2. Отметим, что, как правило, чем больше нагружений наблюдается, тем, с одной стороны, меньше влияние не учитываемых факторов, а с другой — выше влияние погрешности измерения, обусловленной наличием среди параметров идентификации нагружений коррелированных и с малым откликом. Применение итерационной процедуры позволяет искать оптимум, двигаясь от высокой идентифицируемости (критерий 1) к малому влиянию не учитываемых нагружений (критерий 4).

Оценка эффективности повышения качества редуцированной модели. Для оценки эффективности сгенерированы случайные матрицы **A** и **B**. Дополним оператор **A** вектором из случайной ком-

бинации $\overline{\alpha_{\text{rand}}}\mathbf{B}$: $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} \oplus \overline{\alpha_{\text{rand}}}\mathbf{B}$ и сравним коэффициенты корреляции и отношения магнитуд исходного и восстановленного для следующих случаев:

1) исходная система, состоящая из вектора $\overline{f}$ измеряемых и $\overline{e}$ неизмеряемых сил;

2) к перечню измеряемых сил добавляется произвольный вектор из базиса **B**;

3) к перечню измеряемых сил добавляется вектор из базиса **B** по подходу 2;

4) формирование эффективной матрицы по пункту 1:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}_0^{\mathrm{T}}}{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_0^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}_0\mathbf{B}_0^{\mathrm{T}}};$$

5) формирование эффективной матрицы по пункту 2:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}}{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}},$$

где $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \oplus \overline{\alpha_{\text{rand}}}\mathbf{B}, \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}\theta\overline{\alpha_{\text{rand}}};$

6) формирование эффективной матрицы по пункту 3:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}}{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}},$$

где $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \oplus \overline{\alpha_{\text{opt}}}\mathbf{B}, \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}\theta\overline{\alpha_{\text{opt}}}.$

Всюду идентификации подлежат две силы по трем измерениям. Операция вычисления обратной матрицы там, где последняя прямоугольна, заменяется на вычисления псевдообратной.

Вычисления проведены для случайно сгенерированных матриц единичным произведением сингулярных чисел. Количество генераций — 1 млн. Результаты для пунктов 1–6 представлены в виде средних значений (табл. 1 и 2).

Таблица 1

Коэффициент корреляции

Случай	Дополнительный набор не учтен	Дополнительный набор учтен
1	0,50	0,50
2	0,41	0,54
3	0,55	0,66
4	0,65	0,65
5	0,64	0,74
6	0,65	0,77

Таблица 2

Отношение магнитуд

Случай	Дополнительный набор не учтен	Дополнительный набор учтен
1	2,30	2,30
2	18,60	32,00
3	2,09	1,60
4	0,79	0,79
5	0,84	0,80
6	0,89	0,81

Следует отметить, что при применении подхода 1 восстанавливаются лишь измеряемые силы, а при использовании подхода 2 к их перечню добавляется вектор сил из базиса **B**.

Оценка эффективности произведена по двум безразмерным критериям:

- сравнению коэффициента корреляции между истинным и восстановленным нагружением f;
- отношению магнитуд истинного и восстановленного нагружения f.

Учет дополнительного нагружения, равного линейной комбинации из набора не учитываемых, расширяет перечень параметров идентификации.

Эффективность двух подходов и их одновременного применения определяется ценностью информации о значениях параметров состояния из дополнительного набора. При отсутствии таковой, согласно данным табл. 1, эффективно применение подхода 1, в обратном случае наиболее эффективно последовательное применение подходов 2 и 1.

Поскольку измерения осуществляются с некоторой погрешностью, то рационально записать модель (1) в виде $\overline{u} = \mathbf{A}\overline{f} + \mathbf{B}\overline{e} + \overline{\Delta u_e}$.

При определенном масштабе и выбранном ортонормированном базисе $\sum \overline{e}^{\mathrm{T}}\overline{e} = \sum \overline{\delta}_e{}^{\mathrm{T}}\overline{\delta}_e = \mathbf{E}$; $\overline{e}, \overline{\delta}_e \in N(0,1)$, $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $N(0,1)$ — нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда в модели (1) $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{\Delta}$, где $\mathbf{\Delta}$ — диагональная матрица, ее элементы определяются погрешностью измерения, которая, в свою очередь, может отличаться для разных элементов конструкции в зависимости от, например, дальности точки измерения, состояния поверхности и пр.

