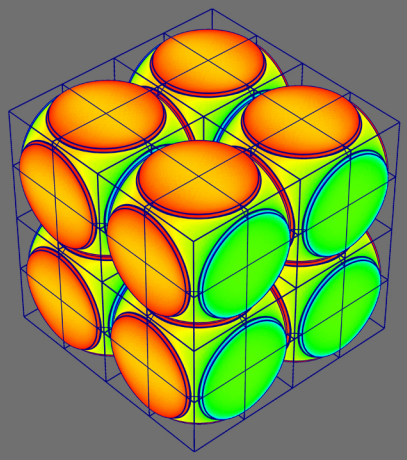
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В.
Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов.
Математическое моделирование и численные методы, 2014, №2 (2), с. 28-48

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/12/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.168
11.11.2026 04:05:20

УДК 539.3

Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена методика расчета эффективных вязкоупругих характеристик композиционных материалов при установившихся циклических колебаниях, основанная на методе асимптотического осреднения периодических структур и конечно-элементном решении локальных задач вязкоупругости на ячейке периодичности композитов. Приведены примеры численного моделирования вязкоупругих характеристик однонаправленно-армированных композитов и расчетов комплексных тензоров концентрации напряжений в ячейке периодичности. Проведен сравнительный анализ зависимостей тангенса угла потерь комплексных модулей упругости композита от частоты колебаний, полученных с помощью метода конечных элементов и по приближенным смесевым формулам. Показано, что использование приближенных смесевых формул для расчета вязкоупругих характеристик, которые часто применяют для оценки диссипативных характеристик композитов, может давать существенную погрешность в расчетах.

Ключевые слова: *композиты, вязкоупругость, установившиеся колебания, комплексные модули упругости, однонаправленные композиты, метод асимптотического осреднения, метод конечных элементов, тангенс угла потерь, численное моделирование.*

Введение. Исследование вязкоупругих характеристик полимерных композиционных материалов имеет важное значение для разработки демпфирующих конструкций авиационной, судостроительной и автомобильной промышленности [1, 2]. Для создания таких конструкций необходимы расчеты эффективных вязкоупругих характеристик композитов в зависимости от содержания их структурных компонентов, которые позволили бы находить оптимальные рецептурные составы композитов [3, 4]. Для расчета эффективных упругих характеристик композитов часто используют приближенные смесевые формулы [5, 6], которые для некоторых типов композитов, например однонаправленных, дают хорошие результаты армирования. Для более точного вычисления упругих характеристик композитов достаточно эффективным является метод асимптотического осреднения, который в сочетании с методом конечных элементов (МКЭ) позволяет вычислять характеристики композитов для любых структур армирования [7–10]. Методам расчета вязкоупругих характеристик композитов, основанным на методике асимптотического осреднения посвящены работы [11–15].

Целью настоящей статьи является применение метода асимптотического осреднения для расчета вязкоупругих характеристик композитов при гармоническом нагружении — так называемых комплексных модулей упругости [16, 17], и проведение сравнительных расчетов модулей упругости для однонаправленных композитов с помощью метода конечных элементов и приближенных смесевых формул.

Постановка задачи линейной вязкоупругости при циклических колебаниях. Рассмотрим задачу механики линейно вязкоупругой среды [17] при гармонических колебаниях при относительно невысоких частотах, когда инерционными силами можно пренебречь:

$$\begin{cases} \nabla \boldsymbol{\sigma}^* = 0; \\ \boldsymbol{\sigma}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* = \dfrac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{u}^* + \nabla \otimes \mathbf{u}^{*T}\right); \\ \boldsymbol{\sigma}^*\Big|_{\Sigma_1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}^*; \;\; \mathbf{u}^*\Big|_{\Sigma_2} = \mathbf{u}^{e^*}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ∇ — набла-оператор [18]; $\boldsymbol{\sigma}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — комплексные амплитуды тензоров напряжений и деформации; $\mathbf{u}^*$ — комплексная амплитуда вектора перемещений; $\mathbf{S}(t)$ — вектор заданных поверхностных комплексных амплитуд напряжений на части границы Σ_2; $\mathbf{u}^{e^*}(t)$ — вектор заданных комплексных амплитуд перемещений на части границы Σ_2; $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали; ${}^4\mathbf{C}$ — тензор 4-го ранга — тензор модулей упругости, зависящий от приведенной частоты колебаний $\tilde{\omega} = \omega a_\theta(\theta)$, где $a_\theta\big(\theta(\tau)\big)$ — функция температурного сдвига, a_1, a_2 — константы; θ — температура, $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, а θ_0 — начальное значение температуры;

$${}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) = {}^4\mathbf{C} - {}^4\mathbf{K}^*(\tilde{\omega}); \;\; {}^4\mathbf{K}*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} {}^4\mathbf{K}(\tau) e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau, \tag{2}$$

где ${}^4\mathbf{K}(\tau)$ — тензор ядер релаксации.

Для изотропных вязкоупругих материалов тензор модулей упругости имеет две независимые константы: K — модуль объемного сжатия и G — модуль сдвига, а тензор ядер релаксации имеет две независимые функции $K_K(t)$ и $K_G(t)$ — ядра объемной и сдвиговой релаксации, причем для большинства твердых сред объемной релаксацией можно пренебречь [19], тогда тензоры ${}^4\mathbf{C}$ и ${}^4\mathbf{K}(t)$ можно представить в следующем виде [17]:

$$^4\mathbf{C} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2G\Delta; \quad ^4\mathbf{K}(t) = K_G(t)(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2\Delta), \qquad (3)$$

где Δ — единичный тензор 4-го ранга; $\mathbf{E}$ — метрический тензор. После подстановки выражений (3) в (2) получаем

$$^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) = \left(K - \frac{2}{3} G^*(\tilde{\omega}) \right) \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2G^*(\tilde{\omega})\Delta, \qquad (4)$$

где

$$G^*(\tilde{\omega}) = G - K_G^*(\tilde{\omega}); \;\; K_G^*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} K_G(\tau) e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau \qquad (5)$$

— комплексный модуль сдвига.

