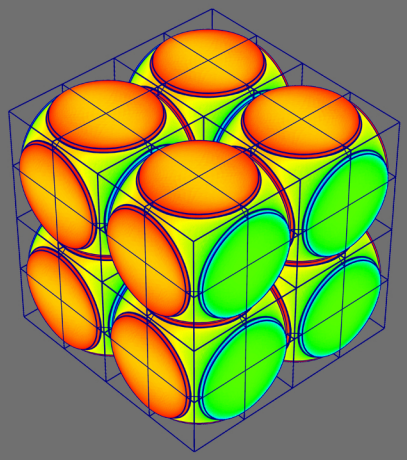
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Сулимов В. Д., Шкапов П. М., Гончаров Д. А. Применение гибридных алгоритмов к экстремальным задачам на собственные значения лагранжевых динамических систем. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №4 (12), с. 84-102

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/119/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
23.11.2026 20:15:02

УДК 519.6 DOI 10.18698/2309-3684-2016-4-84102

Применение гибридных алгоритмов к экстремальным задачам на собственные значения лагранжевых динамических систем

© В.Д. Сулимов, П.М. Шкапов, Д.А. Гончаров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены экстремальные задачи для составляющих собственных спектров лагранжевых динамических систем. Математические модели исследуемых систем описаны матрицами, зависящими от параметров. Задачи на собственные значения, формулируемые для таких систем, в общем случае характеризуются спектрами, которые могут содержать кратные собственные значения. Частные критерии в экстремальных задачах предполагаются непрерывными, липшицевыми, многоэкстремальными и, возможно, не всюду дифференцируемыми функциями. Поиск глобальных решений проведен с использованием новых гибридных алгоритмов, объединяющих стохастический алгоритм сканирования пространства переменных и детерминированные методы локального поиска. Приведены численные примеры решения задач глобальной недифференцируемой минимизации максимальных собственных значений систем.

Ключевые слова: *собственное значение, алгебраическая кратность, условие Липшица, сглаживающая аппроксимация, глобальная оптимизация, алгоритм Метрополиса, гибридный алгоритм.*

Введение. Проблемам динамики лагранжевых систем в современной литературе уделено значительное внимание. Так, в работе [1] представлен объединенный формализм Лагранжа — Гамильтона для автономных систем высокого порядка. Динамика указанных систем явно зависит от ускорений или производных высокого порядка от обобщенных координат. В работе [2] исследованы симметрии и законы сохранения для сингулярных лагранжевых динамических систем. Ряд исследований посвящен методам определения лагранжиана (и гамильтониана), которые основаны на преобразованиях переменных, допускающих представление уравнений движения нелинейной динамической системы в стационарной форме [3, 4]. В работе [5] рассмотрены задачи динамики плазмы и жидкости в современной постановке. Основные результаты получены с использованием уравнения Власова — Больцмана, выведенного из модифицированных уравнений движения Эйлера — Лагранжа. Описание стратегии управления лагранжевыми системами (объединенными в сеть), обеспечивающей уклонение от столкновений, дано в работе [6]. Разработке теории недифференцируемых вложений лагранжевых систем посвящена работа [7]; там же представлено недифференцируемое уравнение Эйлера — Лагранжа. Исследования динамических систем включают в себя анализ собственных значений

и соответствующих собственных векторов [8]. В работе [9] рассмотрена задача о колебаниях двухслойной жидкости, разделенной недеформируемым проницаемым разделителем.

Проблема стабилизируемости динамических систем исследована в работе [10]. Подход основан на оптимизации собственных значений и использовании результирующих характеристических свойств оптимальных конфигураций собственных значений системы. Получены явные выражения для границ стабилизируемости двумерных систем. В работе [11] рассмотрена задача определения характеристик потока идеальной несжимаемой жидкости в прямолинейной трубе по спектральным данным. Для математической модели объекта решение прямой задачи получено методом гомотопических возмущений. Сформулирована обратная задача восстановления характеристик потока, при решении которой использованы гибридные алгоритмы оптимизации.