При мониторинге сложных конструкций под множеством насчитываемых параметров может пониматься все многообразие действующих нагружений (узловых сил). Тогда в формуле (3) $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}$ можно

рассчитать единожды, для всех возможных параметров идентификации, число которых много меньше всех степеней свободы конструкции. Каждая конкретная матрица неучитываемых параметров

$$\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{M}, \tag{4}$$

где **M** — прямоугольная матрица $m \times n$, каждый i, j которой равен единице ($i \in 1, ..., n$, j-номер j-го параметра идентификации); n — число параметров идентификации. Элементы матрицы $\tilde{B}$ соответствуют элементам матрицы податливости [14].

Если определить эффективность выбора параметров идентификации $\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$, то новый критерий для произвольных конструкций можно вывести следующим образом:

$$\sum\left(\overline{f} - \mathbf{D}\overline{\delta}\right)^2 = \overline{\varepsilon};$$

$$\left(\overline{f} - \mathbf{D}\overline{\delta}\right)\left(\overline{f} - \mathbf{D}\overline{\delta}\right)^{\mathrm{T}} = \overline{f}\,\overline{f}^{\mathrm{T}} - \overline{f}\,\overline{\delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} - \mathbf{D}\overline{\delta}\,\overline{f}^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}\overline{\delta}\,\overline{\delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}};$$

$$\sum \overline{f}\,\overline{f}^{\mathrm{T}} = 1;$$

$$\sum \overline{f}\,\overline{\delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \sum \overline{f}\,\overline{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} + \sum \overline{f}\overset{\nearrow 0}{\overline{e}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = tr\left(\mathbf{A}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right) = tr\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{A}\right);$$

$$\sum \mathbf{D}\overline{\delta}\,\overline{f}^{\mathrm{T}} = tr\left(\mathbf{D}\mathbf{A}\right) = tr\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right) = tr\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{A}\right);$$

$$\sum \mathbf{D}\overline{\delta}\,\overline{\delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = tr\left(\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right) + tr\left(\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right) =$$

$$= tr\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\overbrace{\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)}^{=\mathbf{E}}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\right) =$$

$$= tr\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\right) = tr\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{A}\right); \tag{5}$$

$$\overline{\varepsilon} = 1 - tr\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{A}\right).$$

Подставим в уравнение (5) выражение (4)

$$\overline{\varepsilon} = 1 - tr\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{M}\right)^{-1}\mathbf{A}\right).$$

Отношение

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|A\|} \tag{6}$$

характеризует диапазон влияния не учитываемых в расчете параметров на оценку действующего нагружения.

Таким образом, отношение (6) задает новый критерий оптимизации, аналогичный критерию 4, позволяющий получить робастную оценку расчетного нагружения в случае воздействия не учитываемых в расчете нагрузок. При значительном значении величины $\bar{\varepsilon}$ возможно включение в перечень параметров идентификации линейной комбинации из не учитываемых нагружений (по подходу 2). Данная процедура соответствует включению в перечень учитываемых нагружений такой комбинации узловых сил, которые соответствуют максимальным значениям параметров идентификации.

Параметры идентификации, замеряемые непосредственно в процессе мониторинга, позволяют определить масштабные факторы действующего набора нагрузок для принятия обоснованного решения о пригодности конструкции к дальнейшей эксплуатации. Данная методика мониторинга обеспечивает возможность оперативного реагирования в случае нештатной (аварийной) ситуации, в качестве которой подразумевается превышение ограничений по прочности и жесткости.

Алгоритм выбора редуцированных моделей. Сложность критериев оптимизации [15] параметров идентификации и степенная зависимость размерности пространства поиска от количества учитываемых нагружений предъявляют высокие требования к процедуре поиска.

До инициации процедуры поиска актуально дать оценку сверху на параметры редуцированной модели.

Для этих целей представим отклик всех точек-кандидатов от всех действующих нагружений в виде прямоугольной матрицы $\mathbf{X}$ размером $m \times n$, где m — количество кандидатов на роль параметров идентификации; n — число независимо действующих нагружений. Рассчитаем значения сингулярных чисел:

$$\mathbf{X} = \mathbf{USV},$$

где $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ — левые и правые сингулярные формы матрицы $\mathbf{X}$.