Принимаем для функции релаксации $K_G(\tau)$ модель экспоненциальных ядер [17, 19]: $K_G(t) = \sum_{\gamma=1}^{n} A_\gamma e^{-t/\tau_\gamma}$, где A_γ, τ_γ — вязкоупругие константы материала (спектр релаксации и спектр времен релаксации). Тогда для G^*-комплексного модуля сдвига имеем следующее аналитическое выражение от приведенной частоты колебаний:

$$G^* = G' + iG''; \;\; G' = G + \sum_{\gamma=1}^{N_m} \frac{A_\gamma}{1 + (\tilde{\omega}\tau_\gamma)^2}; \;\; G'' = \sum_{\gamma=1}^{N_m} \frac{A_\gamma \omega \tau_\gamma}{1 + (\omega\tau_\gamma)^2}. \qquad (6)$$

В рамках рассмотренной модели вязкоупругие характеристики изотропных материалов характеризуются следующим набором констант: G, K, A_γ, τ_γ, a_1, a_2, где $\gamma = 1 \ldots N_m$. Комплексный модуль упругости матрицы E^* и комплексный коэффициент Пуассона ν^* вычисляют по формулам, формально совпадающим с формулами для упругих констант [19]:

$$E^* = \frac{9KG^*}{3K + G^*}, \quad \nu^* = \frac{3K - 2G^*}{6K + 2G^*}.$$

Применение метода асимптотического осреднения для вязкоупругих композитов. Рассмотрим вязкоупругий композит, состоящий из N компонент и обладающий периодической структурой. На границах раздела компонент будем полагать выполненными условия идеального контакта

$$[\boldsymbol{\sigma}^*] \cdot \mathbf{n} = 0; \;\; [\mathbf{u}^*] = 0, \qquad (7)$$

где [·] — скачок функций. Тогда для композита можно сформулировать задачу (1), но тензор комплексных модулей упругости ${}^4\mathbf{C}^*$ будет зависеть еще и от координат, в качестве которых выберем локальные координаты $\boldsymbol{\xi}$ ячейки периодичности (ЯП) композита [7–10, 20] $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/\kappa$, где $\mathbf{x}$ — глобальные координаты; $\kappa = l/L$ — малый параметр; l — характерный размер ЯП; L — глобальный размер конструкции из ПКМ тогда ${}^4\mathbf{C}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$. Функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ и ${}^4\mathbf{C}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$ будем считать периодичными по $\boldsymbol{\xi}$. Введем также обозначения для производных по $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$: $\nabla_x = \mathbf{e}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$; $\nabla_\xi = \mathbf{e}^i \dfrac{\partial}{\partial \xi^i}$, где $\mathbf{e}^i$ — векторы базиса. Имеет место следующее правило дифференцирования периодических функций: $\nabla = \nabla_x + \alpha^{-1}\nabla_\xi$.

Обозначим оператор осреднения по ЯП через $\langle f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rangle = \dfrac{1}{V_\xi} \int\limits_{V_\xi} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_2$. Тогда в соответствии с методом асимптотического осреднения представим перемещения $\mathbf{u}^*$, являющиеся решением задачи (1), в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра κ:

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}^{*(0)}(\mathbf{x}) + \kappa \mathbf{u}^{*(1)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + \kappa^2 \mathbf{u}^{*(2)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + \ldots \tag{8}$$

Для напряжений и деформации также имеет место асимптотическое разложение вида

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} + \kappa \boldsymbol{\varepsilon}^{*(1)} + \kappa^2 \ldots; \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} + \kappa \boldsymbol{\sigma}^{*(1)} + \kappa^2 \ldots, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* + \frac{1}{2}\left(\nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*(1)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*(1)T} \right); \\ \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \frac{1}{2}\left(\nabla_x \otimes \mathbf{u}^{*(0)} + \nabla_x \otimes \mathbf{u}^{*(0)T} \right), \end{gathered} \tag{10}$$

причем в нулевом приближении имеют место следующие определяющие соотношения вязкоупругости $\boldsymbol{\sigma}^{*(0)} = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)}$.

Подставляя разложения (9) в уравнения системы (1) и собирая в каждом уравнении члены при одинаковых степенях малого параметра α, получим из условия равенства нулю членов при наименьших степенях параметра α следующую задачу вязкоупругости на ячейке периодичности:

$$\begin{cases} \nabla_\xi \cdot \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} = 0; \\ \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)}; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* + \dfrac{1}{2}\left(\nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*(1)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*(1)T} \right); \\ [\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}] \cdot \mathbf{n} = 0, \left[\mathbf{u}^{*(1)} \right] = 0; \\ \left[[\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}] \right] \cdot \mathbf{n} = 0, \left[[\mathbf{u}^{*(1)}] \right] = 0; \\ < \mathbf{u}^{*(1)} > = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $\left[[\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}] \right] \cdot \mathbf{n} = 0; \left[[\mathbf{u}^{*(1)}] \right] = 0$ — условия периодичности функций на границах ячейки периодичности; $< \mathbf{u}^{*(1)} > = 0$ — условие нормировки. Формальное решение задачи (11) в силу ее линейности может быть записано в виде

$$\mathbf{u}^{*(1)} = {}^3\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*; \ \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} = \left(\Delta + \frac{1}{2}\left(\nabla_\xi \otimes {}^3\mathbf{N} + \nabla_\xi \otimes {}^3\mathbf{N}^T \right) \right) \cdot\cdot \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \tag{12}$$

где ${}^3\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$ — неизвестная тензор-функция 3-го ранга.

Подставляя эти выражения в определяющие соотношения системы (11) и осредняя их по ЯП, получаем искомые эффективные определяющие соотношения вязкоупругости

$$< \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} > = {}^4\overline{\mathbf{C}}^*(\omega) \cdot\cdot \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \tag{13}$$

где обозначен эффективный тензор комплексных модулей упругости

$$\overline{\mathbf{C}}^*(\omega) = < {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \left(\Delta + \frac{1}{2}\left(\nabla_\xi \otimes {}^3\mathbf{N} + \nabla_\xi \otimes {}^3\mathbf{N}^T \right) \right) > . \tag{14}$$

Обращая соотношения (13), получим

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = {}^4\overline{\boldsymbol{\Pi}}^*(\omega) \cdot\cdot < \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} >, \tag{15}$$

где ${}^4\overline{\boldsymbol{\Pi}}^*(\omega)$ — эффективный тензор комплексных податливостей. С его помощью можно ввести тензор концентрации напряжений в композите

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} &= {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \left(\Delta + \nabla_\xi \otimes {}^3\mathbf{N} \right) \cdot\cdot \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \\ &= \left({}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \left(\Delta + \nabla_\xi \otimes {}^3\mathbf{N} \right) \cdot\cdot {}^4\overline{\boldsymbol{\Pi}}^*(\omega) \right) \cdot\cdot < \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} >, \end{aligned} \tag{16}$$

или

$$\boldsymbol{\sigma}^{*(0)} = {}^4\mathbf{B}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot < \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} >, \tag{17}$$

где введен тензор концентрации амплитуд напряжений, который выражается формулой

$$^4\mathbf{B}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \left(\Delta + \nabla_\xi \otimes {}^3\mathbf{N}\right) \cdot\cdot {}^4\overline{\mathbf{\Pi}}^*(\omega). \qquad (18)$$

Подставляя выражение (12) в систему (11), получаем уравнение для вычисления тензор-функции $^3\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$:

$$\nabla_\xi \left({}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \left(\nabla_\xi \otimes {}^3\mathbf{N} + \Delta\right)\right) = 0, \qquad (19)$$

где $^3\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$ — неизвестная тензор-функция 3-го ранга с компонентами N_{kpq} в декартовой системе координат $O\xi_q$.