Следует отметить, что поиск экстремальных собственных значений относится к числу актуальных задач динамики систем [12–14]. При формулировке соответствующих экстремальных задач необходимо учитывать возможное наличие в спектрах систем кратных собственных значений, вследствие чего критериальные функции могут оказаться невыпуклыми и недифференцируемыми [15, 16]. Некоторые методы анализа чувствительности собственных значений и других характеристик динамических систем, реализуемые в алгоритмах оптимизации, описаны в работах [17, 18].

Цель настоящей работы — построение численной методики оптимизационного исследования собственных значений лагранжевых динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации.

Постановка экстремальных задач. Предварительно рассматривается динамическая система, состоящая из N одинаковых элементов массы m_e, соединенных между собой (каждый с каждым) с помощью пружин жесткостью c_s и, кроме того, связанных с неподвижным основанием пружинами жесткостью c_b [19]. Лагранжиан системы определен в виде

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = T(\vec{q},\dot{\vec{q}}) - U(\vec{q}), \tag{1}$$

где $\vec{q} \in \mathrm{R}^N$ — вектор обобщенных координат (R^N — N-мерное евклидово пространство); $\dot{\vec{q}} \in \mathrm{R}^N$ — вектор обобщенных скоростей; $T(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ — кинетическая энергия системы; $U(\vec{q})$ — потенциальная энергия системы. Здесь имеет место

$$T = \frac{1}{2} m_e \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i^2; \quad U = \frac{1}{2} c_s \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} (q_j - q_i)^2 + \frac{1}{2} c_b \sum_{i=1}^{N} q_i^2.$$

Предполагается, что кинетическая энергия $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ и потенциальная энергия $U(\vec{q})$ системы принадлежат классу непрерывных функций с непрерывными частными производными по аргументам. С использованием уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})] = 0$$

(здесь t — время) для системы с лагранжианом, определенным согласно (1), могут быть получены следующие уравнения движения:

$$\mathbf{A}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{C}\vec{q} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}$ — диагональная матрица, $\mathbf{C}$ — симметрическая теплицева матрица. Поиск решения уравнения (2) в виде $\vec{q} = \vec{y}e^{\alpha t}$ приводит к стандартной формулировке проблемы собственных значений

$$\mathbf{G}\vec{y} = \lambda\vec{y} \tag{3}$$

с неизвестной скалярной величиной $\lambda = -\alpha^2$ и вектором $\vec{y} \in \mathrm{R}^N$. Существенно, что определитель симметрической $(N \times N)$-матрицы $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{1/2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{1/2}$ может быть записан в виде [19]

$$\det \mathbf{G} = \frac{c_b}{m_e}(Nc_s / m_e + c_b / m_e)^{N-1}.$$

Из этого следует, что рассматриваемая система имеет единственное низшее собственное значение $\lambda_1 = c_b / m_e$ и $N-1$ алгебраически кратных собственных значений $\lambda_j = (Nc_s + c_b)/m_e$, $j = 2, \ldots, N$.

В общем случае для произвольной лагранжевой системы решение задачи на собственные значения (3) или обобщенной проблемы собственных значений

$$(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A})\vec{y} = 0 \tag{4}$$

предполагает определение собственных пар $\{\lambda_i, \vec{y}^i\}$, $i = 1, \ldots, N$, где скаляр λ_i представляет i-е собственное значение, а $\vec{y}^i$ — соответствующий ему собственный вектор. Если требуется найти не все, а лишь некоторые собственные пары, то, например, задачу (4) называют ограниченной обобщенной проблемой собственных значений. В такой постановке решение задач (3) или (4) может быть получено

при анализе систем с достаточно большим числом степеней свободы, что требует применения эффективных современных численных методов [20].

При оптимизации собственных значений лагранжевых систем возможны следующие постановки экстремальных задач. Пусть задан вектор переменных управления (параметров оптимизации) $\vec{x}$ и определены матрица $\mathbf{G}(\vec{x})$ задачи (3) или матрицы $\mathbf{A}(\vec{x})$, $\mathbf{C}(\vec{x})$ задачи (4).