Тогда произведения сингулярных чисел (элементы матрицы $\mathbf{S}$) представляют собой оценку сверху на детерминант редуцированной модели [12], а возведенное в степень n минимальное сингулярное число даст оценку на детерминант матрицы, удовлетворяющей требованию 3. Значения ниже уровня погрешности измерения свидетельствуют о наличии слепых зон — неидентифицируемого множества сочетаний действующих нагружений. Возможность оценки принципиальной идентифицируемости параметров состояния по значениям параметров идентификации позволяют до инициации процедуры поиска оптимальных параметров сопоставить различные варианты исполнения системы мониторинга, в том числе осуществить выбор вида регистрируемой величины и типа датчика [16].

Учитывая унитарность матриц [12] сингулярных форм, искомую оптимальную по первым двум критериям можно найти в виде $\mathbf{A} = \mathbf{USVV}^{\mathrm{T}} = \mathbf{US}$. Умножение на матрицу правых сингулярных форм

можно трактовать как измерение параметров идентификации в каждой точке-кандидате с последующим взвешенным суммированием. Значения весов равны значениям соответствующей сингулярной формы, магнитуду которой можно интерпретировать как вероятность наблюдения именно в этой точке.

При наблюдении в дискретном множестве точек необходимо выбрать из списка точек кандидатов такие n параметров идентификации, которые наилучшим образом аппроксимируют исходные сингулярные формы. Для этого предлагается поочередно изымать наименее подходящие (минимально влияющие на коэффициент корреляции исходной матрицы и модифицированной) параметры за $O(m^2)$ операций [17] до тех пор, пока либо выполняются требования по отношению сигнал/шум, либо число параметров идентификации равно числу параметров состояния.

Для поиска параметров идентификации, удовлетворяющих требованию 3 (равные значения сингулярных чисел редуцированной модели), можно найти такую матрицу $\mathbf{T}$, что сингулярные числа произведения $XT = USVT$ равны минимальному сингулярному числу матрицы $\mathbf{X}$. Тогда матрица $\mathbf{T} = S_{\min} I \left(SV\right)^{+}$.

Алгоритмы поиска оптимального расположения по критерию 4 с приемлемой для инженерных расчетов точностью сводится к задаче для критериев 1, 2 для матрицы $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{M}\right)^{-1}\mathbf{A}$.

Вариант практической реализации предлагаемого подхода. В качестве примера предлагаемой методики рассмотрен процесс мониторинга сегментного шлюзового затвора № 7 [18], который является элементом судопропускной системы канала имени Москвы.

Затвор является сварной конструкцией из 12- и 15-миллиметрового листового металла марки М16С. Толщина листов щита затвора и его ребер жесткости — 12 мм, толщина листов сектора затвора — 15 мм. Свойства стали марки М16С приведены ниже:

Модуль Юнга, Па	$2 \cdot 10^{11}$
Коэффициент Пуассона	0,3
Допускаемые напряжения, МПа	230

Затвор нагружен гидростатическим напором от перепада уровней воды P (7 м) в верхнем бьефе и камере шлюза (рис. 2), а также нештатным нагружением от кинематических подвижек основания (рис. 3): смещение подшипников z и перекос щита затвора u. Предварительно конструкция рассчитывается на прочность методом конечных элементов при действии нагружений из выбранного набора (базиса) нагружений. В данном случае расчет производился с использованием NX Nastran. При моделировании были использованы оболочечные