Введем функции $U_{pq}(\boldsymbol{\xi})$, называемые псевдоперемещениями:

$$U_{kpq} = N_{kpq} + \frac{1}{2}\left(\delta_{kp}\xi_q + \delta_{kq}\xi_p\right), \qquad (20)$$

тогда уравнение (19) на ЯП будет эквивалентно следующей серии из девяти уравнений линейной теории вязкоупругости (p, q = 1, 2, 3):

$$\nabla_\xi \left({}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi}) \cdot\cdot \left(\nabla_\xi \otimes \mathbf{U}_{pq}\right)\right) = 0. \qquad (21)$$

Так как ЯП обладает симметрией относительно плоскостей $\xi_i = 0$, ее можно разбить на восемь частей и решать задачу теории вязкоупругости только на 1/8 ЯП, как и аналогичные задачи теории упругости [9, 10]. Уравнения (21) с граничными условиями на координатных плоскостях $\Sigma_{\xi_i} = \{\xi_i = 0\}$ и торцевых плоскостях $\Sigma'_{\xi_i} = \{\xi_i = 1/2\}$ для 1/8 ЯП, решение которых в среднем реализует состояния чистого растяжения или сдвига, представляют собой локальные задачи вязкоупругости L_{pq}. Приведем с помощью рисунков граничные условия для задач L_{13}, L_{31}, L_{33} (рис. 1), для остальных задач граничные условия получают с помощью циклической перестановки индексов.

Для решения задач на $\frac{1}{8}$ ЯП применялся МКЭ, алгоритм которого подробно изложен в [21–24]. Для решения комплексно-значных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих в МКЭ, был использован метод сопряженных градиентов.

Результаты численного моделирования полей концентрации амплитуд напряжений. В соответствии с разработанной методикой было проведено численное решение трехмерных локальных задач вязкоупругости (21) для однонаправленных композитов. Для расчетов МКЭ использовалось специализированное программное обеспечение, разработанное в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

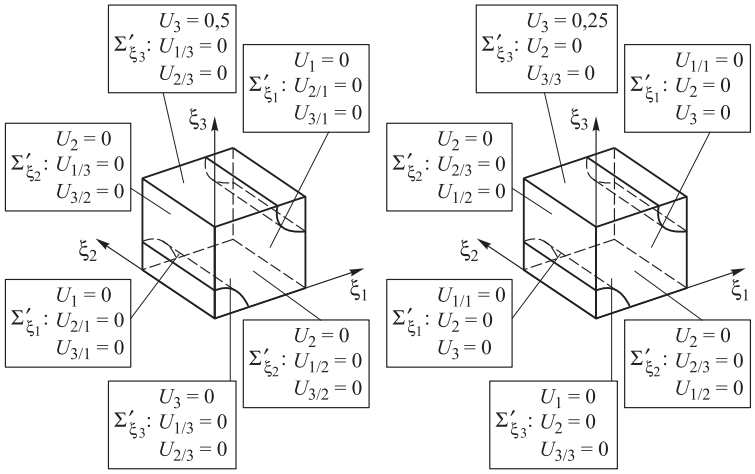


Рис. 1. Граничные условия для задач L_{33} и L_{13}

При численных расчетах использовались следующие значения характеристик полимерной матрицы эпоксифенольного типа: $G_m = 0{,}345\,\text{ГПа}$; $\nu_m = 0{,}45$; $n_m = 1$; $A_1 = 1$ ГПа; $\tau_1 = 0{,}01$ с; $a_1 = 20$ К; $a_2 = 300$ К, а также характеристики волокон, которые считались чисто упругими: $E_f = 200\,\text{ГПа}$; $\nu_f = 0{,}25$; $A_k = 0$. Коэффициент армирования 1D композита был принят равным 0,6.

На рис. 2 показана КЭ-сетка, использованная для решения локальных задач вязкоупругости (21). Сетка содержала 214 523 конечных элемента (КЭ). Использовался тетраэдальный четырехузловой КЭ.

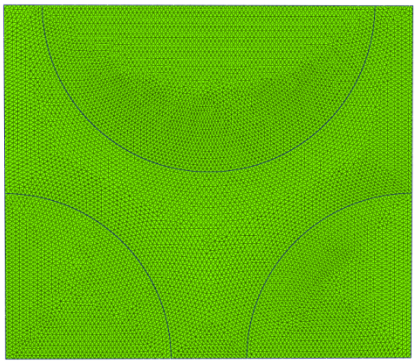


Рис. 2. КЭ-сетка, использованная для решения локальных задач вязкоупругости на 1/8 ЯП

На рис. 3–8 показаны распределения действительных и мнимых компонент $\text{Re}\,B_{ijkl}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$, $\text{Im}\,B_{ijkl}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$ тензора концентрации напряжений ${}^4\mathbf{B}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$ в ЯП однонаправленного ком-позита при различных частотах колебаний. Расчеты показывают, что действительные компоненты тензора концентрации напряжений мало изменяются с изменением частоты в отличие от мнимых компонент $\text{Im}\,B_{ijkl}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$, которые могут изменять свои значения достаточно существенно с увеличением частоты ω колебаний. Так, максимум компонент $\text{Im}\,B_{1212}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$, $\text{Im}\,B_{2211}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$ имеет наибольшие значения при максимальной рассматриваемой частоте колебаний, а компонента $\text{Im}\,B_{1313}(\tilde{\omega}, \boldsymbol{\xi})$ имеет максимум при частоте около 15 Гц.