Задача максимизации минимального собственного значения $\lambda_{\min}$ матрицы $\mathbf{G}(\vec{x})$: требуется найти

$$\max_{\vec{x}} \lambda_{\min}(\mathbf{G}(\vec{x})) \quad \text{при } \vec{h}(\vec{x}) = 0,\ \vec{g}(\vec{x}) \le 0,\ \vec{x} \in X, \tag{5}$$

где векторы $\vec{h}(\vec{x})$ и $\vec{g}(\vec{x})$ представляют ограничения, наложенные на модель системы, в форме равенств и неравенств соответственно; $X \subset \mathrm{R}^n$ — область допустимых значений переменных управления; n — число переменных управления. Существенно, что в процессе численного решения задачи (5) собственные значения $\lambda_i(\mathbf{G}(\vec{x}))$, $i = 1,\ 2,\ ...,$ могут изменяться, при этом выполняется их автоматическая перенумерация с упорядочением по возрастанию. Следовательно, при наличии в спектре системы кратных собственных значений критериальная функция задачи оптимизации является не всюду дифференцируемой.

Задача минимизации максимального собственного значения $\lambda_{\max}$ матрицы $\mathbf{G}(\vec{x})$: требуется найти

$$f\left(\vec{x}^*\right) = \min_{\vec{x}} f\left(\vec{x}\right) \text{ при } \vec{h}(\vec{x}) = 0,\ \vec{g}(\vec{x}) \le 0,\ \vec{x} \in X. \tag{6}$$

Здесь $f(\vec{x}) = \lambda_{\max}(\mathbf{G}(\vec{x}))$, $\vec{x}^*$ — глобальное решение. В задаче (6) ограничения на модель системы формулируются аналогично ограничениям задачи (5) максимизации $\lambda_{\min}$.

В некоторых приложениях может потребоваться одновременная максимизация $\lambda_{\min}$ и минимизация $\lambda_{\max}$ симметрической матрицы $\mathbf{G}(\vec{x})$, причем частные критерии находятся в конфликте. Возможна следующая формулировка векторной задачи оптимизации собственных значений: требуется найти

$$\min_{\vec{x}} \{\ \lambda_{\max}(\mathbf{G}(\vec{x})),\ -\lambda_{\min}(\mathbf{G}(\vec{x}))\ \} \text{ при } \vec{h}(\vec{x}) = 0,\ \vec{g}(\vec{x}) \le 0,\ \vec{x} \in X. \tag{7}$$

Следует отметить, что в сформулированных задачах оптимизации собственных значений, включая векторную задачу (7), в общем случае частные критерии являются липшицевыми, многоэкстремальны-

ми и не всюду дифференцируемыми функциями [12]. Указанные особенности рассматриваемых экстремальных задач требуют выбора специальных методов их решения. К настоящему времени разработано большое число алгоритмов глобальной оптимизации [21, 22]. Накопленный опыт приложений демонстрирует, с одной стороны, недостаточную эффективность детерминированных методов (существенно ограничена размерностью задачи), с другой — потребность в значительных вычислительных ресурсах при использовании стохастических методов. Этим обусловлена актуальность разработки гибридных алгоритмов глобальной оптимизации [23, 24]. Подобные алгоритмы объединяют стохастические алгоритмы сканирования пространства переменных и детерминированные процедуры локального поиска. Существенно, что для решения векторной задачи (7) с многоэкстремальными частными критериями требуется применение специальных методов многокритериальной глобальной оптимизации [25, 26]. Далее рассматривается экстремальная задача (6) в скалярной постановке, для решения которой предложена численная методика с использованием гибридных алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации.

Без потери общности экстремальную задачу на собственные значения можно сформулировать как задачу глобальной оптимизации при наличии ограничений:

$$f\left(\vec{x}^{*}\right)=\min_{\vec{x}\in X\subset \mathrm{R}^{n}} f\left(\vec{x}\right), \tag{8}$$

где

$$X=\left\{\vec{x}\in D:\ g_i\left(\vec{x}\right)\le 0,\ i\in I\right\}, \tag{9}$$

$$D=\left\{\vec{x}\in \mathrm{R}^{n}:\ x_j^{l}\le x_j\le x_j^{u},\ j\in J\right\}; \tag{10}$$

$f\left(\vec{x}\right)$ — целевая функция; $\vec{x}^{*}$ — глобальное решение; $g_i\left(\vec{x}\right)$ — функции ограничений задачи, $i\in I$; $I=\left\{1,\ ...,\ m_g\right\}$ — конечное множество индексов; m_g — число функций ограничений; D — область поиска; x_j^{l}, x_j^{u} — соответственно нижнее и верхнее ограничения на переменную x_j; $J=\left\{1,\ ...,n\right\}$.