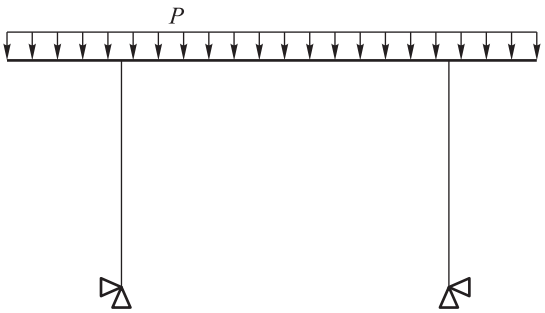


Рис. 2. Штатное нагружение

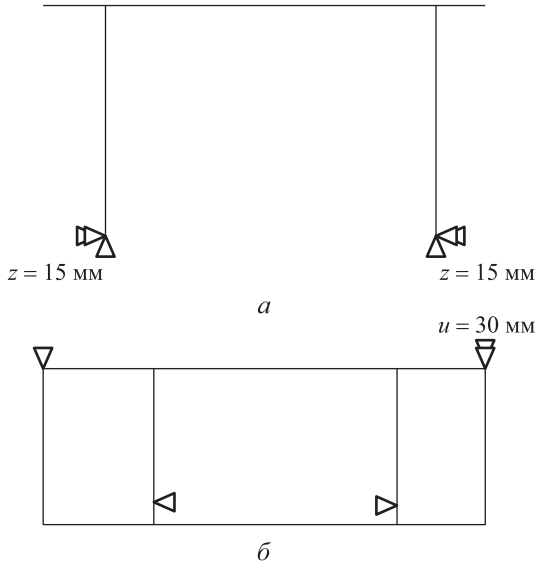


Рис. 3. Нештатное нагружение:
а — смещение подшипников; *б* — перекос щита затвора

элементы CQUAD4 (423 795 элементов, 114 920 узлов). Результаты расчета напряженно-деформированного состояния конструкции при нештатном нагружении представлены на рис. 4, 5.

Задача мониторинга для данного примера заключается в восстановлении текущей комбинации нагружений и последующем определении годности конструкции для дальнейшей эксплуатации. Для эффективного (с минимальным влиянием погрешности измерения и других факторов) восстановления состояния конструкции нужно выбрать рациональный состав параметров идентификации, в данном случае — точки, в которых будет измеряться прогиб, исходя из двух критериев (произведение и отношение сингулярных чисел). На рис. 6 представлено множество кандидатов на роль параметров идентификации в координатах откликов на базисные нагружения. Каждому выбору пары точек соответствует свой базис, качество которого ха-

рактеризуется критериями детерминанта ($Ф_1$) и отношения сингулярных чисел ($Ф_2$). Очевидно, что множество кандидатов можно ограничить выпуклой оболочкой.

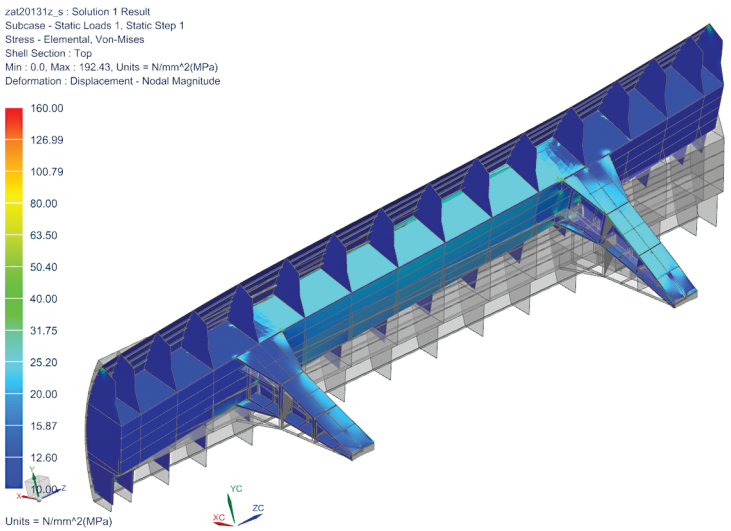


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений при перекосе щита, МПа. Деформированное и недеформированные состояния