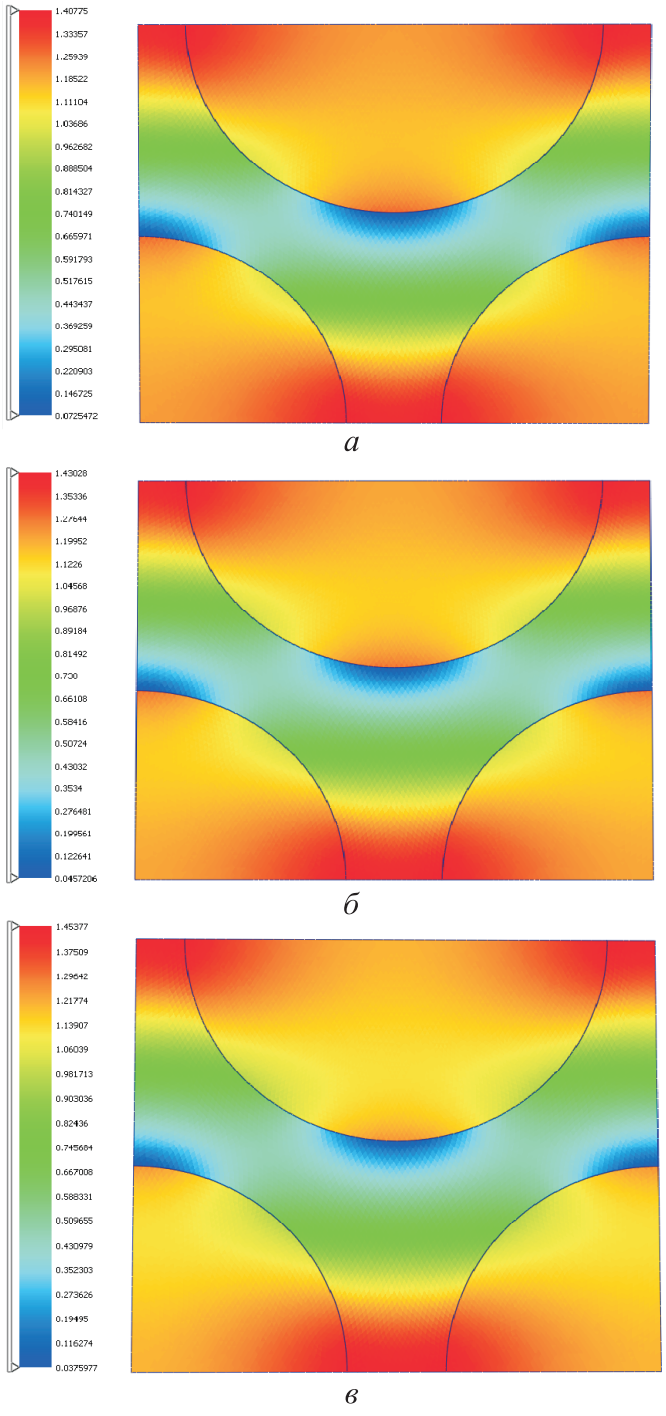


Рис. 3. Распределение компоненты $\mathrm{Re}\, B_{1111}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ тензора концентрации напряжений ${}^{4}\mathbf{B}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ в ЯП однонаправленного композита при частотах 15 (*а*), 100 (*б*), 200 (*в*) Гц

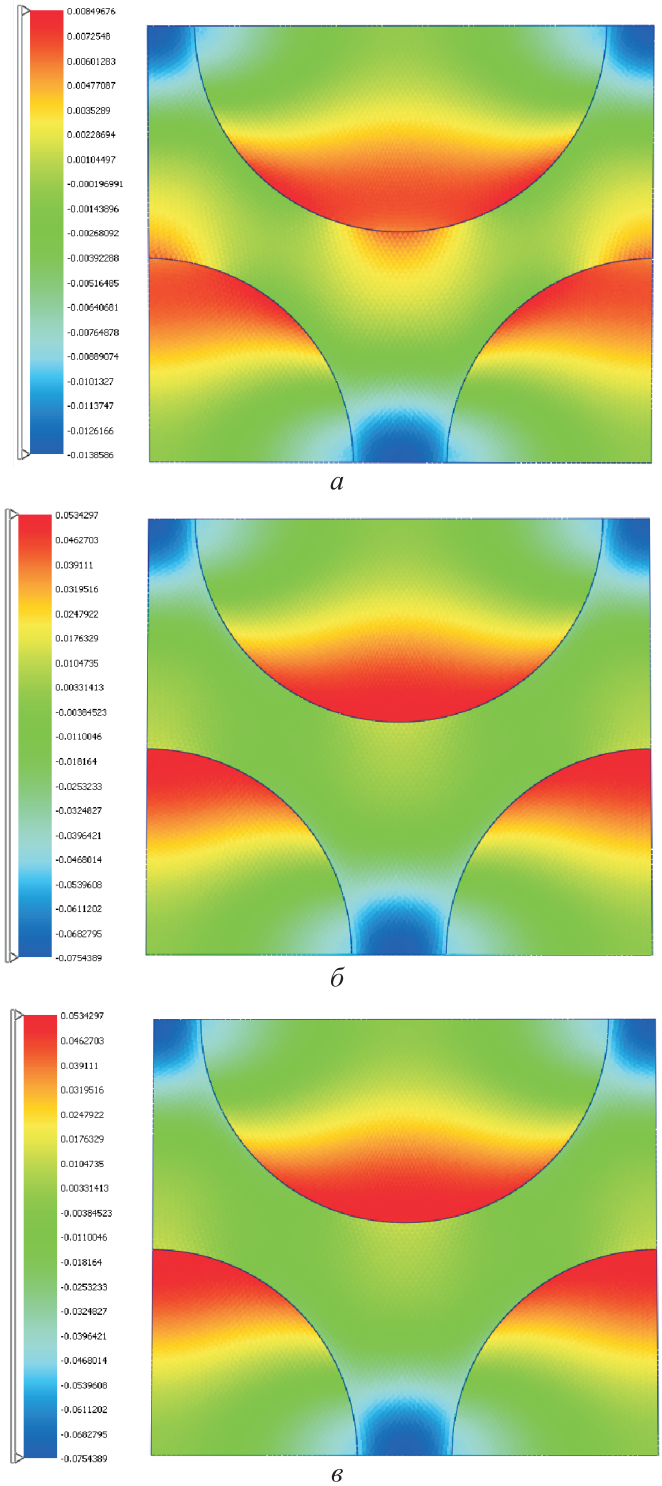
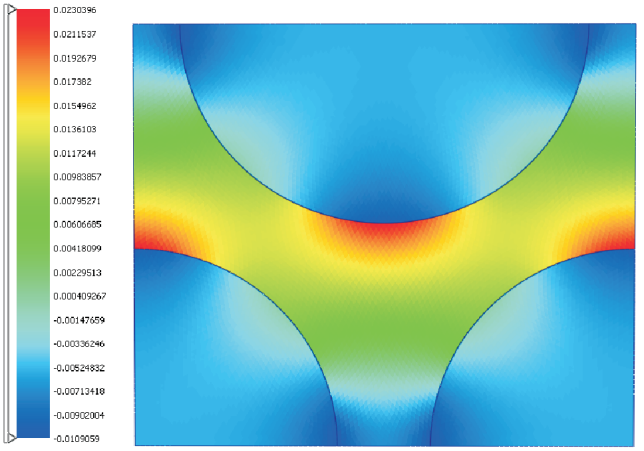
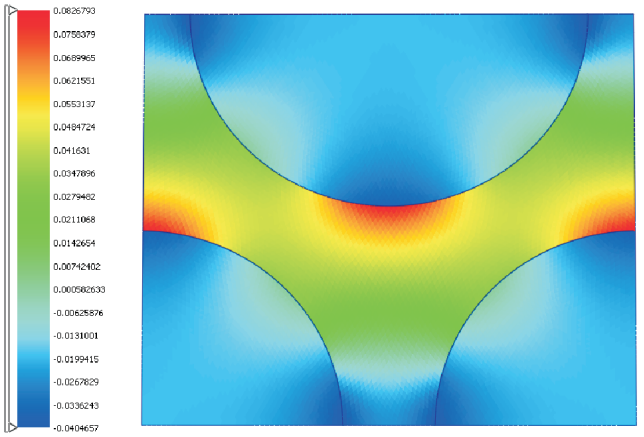