Функции $f\left(\vec{x}\right)$, $g_i\left(\vec{x}\right)$, $i\in I$, задачи (8)–(10) предполагаются непрерывными липшицевыми. Кроме того, положим, что действительная функция $f:\mathrm{R}^{n}\to\mathrm{R}$ является многоэкстремальной, не всюду дифференцируемой и для нее задана вычислительная процедура, поз-

воляющая определять значения функции в точках допустимой области. Необходимо также учесть возможную высокую трудоемкость вычисления критериальных функций, для чего могут потребоваться значительные вычислительные ресурсы.

Методы локальной недифференцируемой оптимизации. Результирующая эффективность гибридных алгоритмов глобальной оптимизации в значительной степени определяется характеристиками вычислительных процедур локального поиска. Ниже представлены методы недифференцируемой оптимизации, предназначенные для процедур локального поиска в гибридных алгоритмах. Первый метод предполагает предварительное построение локальных сглаживающих аппроксимаций критериальных функций с последующим использованием градиентной информации для аппроксимированной функции. В качестве второго выбран метод Хука — Дживса (без использования производных).

Рассмотрим задачу (8)–(10), ограничившись поиском локального решения. Предварительно исследуется задача поиска минимума действительной функции $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R},$ определенной в виде

$$f(\vec{x}) = \max_{\vec{x} \in X \subset \mathrm{R}^n} \left\{ f_i(\vec{x}) \right\}, \quad i \in I_M = \{1, \ldots, M\}.$$

Здесь X — допустимое множество; предполагается, что все функции $f_i(\vec{x}),\ i \in I_M$, выпуклы и непрерывно дифференцируемы.

Задачи, формулируемые в минимаксной форме, относятся к классу задач недифференцируемой оптимизации. Для их решения применяются специальные методы, например, модифицированный метод сопряженных градиентов, метод гиперболической сглаживающей функции и др. Рассматриваемый ниже подход основан на построении сглаживающих аппроксимаций критериальных функций с последующим применением эффективных методов, разработанных для задач дифференцируемой оптимизации. Подход предполагает замену каждой недифференцируемой функции некоторой ее аппроксимацией, которая была бы выпуклой и дифференцируемой в области допустимых значений переменных управления. Ниже в качестве процедуры локального поиска гибридных алгоритмов рассматривается метод гиперболической сглаживающей функции [27]. Применительно к задаче недифференцируемой оптимизации подход с использованием гиперболического сглаживания основан на введении новой критериальной функции

$$F(\vec{x}, t) = t + \sum_{i \in I_M} \max\{\ 0,\ f_i(\vec{x}) - t\ \},$$

а также ее аппроксимации в виде

$$\Phi_\tau(\vec{x},t) = t + \sum_{i\in I_M} \frac{f_i(\vec{x}) - t + \sqrt{(f_i(\vec{x})-t)^2 + \tau^2}}{2}.$$

Здесь $\tau > 0$ — параметр точности; $t \in \mathrm{R}$. Следует отметить, что функции $f_i(\vec{x})$, $i \in I_M$, должны быть непрерывно дифференцируемыми; используемый ниже параметр l определяется числом ограничений. При этом справедлива оценка

$$0 < \Phi_\tau(\vec{x},t) - F(\vec{x},t) \le \frac{l\tau}{2}.$$

Далее рассматриваемая экстремальная задача заменяется последовательностью задач минимизации функций $\Phi_{\tau_k}(\vec{x}, f(\vec{x}))$ и имеет место $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$. В работе [27] предложен алгоритм решения указанной последовательности задач и доказана его сходимость.