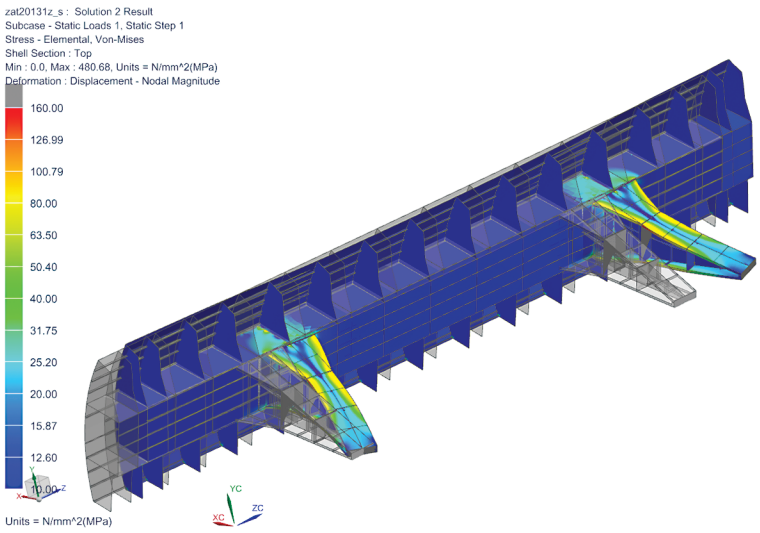


Рис. 5. Распределение эквивалентных напряжений при подвижке подшипников, МПа. Деформированное и недеформированные состояния

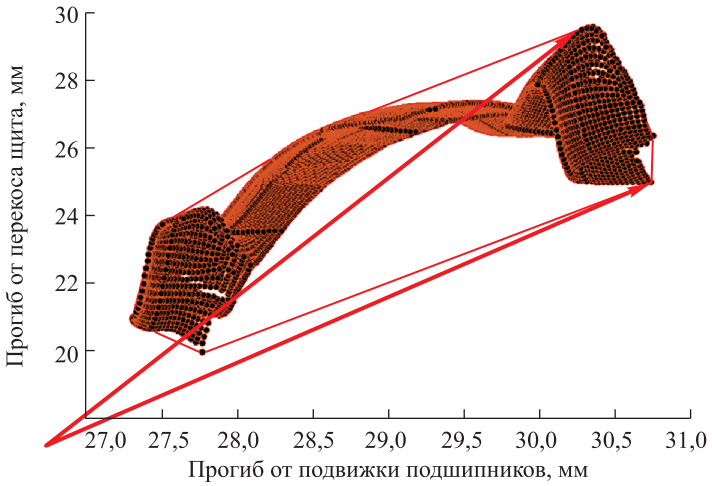


Рис. 6. Множество кандидатов на роль параметров идентификации

Множество точек, принадлежащих огибающей для окончательного выбора, представлено на рис. 7 в координатах критериев.

Определенные расчетно параметры идентификации представлены на рис. 8. Схема измерений представлена на рис. 9. Согласно предложенной схеме прогибы *3* регистрируют лазерные дальномеры, установленные в точках *2*. Результаты измерения умножаются на матрицу редуцированной модели. Полученные таким образом значения параметров состояния (перекоса щита затвора и подвижка подшипников) сравниваются с допускаемым значением, полученным из расчета на прочность, и принимается решение о годности конструкции к дальнейшей эксплуатации. По результатам периодического обследования модель конструкции может быть скорректирована с учетом коррозионного износа.