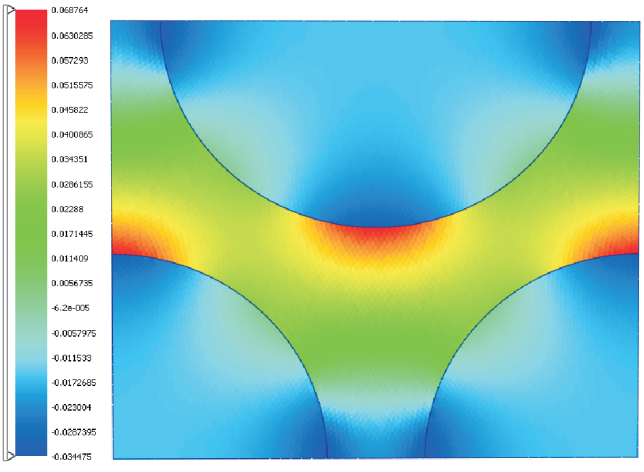
Рис. 4. Распределение компоненты $\mathrm{Im}\, B_{1111}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ тензора концентрации напряжений ${}^{4}\mathbf{B}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ в ЯП однонаправленного композита при частотах 15 (*а*), 100 (*б*), 200 (*в*) Гц



а



б



в

Рис. 5. Распределение компоненты $\mathrm{Re}\, B_{1313}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ тензора концентрации напряжений ${}^{4}\mathbf{B}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ в ЯП однонаправленного композита при частотах 15 (*а*), 100 (*б*), 200 (*в*) Гц

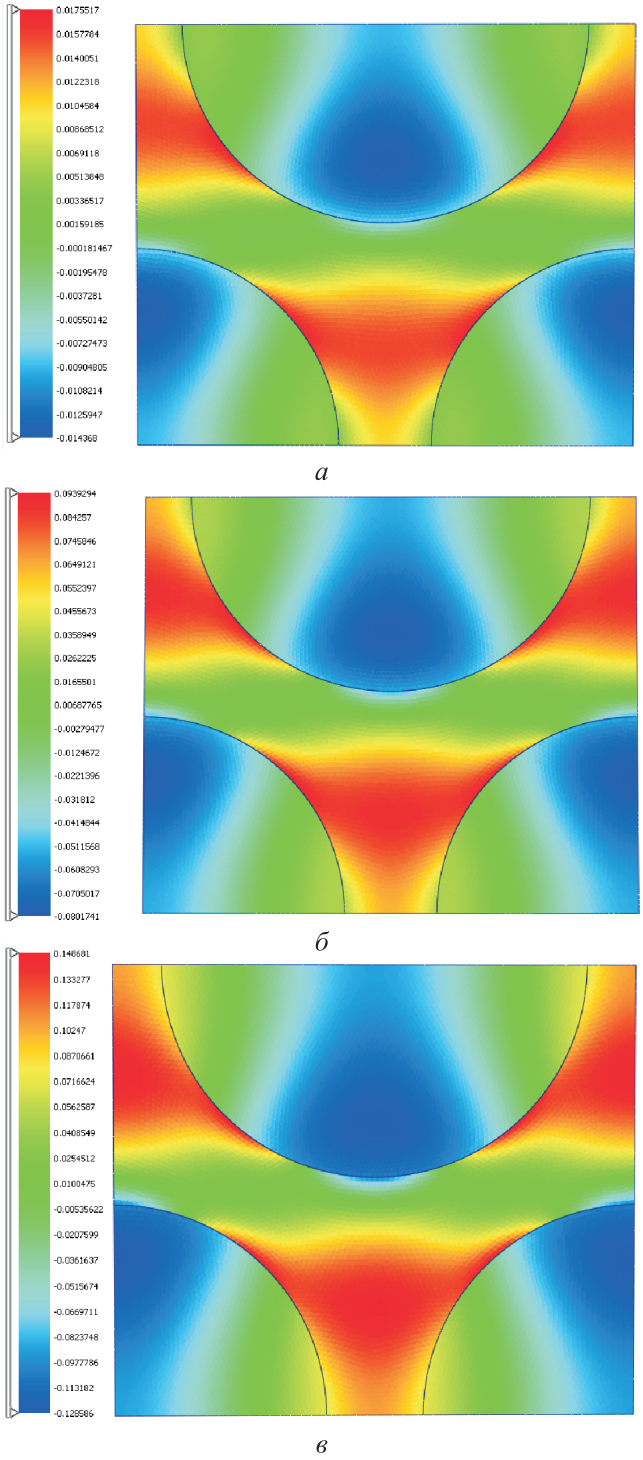
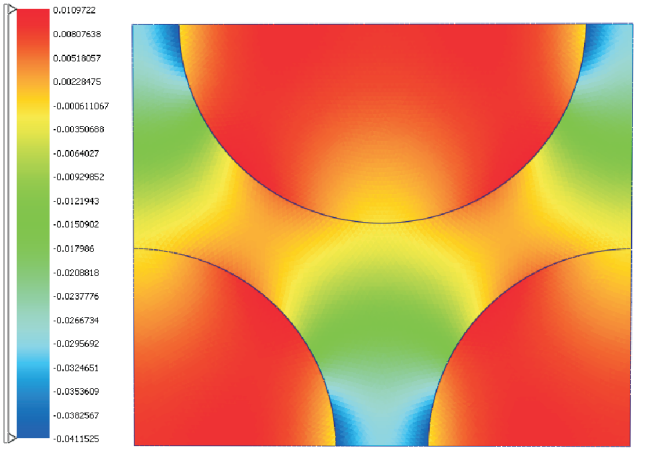
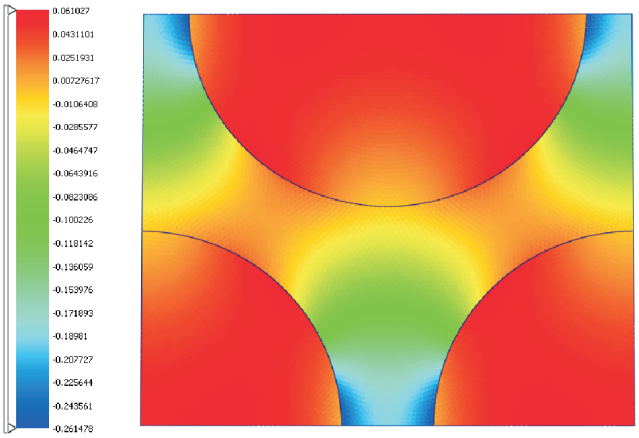


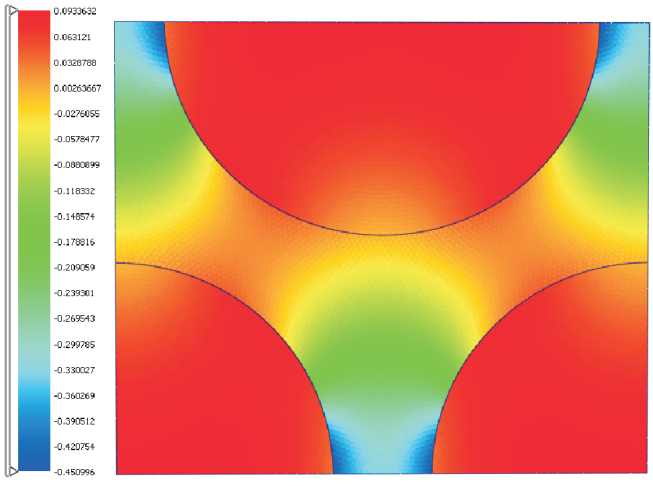
Рис. 6. Распределение компоненты $\mathrm{Im}\, B_{1212}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ тензора концентрации напряжений ${}^{4}\mathbf{B}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ в ЯП однонаправленного композита при частотах 15 (*а*), 100 (*б*), 200 (*в*) Гц