При втором подходе для решения задачи локальной минимизации, как и в работе [23], используется метод Хука — Дживса. Одна из его особенностей состоит в том, что при определении нового направления поиска учитывается информация, полученная при вычислениях на предыдущих итерациях. В методе объединены две фазы: исследующий поиск с циклическим изменением переменных задачи и ускоряющий поиск по образцу. На предварительном (инициирующем) шаге алгоритма Хука — Дживса при решении задачи локальной оптимизации выполняются следующие действия: определяются направления вдоль координат $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$; выбираются скалярный параметр окончания поиска $\varepsilon > 0$, начальный размер шага $\Delta \ge \varepsilon$, коэффициент уменьшения шага $\alpha > 1$; выбирается начальная точка $\vec{x}_i$, полагается $\vec{y}_i = \vec{x}_i$, задается $k = j = 1$ и происходит переход к основному шагу, который включает в себя приведенную ниже последовательность частных шагов.

Шаг 1. Если $f(\vec{y}_i + \Delta\vec{h}_i) < f(\vec{y}_i)$, то попытка успешна; положить $\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \Delta\vec{h}_i$ и перейти к шагу 2. Если $f(\vec{y}_i + \Delta\vec{h}_i) \ge f(\vec{y}_i)$, то попытка неудачна, при этом: если $f(\vec{y}_i - \Delta\vec{h}_i) < f(\vec{y}_i)$, то $\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i - \Delta\vec{h}_i$ и перейти к шагу 2; если же $f(\vec{y}_i - \Delta\vec{h}_i) \ge f(\vec{y}_i)$, то положить $\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i$.

Шаг 2. Если $j < n$, то задать $j = j + 1$ и повторить шаг 1. Иначе перейти к шагу 3, если $f(\vec{y}_{n+1}) < f(\vec{x}_k)$, или перейти к шагу 4, если $f(\vec{y}_{n+1}) \ge f(\vec{x}_k)$.

Шаг 3. Задать $\vec{x}_{k+1} = \vec{y}_{n+1}$ и $\vec{y}_i = \vec{x}_{k+1} + \alpha(\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k)$. Заменить k на $k+1$, положить $j = 1$ и перейти к шагу 1.

Шаг 4. Если $\Delta < \varepsilon$, то останов: $\vec{x}_k$ есть решение. Иначе заменить Δ на $\Delta / 2$. Положить $\vec{y}_i = \vec{x}_k$, $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k$, заменить k на $k+1$, положить $j = 1$ и повторить шаг 1.

Гибридные алгоритмы. Разработка и применение гибридных методов глобальной оптимизации является актуальным направлением исследований. Алгоритмы, реализующие указанные методы, позволяют эффективно решать задачи глобальной оптимизации большей размерности по сравнению с детерминированными алгоритмами; с другой стороны, вычислительная стоимость полученных решений значительно ниже, чем при использовании стохастических методов. Гибридный алгоритм, относящийся к рассматриваемому здесь классу, объединяет какой-либо стохастический алгоритм исследования пространства переменных и детерминированный метод локального поиска. Так, стохастический алгоритм столкновения частиц PCA (Particle Collision Algorithm) используется при сканировании пространства переменных в гибридном алгоритме HJPCA [23].

Следует отметить, что результирующая эффективность гибридных алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации может быть повышена за счет совершенствования вычислительных процедур как в фазе сканирования пространства, так и в фазе локального поиска. В частности, для сканирования пространства переменных целесообразно применение современного стохастического кратного алгоритма столкновения частиц M-PCA, который относится к числу наиболее мощных из известных стохастических алгоритмов глобальной оптимизации [28].