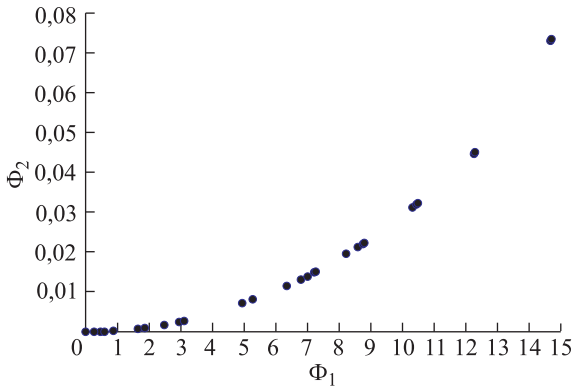


Рис. 7. Точки огибающей в координатах критериев качества

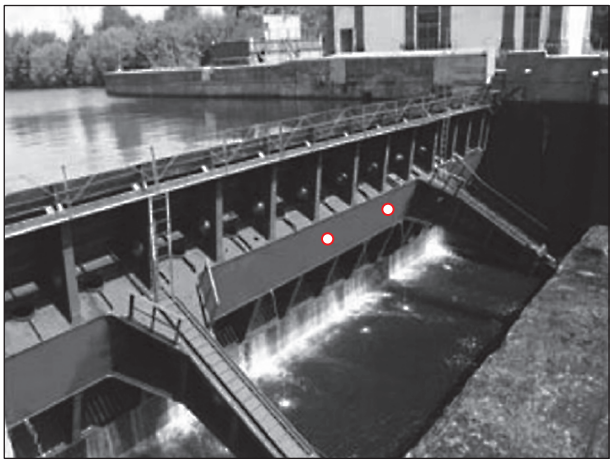


Рис. 8. Конструкция несущей части затвора

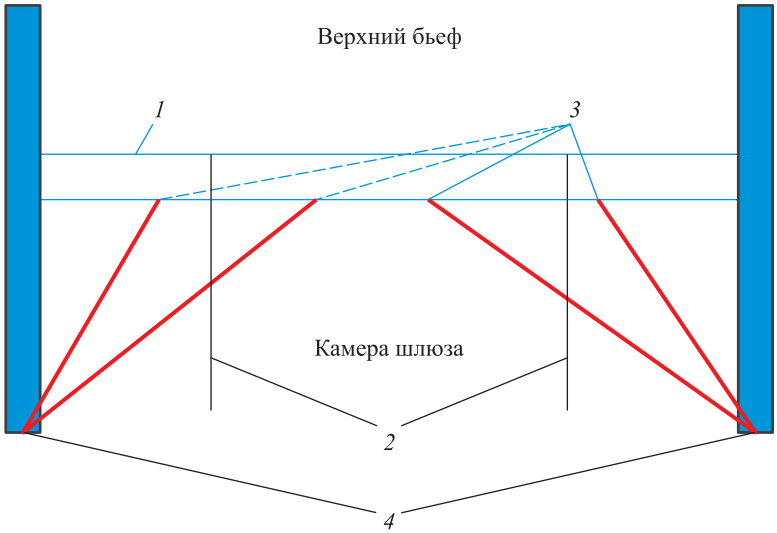


Рис. 9. Схема измерения параметров идентификации:
1 — щит затвора; *2* — опорные стойки; *3* — точки измерений параметров идентификации; *4* — стенки камеры шлюза

Применение предлагаемого подхода при мониторинге в том числе и элементов транспортной инфраструктуры [19] и гидросооружений (шлюзовых затворов, ворот) позволяет производить оценку в режиме реального времени эксплуатационного состояния, регистрировать историю нагружения по параметрам, удобным для измерения. Выбор параметров идентификации позволяет определять действующее нагружение с максимально возможной для выбранной схемы измерения точностью.

Заключение. В работе представлена методика, позволяющая определить множество параметров идентификации, оптимальных для

восстановления действующего нагружения и соответствующих им параметров состояния. Для этих целей сформулирован набор критериев качества редуцированной модели, удовлетворяющей требованиям по усилению сигнала, наименьшего влияния шума и не учитываемых фактов нагружения, устойчивости к смещению места измерения. Предложены подходы к улучшению качества редуцированной модели за счет увеличения количества параметров идентификации и оптимизации их структуры, алгоритм поиска рационального состава параметров идентификации и схема организации мониторинга эксплуатационного состояния шлюзового затвора № 7 канала имени Москвы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Трудоношин В.А., Федорук В.Г. Решение обратной задачи динамики с помощью универсальных систем моделирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2014, № 1, с. 94–101.

[2] Мещихин И.А., Гаврюшин С.С., Зайцев Е.А. Мониторинг технических конструкций на основе редуцированных конечно-элементных моделей. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2015, № 9, с. 10–18.

[3] Аведиков Г.Е., Жмакин С.И., Ибрагимов В.С., Иванов А.В., Кобрин А.И., Комаров П.А., Костенко А.А., Кузнецов А.С., Кузмичев А.В., Лавровский Э.К., Мартыненко Ю.Г., Митрофанов И.Е., Письменная Е.В., Формальский А.М. *Экзоскелет: конструкция, управление*. *Труды 12 Всерос. совещания по проблемам управления.* Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014, с. 84–90.

[4] Плюснин А.В. Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 1. Способы, не использующие регуляризацию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 68–88.

[5] Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. *Численный анализ элементов конструкций машин и приборов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 479 с.

[6] Канунникова Е.А., Мещихин И.А. Параметрическая модель нагружения конструкций и алгоритм ее применения при оценке максимальных напряжений. *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*, Москва, 2013, т. 137, № 6, с. 15–22.

[7] *Инструкция по наблюдениям и исследованиям на судоходных гидротехнических сооружениях*. М-во реч. флота РСФСР, Гл. упр. вод. путей и гидротехн. сооружений. Москва, Транспорт, 1978, с. 21.