а

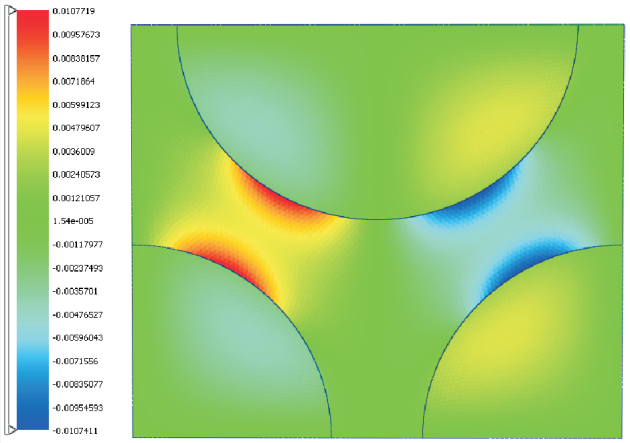


б

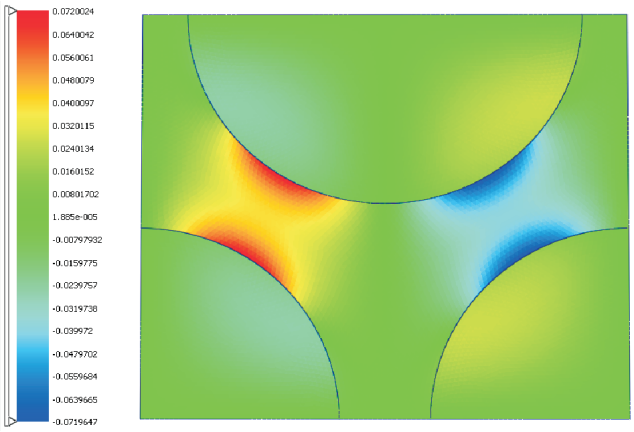


в

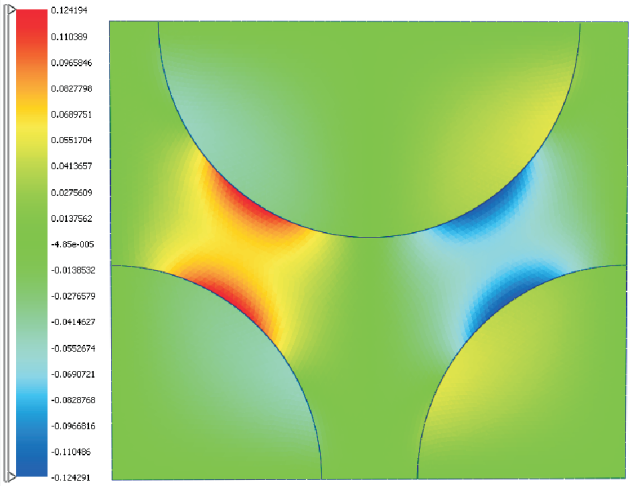
Рис. 7. Распределение компоненты $\mathrm{Im}\, B_{2211}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ тензора концентрации напряжений ${}^{4}\mathbf{B}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ в ЯП однонаправленного композита при частотах 15 (*а*), 100 (*б*), 200 (*в*) Гц



а



б



в

Рис. 8. Распределение компоненты $\mathrm{Im}\, B_{1222}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ тензора концентрации напряжений ${}^{4}\mathbf{B}(\tilde{\omega},\boldsymbol{\xi})$ в ЯП однонаправленного композита при частотах 5 (*а*), 100 (*б*), 200 (*в*) Гц

Сравнение результатов численного моделирования эффективных вязкоупругих характеристик композитов с результатами расчета по смесевой модели. Для приближенного вычисления компонент тензоров комплексных модулей упругости 1D композита C^*_{ijkl} воспользуемся моделью смесевого типа [6, 8]. Согласно этой модели, комплексные упругие константы композита можно вычислить по формулам, которые подобны аналогичным формулам в линейной теории упругости [24]:

$$
\begin{gathered}
E^*_L = E_f \varphi_f + E^*_m \left(1 - \varphi_f\right); \\
E^*_T = \left(\frac{\varphi_f}{E_f} + \frac{1-\varphi_f}{E^*_m} \right)^{-1}; \\
\nu^*_L = \nu_f \varphi_f + \nu^*_m (1 - \varphi_f); \\
\nu^*_T = \nu^*_m; \\
G^*_L = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_f (1+\nu_f)}{E_f} + \frac{(1-\varphi_f)(1+\nu^*_m)}{E^*_m} \right)^{-1},
\end{gathered}
\tag{22}
$$

где E^*_L — продольный комплексный модуль упругости 1D композита в направлении ориентации волокон; E^*_T — поперечный комплексный модуль упругости нити; ν^*_L — продольный комплексный коэффициент Пуассона; ν^*_T — поперечный комплексный коэффициент Пуассона; G^*_L — продольный комплексный модуль сдвига; E_f — модуль упругости волокон; ν_f —продольный и поперечный коэффициенты Пуассона моноволокон; E^*_m и ν^*_m — комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы; φ_f — относительное объемное содержание волокон в композите.

Поперечный комплексный модуль сдвига $G^*_T = \dfrac{E^*_T}{2(1+\nu^*_T)}$. Волокна полагают упругими, матрицу — вязкоупругой.

По полученным значениям упругих констант (формулы (23)) составим компоненты тензора комплексных упругих податливостей Π^{*0}_{ijkl} 1D композита:

$$(\Pi^{*0}_{ijkl}) = \begin{bmatrix} \Pi^{*0}_{1111} & \Pi^{*0}_{1122} & \Pi^{*0}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & \Pi^{*0}_{2222} & \Pi^{*0}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Pi^{*0}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\Pi^{*0}_{1313} & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & 2\Pi^{*0}_{2323} & 0 \\ & & & & & 2\Pi^{*0}_{1212} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E^*_L} & -\dfrac{\nu^*_L}{E^*_L} & -\dfrac{\nu^*_L}{E^*_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu^*_L}{E^*_L} & \dfrac{1}{E^*_T} & -\dfrac{\nu^*_T}{E^*_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu^*_L}{E^*_L} & -\dfrac{\nu^*_T}{E^*_T} & \dfrac{1}{E^*_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2G^*_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2G^*_T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2G^*_L} \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Тензор комплексных модулей упругости 1D композита является обратным тензору комплексных упругих податливостей: $C^{*0}_{ijkl} = \left(\Pi^{*0}_{ijkl}\right)^{-1}$. Далее рассчитывались действительные и мнимые части компонент тензора комплексных модулей упругости: $C^*_{ijkl}(\tilde{\omega}) = \mathrm{Re}\left(C_{ijkl}(\tilde{\omega})\right) + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}\left(C_{ijkl}(\tilde{\omega})\right)$, а также вычислялся тангенс угла потерь для каждой отдельной компоненты тензора комплексных модулей упругости

$$\mathrm{tg}\,\delta\left(C^*_{ijkl}(\omega)\right) = \frac{\mathrm{Im}\left(C^*_{ijkl}(\omega)\right)}{\mathrm{Re}\left(C^*_{ijkl}(\omega)\right)}.$$

Расчеты проводились в зависимости от частоты колебаний в диапазоне от 1 до 200 Гц.

На рис. 9–11 приведены сравнительные зависимости тангенса угла потерь комплексных модулей упругости $\mathrm{tg}\,\delta_{C_{3333}}$, $\mathrm{tg}\,\delta_{C_{1313}}$ и $\mathrm{tg}\,\delta_{C_{1111}}$ 1D композита от частоты колебаний, полученные с помощью расчетов МКЭ и по смесевым формулам. Имеет место хорошее совпадение результатов расчетов для тангенса угла потерь комплексных модулей продольного сдвига $\mathrm{tg}\,\delta_{C_{1313}}$, относительное отклонение не превышает 4 %. Для других величин — тангенса угла потерь комплексного

поперечного и продольного модулей упругости $\operatorname{tg}\delta_{C_{3333}}$ и $\operatorname{tg}\delta_{C_{1111}}$ — различие значений весьма существенное, примерно в 2 раза, хотя частота, при которой достигаются максимальные значения функций $\operatorname{tg}\delta_{C_{3333}}(\omega)$ и $\operatorname{tg}\delta_{C_{1111}}(\omega)$, рассчитанная с помощью обоих методов, является примерно одинаковой. Учитывая, что МКЭ и метод асимптотических разложений являются в математическом смысле точными методами, а численная погрешность МКЭ метода, реализованного в программном комплексе МГТУ им. Н.Э. Баумана, весьма невелика (не более 5 %), то результаты, полученные с помощью метода МКЭ являются более достоверными. Использование смесевых формул, как показано выше, может давать существенную погрешность в расчетах диссипативных характеристик композитов.

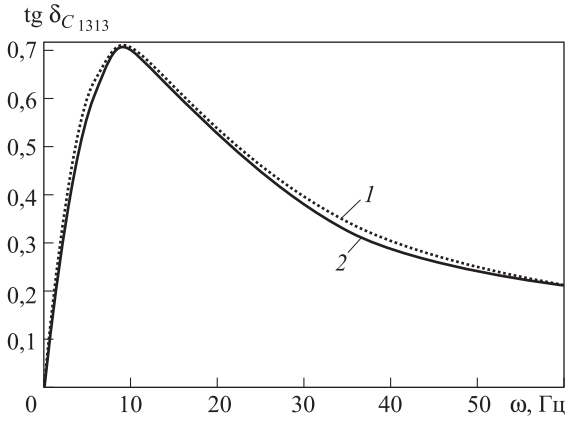


Рис. 9. Сравнительные зависимости тангенса угла потерь комплексного модуля сдвига $\operatorname{tg}\delta_{C_{1313}}$ 1D композита от частоты колебаний:

1 — расчет МКЭ; *2* — расчет по смесевым формулам

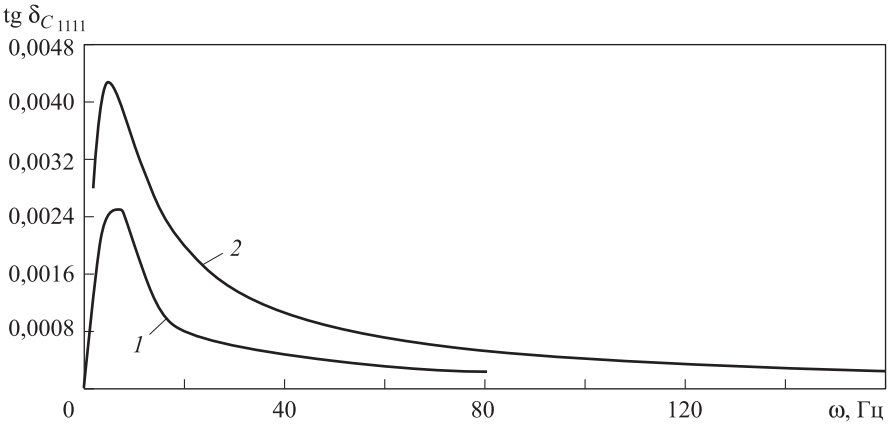


Рис. 10. Сравнительные зависимости тангенса угла потерь комплексного продольного модуля упругости $\operatorname{tg}\delta_{C_{1111}}$ 1D композита от частоты колебаний:

1 — расчет МКЭ; *2* — расчет по смесевым формулам

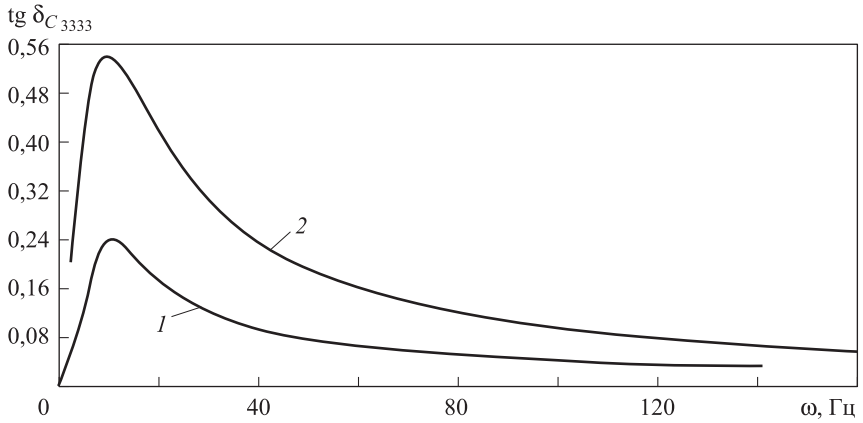


Рис. 11. Сравнительные зависимости тангенса угла потерь комплексного поперечного модуля упругости $\mathrm{tg}\,\delta_{C3333}$ 1D композита от частоты колебаний:

1 — расчет МКЭ; *2* — расчет по смесевым формулам

Выводы. Разработана методика расчета эффективных вязкоупругих характеристик композиционных материалов при установившихся циклических колебаниях, основанная на применении теории асимптотического осреднения периодических структур и МКЭ для решения локальных задач вязкоупругости на ячейке периодичности, возникающей в этом методе. Приведены примеры численного моделирования вязкоупругих характеристик однонаправленно-армированных композитов и решения локальных задач вязкоупругости методом КЭ. Проведен сравнительный анализ зависимостей тангенса угла потерь комплексных модулей упругости композита от частоты колебаний, полученных с помощью расчетов МКЭ и по приближенным смесевым формулам. Установлено хорошее совпадение результатов расчетов для тангенса угла потерь комплексных модулей продольного сдвига композита, а для других величин — тангенса угла потерь комплексного поперечного и продольного модулей упругости; различие значений весьма существенное, примерно в 2 раза, следовательно, использование смесевых формул может давать существенную погрешность в расчетах диссипативных характеристик композитов.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-19-00847).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, № 1, т. 6, с. 32–48.