[8] Геча В.Я., Канунникова Е.А., Мещихин И.А., Бордадымов В.Е., Даниловский Н.Н. Создание редуцированных матриц жесткостей и масс для совместного анализа нагрузок. *Вопросы электромеханики*, 2011, т. 121, № 2, с. 27–30.

[9] Садыхов Г.С., Крапоткин В.Г., Казакова О.И. Расчет и оценка показателей ресурса изделий с использованием модели аддитивного накопления повреждений. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 82–98.

[10] Венгринович В.Л. Мониторинг технического состояния. Анализ рисков в технических системах. *Неразрушающий контроль и диагностика*, 2014, № 2, с. 3.

[11] Большаков А.А., Каримов Р.Н. *Методы обработки многомерных данных и временных рядов*. Москва, Горячая линия–Телеком, 2007. 522 с.

[12] Беллман Р. *Введение в теорию матриц*. Москва, Рипол классик, 2014.

[13] Курант Р. *Методы математической физики. В 2 т. Т. 1*. Москва, Рипол классик, 2013, 544 с.

[14] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Москва, Мир, 1975, 541 с.

[15] Мищенко Д.Д. Распределенная система идентификации непараметрических моделей динамических систем. *Инновационные тенденции развития российской науки. Материалы VIII Международ. науч.-практ. конф. мол. уч.*, 2015, с. 170.

[16] Гармаш В.Б., Егоров Ф.А., Коломиец Л.Н., Неугодников А.П., Поспелов В.И. Возможности, задачи и перспективы волоконно-оптических измерительных систем в современном приборостроении. *Спецвыпуск Фотон-Экспресс*, 2005, № 6, с. 128–140.

[17] Павлова В.И. Оптимизация алгоритмов сортировки при решении задач с массивами. *Вестник Волжского университета им. В.Н. Татищева*, 2015, № 2, с. 86–92.

[18] Зайцев Е.А., Мещихин И.А. Мониторинг прочности металлоконструкций запорных гидравлических конструкций СГТС. *Речной транспорт (XXI век)*, 2011, № 4, с. 70–74.

[19] Watanabe E., Furuna H., Yamaguchi T., Kano M. On longevity and monitoring technologies of bridges: a survey study by the Japanese Society of Steel Construction. *Structure and Infrastructure Engineering*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 471–491.

Статья поступила в редакцию 23.01.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Мещихин И.А., Гаврюшин С.С. Критерии качества и алгоритм выбора редуцированных моделей для мониторинга технических конструкций. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4 (12), с. 103—121.

Мещихин Илья Александрович, младший научный сотрудник ИНЭУМ им. И.С. Брука. Область научных интересов: метод конечных элементов, метод суперэлементов, мониторинг состояния. e-mail: mefict@mail.ru

Гаврюшин Сергей Сергеевич, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Компьютерные системы автоматизации производства» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных трудов. Область научных интересов: многокритериальная оптимизация, жизненный цикл продукции, обработка металлов резанием, метод конечных элементов. e-mail: gss@bmstu.ru

Quality criteria and algorithm for selecting reduced finite element models for technical design monitoring

© I.A. Meschikhin[1], S.S. Gavryushin[2]

[1]Bruk Institute of Electronic Controlling Machines, Moscow, 119334, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article centers on developing the models of complex engineering structures for monitoring their operational status. In order to organize effective monitoring of the structures state, we often need to restore the state parameters values according to the measurement

results and use monitoring object models. The study suggests using a model built by calculation and reduced to small size. Among the state parameters there may be either load values and their combinations on which direct restrictions are imposed, or limit states defined by their values. The work proposes both criteria for assessing the quality of the reduced model, and an efficient algorithm for searching them.

Keywords: *identification parameters, finite element method, linear systems, strength monitoring, reduced model.*

REFERENCES

[1] Trudonoshin V.A., Fedoruk V.G. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2014, no. 1, pp. 94–101.

[2] Mischikhin I.A. Gavryushin C.C., Zaitsev E.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building Machinery*, Moscow, 2015, no. 9, pp. 10–18.