[2] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*, 2014, № 10. doi: 10.7463/1014.0730105

[3] Sheldon Imaoka Analyzing Viscoelastic materials. *ANSYS Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46–47.

[4] Matzenmiller A., Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, iss. 3, pp. 283–300.

[5] Hashin Z. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *J. Appl. Mech. Trans. ASME. 32E*, 1965, pp. 630–636.

[6] Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity*. Academic Press, New York, 1982, 356 p.

[7] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 356 с.

[8] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[9] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 5, с. 3–20.

[10] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P., Shpakova Yu.I. Computational Modeling of Failure of Textile Composites. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 389–402.

[11] Димитриенко Ю.И., Лимонов В.А. Влияние ориентации волокон на диссипативный разогрев и деформативность вязкоупругих композитов при циклическом нагружении. *Механика композитных материалов*, 1988. № 5, с. 797–805.

[12] Michel J. C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 1999, vol. 172, pp. 109–143.

[13] Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory. *JSME Int. J. Ser. A*, 1997, vol. 40, pp. 313–319.

[14] Haasemann G, Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1–3, pp. 122–135.

[15] Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates — A Multi Scale Approach. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering (IJMECH)*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11–18.

[16] Победря Б.Е. Димитриенко Ю.И. Связанные задачи линейной термомеханики деформируемых твердых тел. *Успехи механики*, 1987, вып. 10. № 2, с. 97–137.

[17] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

[19] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Москва, Наука, 1970, 356 с.

[20] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.

[21] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 2, с. 57–67.

[22] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов. *Информационные технологии*, 2008, № 8, с. 31–38.

[23] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков. *Композиты и наноструктуры*, 2013, № 3, с. 35–51.

[24] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П. Численное моделирование микроразрушения и прочностных характеристик пространственно-армированных композитов. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2013, т. 19, № 3, с. 365–383.

Статья поступила в редакцию 02.09.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–48.

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 270 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики.
e-mail: dimit.bmstu@gmail.ru

Губарева Елена Александровна родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 15 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов.
e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Сборщиков Сергей Васильевич родился в 1989 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 12 научных работ в области вычислительной механики композитов. e-mail: servasbor@gmail.ru

Finite element modulation of effective viscoelastic properties of unilateral composite materials

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, S.V. Sborschikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

We propose a method for calculating effective viscoelastic properties of composite materials under steady-state cyclical vibrations. The method is based on asymptotic averaging of periodic structures and finite-element solution of local problems of viscoelasticity in periodicity cells of composite materials. We provide examples of numerical simulation of viscoelastic properties for composites with unidirectional reinforcement, and of calculations of complex tensors of stress concentration in a periodicity cell. The paper presents a comparative analysis of dependencies of loss tangent of complex composite elasticity modulus on vibration frequencies obtained through FEA calculations and rough mixed formulae. We show that rough mixed formulae, often used for calculating dissipative properties of composite materials, can yield appreciable calculation errors.

Keywords: *composites, viscoelasticity, stable-state vibrations, complex elasticity modulus, unilateral composites, asymptotic averaging method, finite element method, loss tangent, numerical simulation.*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O, Erasov V.S., Fedonyuk N.N., Sborschikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigor`ev M.M., Prozorovskiy A.A. *Komposity i nanostruktury — Composites and Nanostructures,* 2014, no. 1, vol. 6, pp. 32–48.

[2] Dimitrienko Yu.I, Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V, Prozorovsky A.A. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 10. doi: 10.7464/1014.0730105

[3] Sheldon Imaoka. Analyzing Viscoelastic materials. *ANSYS Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46–47.

[4] Matzenmiller A., Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, issue 3, pp. 283–300.

[5] Hashin Z. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *J. Appl.Mech. Trans. ASME.* 32E, 1965, pp. 630–636.

[6] Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity*. 2nd ed. Academic Press, New York, 1982, 356 p.

[7] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Avaraging of Processes in Periodic Media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 356 p.

[8] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Moscow State University Publ., 1984, 324 p.

[9] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Modeling*, 2012, no. 5, vol. 24, pp. 3–20.

[10] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Sokolov A.P., Shpakova Yu.I. Computational Modeling of Failure of Textile Composites. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 389–402.

[11] Dimitrienko Yu.I., Limonov V.A. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov — Mechanics of Composite Materials*, 1988, no. 5, pp. 797–805.

[12] Michel J.C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*., 1999, vol. 172, pp. 109–143.

[13] Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory. *JSME Int. J. Ser. A*., vol. 40, 1997, pp. 313–319.

[14] Haasemann G., Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1–3, pp. 122–135.

[15] Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering (IJMECH)*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11–18.

[16] Pobedrya B.E., Dimitrienko Yu.I. *Uspekhi Mehkaniki — Advance in Mechanics*, 1987, no. 2, issue 10, pp. 97–137.

[17] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika Sploshnoy Sredy* [Continuum Mechanics]. In 4 vols. *Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Foundations of Mechanics of Rigid Body]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[18] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics]. In 4 vols. *Vol. 1. Tenzorny Analiz* [Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.

[19] Il`yushin A.A, Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosty* [Foundations of Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 356 p.

[20] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modelling and Computational Methods*, 2014, no. 1, p. 36–57.

[21] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye Nauki — Herald of the Bauman Moscow State University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 2, pp. 57–67.

[22] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Informatsionnye tekhnologii — Information Technologies*, 2008, no. 8, pp. 31–38.

[23] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Sokolov A.P., Sadovnichiy D.N., Gafarov B.R. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2013, no. 3, pp. 35–51.

[24] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Sokolov A.P. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii — Composit Mechanics and Design,* 2013, no. 3, vol. 19, pp. 365–383.

Dimitrienko Yu.I. (b.1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys. & Math.), professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of the Scientific-Educational Centre of Supercomputer Engineering Modelling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of over 250 publications in the field of computational mechanics, gas dynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.ru

Gubareva E.A. (b.1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Ph. D. (Phys. & Math.), assoc. professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of over 15 publications in the field of continuum mechanics, mechanics of contact interaction, mathematical modelling and composite mechanics. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Sborschikov S.V. (b. 1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. A postgraduate at the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of BMSTU. Author of 15 scientific publications in the field of computational mechanics of composites. e-mail: servasbor@gmail.ru