[3] Avedikov G.E., Zhmakin S.I., Ibragimov V.S., Ivanov A.V., Kobrin A.I., Komarov P.A., Kostenko A.A., Kuznetsov A.S., Kuzmichev A.V., Lavrovskiy E.K., Martynenko Iu.G., Mitrofanov I.E., Pismennaya E.V., Formalskiy A.M. *Ekzoskelet: konstruktsiya, upravlenie. Trudy 12 Vseros. soveschaniya po problemam upravleniya* [Exoskeleton: construction, control. Proceedings of the 12 All-Russian Meeting on control issues]. Moscow, Institute of control sciences of Russian academy of sciences, 2014, pp. 84–90.

[4] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 68–88.

[5] Gavryushin S.S., Baryshnikova O.O., Boriskin O.F. *Chislennyy analiz elementov konstruktsiy mashin i priborov* [Numerical analysis of structural elements of machines and devices]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 479 p.

[6] Kanunnikova E.A., Meschikhin I.A. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIIEM — Electromechanical matters. VNIIEM studies*, Moscow, 2013, vol. 137, no. 6, pp. 15–22.

[7] *Instruktsiya po nablyudeniyam i issledovaniyam na sudokhodnykh gidrotekhnicheskikh sooruzheniyakh* [Instructions for observation and research on navigable hydraulic engineering structures]. M-vo rech. flota RSFSR, Gl. upr. vod. putei i gidrotekhn. sooruzhenii [Ministry of River Fleet of the RSFSR, the General Directorate of waterways and hydraulic structures]. Moscow, Transport Publ., 1978, 21 p.

[8] Gecha V.Ya., Kanunnikova E.A., Meschikhin I.A. Bordadymov V.E., Danilovskiy N.N. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIIEM — Electromechanical matters. VNIIEM studies*, 2011, vol. 121, no. 2, pp. 27–30.

[9] Sadykhov G.S., Krapotkin V.G., Kazakova O.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 82–98.

[10] Vengrinovich V.L. *Nerazrushayushchiy kontrol i diagnostika — Nondestructive control and diagnostics*, 2014, no. 2, pp. 3–25.

[11] Bolshakov A.A., Karimov R.N. *Metody obrabotki mnogomernykh dannykh i vremennykh ryadov* [Methods for processing multidimensional data and time series]. Moscow, Goryachaia liniya–Telekom, 2007, 522 p.

[12] Gantmakher F.R. *Teoria matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988, pp. 31–33.

[13] Kurant R. *Metody matematicheskoi fiziki. V 2 tomakh. Tom 1*. [Methods of mathematical physics In 2 vol. Vol. 1.]. Moscow, Ripol Klassik Publ., 2013, 544 p.
[14] Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 541 p.
[15] Mischenko D.D. Raspredelennaya sistema identifikatsiy neparametricheskikh modeley dinamicheskikh sistem [A distributed system for identifying non-parametric models of dynamic systems]. *Innovatsionnye tendentsii razvitiya rossiyskoy nauki. Mat. VIII Mezhdunarod. nauch.-prakt. konf. mol. uch.* [Innovative trends in the development of Russian science. VIII International. scientific-practical. Conf. of young scientists], 2015, 170 p.
[16] Garmash V.B., Egorov F.A., Kolomiets L.N., Neugodnikov A.P., Pospelov V.I. Spetsvypusk *Foton-Ekspress — Photon Express. Spec. issue*, 2005, no. 6, pp. 128–140.
[17] Pavlova V.I. *Vestnik Volzhskogo universiteta im. V.N. Tatischeva — Vestnik of Volzhskiy University after V.N. Tatischev,* 2015, no. 2, pp. 86–92.
[18] Zaytsev E.A., Meschikhin I.A. *Rechnoy transport (XXI vek) — River transport (XXIst century)*, Moscow, 2011, no. 4, pp. 70–74.
[19] Watanabe E., Furuna H., Yamaguchi T., Kano M. *Structure and Infrastructure Engineering*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 471–491.

Meschekhin I.A., Junior researcher of Bruk Institute of Electronic Controlling Machines. Research interests include: finite element method, the method of superelements, monitoring. e-mail: mefict@mail.ru

Gavryushin S.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Department of Computer manufacturing automation systems, BMSTU. Author of over 200 scientific papers. Research interests include: multi-objective optimization, life cycle of the product, processing metals using cutting, finite element method. e-mail: gss@bmstu.ru