Существенным шагом алгоритма является сравнительная оценка качества решения, определяемого текущей и предшествующей конфигурациями системы. Пробное приближение принимается с определенной вероятностью, что исключает сходимость к локальному минимуму при поиске глобального решения. Работа алгоритма M-PCA основана на использовании аналогии с физическими процессами абсорбции и рассеяния частиц при ядерных реакциях. В его простейшей версии для исследования пространства переменных используется одна частица: указанная версия алгоритма M-PCA совпадает с алгоритмом PCA, интегрированным в гибридный алгоритм HJPCA. На начальном шаге выбирается пробное решение (Old_Config), которое затем модифицируется посредством стохастического возмущения (функция Perturbation( )), что позволяет найти новое решение (New_Config). С помощью функции Fitness( ) дается сравнительная оценка нового и предыдущего решений, на основании которой новое

решение может быть принято или отвергнуто. Если новое решение отвергнуто, то происходит переход к функции Scattering( ), реализующей схему Метрополиса. Для сканирования области, перспективной на минимум, применяются функции Perturbation( ) и Small_Perturbation( ). Новое решение принимается, если оно лучше предыдущего (абсорбция); если найденное решение хуже предыдущего, то происходит переход в отдаленную область пространства переменных (рассеяние), что позволяет преодолевать локальные минимумы.

В работе [23] приведены результаты сравнения эффективности гибридного алгоритма HJPCA и современных, обладающих высокими характеристиками алгоритмов, реализующих различные метаэвристики. По результатам тестирования (данные получены для ряда стандартных эталонных тестовых многомерных функций), установлена более высокая эффективность алгоритма HJPCA. Следовательно, гибридный алгоритм HJPCA — один из наиболее мощных современных алгоритмов глобальной оптимизации.

Эффективность сканирования пространства переменных при поиске глобального решения может быть значительно повышена за счет одновременного использования большого числа частиц. Такой подход реализует кратный алгоритм M-PCA, ориентированный непосредственно на применение в среде параллельных вычислений. Наилучшее решение определяется с учетом данных о всех частицах, участвующих в процессе. При выбранном количестве частиц единственным задаваемым параметром для алгоритма M-PCA является число итераций. Локальный поиск в рассматриваемых гибридных алгоритмах должен выполняться с учетом предположения о недифференцируемости критериальной функции.

В первом гибридном алгоритме M-PCAGHS при локальном поиске используется метод гиперболической сглаживающей функции. Во втором гибридном алгоритме M-PCAHJ локальная минимизация проводится методом Хука — Дживса. В представленном ниже фрагменте псевдокода второго гибридного алгоритма его первая (генерация начального решения) и третья (рассеяние) функции полностью соответствуют аналогичным функциям стохастического алгоритма M-PCA [28]:

```
   1. Generate an initial solution Old_Config
   Best_Fitness = Fitness (Old_Config)
   Update Blackboard
   For n = 0 to # of particles
   For n = 0 to # of iterations
   Update Blackboard
   Perturbation ( )
        If  Fitness  (New_Config)  >  Fitness
(Old_Config)
```

```
         If Fitness (New_Config) > Best_Fitness
            Best_Fitness := Fitness (New_Config)
         End If
Old_Config := New_Config
         Exploration ( )
      Else
         Scattering ( )
      End If
End For
End For
2. Exploration ( )
   For n = 0 to # of iterations
      Small_Perturbation ( )
Local search
         using Hooke-Jeeves method
         Check stopping criterion:
         Find global solution Best Fitness
         Else continue
         If Fitness (New_Config) > Best_Fitness
Best_Fitness := Fitness (New_Config)
End If
         Old_Config := New_Config
         End For
Return
3. Scattering ( )
p_scatt = 1 – ( Fitness (New_Config)) / (Best_Fitness)
   If p_scatt > random(0, 1)
      Old_Config := random solution
   Else
      Exploration ( )
   End If
Return
```

В состав гибридного алгоритма M-PCAHJ входят также стандартные процедуры Perturbation( ) и Small_Perturbation( ) [28]. Его можно рассматривать как модификацию алгоритма HJPCA [23], повышающую результирующую вычислительную эффективность за счет фазы сканирования пространства переменных при использовании более чем одной частицы. При возрастании числа используемых частиц наблюдается сублинейный рост эффективности стохастического алгоритма M-PCA [28]. Существенно, что количество вычислений критериальной функции для фазы локального поиска алгоритма M-PCAHJ на порядок (и более) превышает значение аналогичного параметра для фазы сканирования пространства переменных. Более

высокое качество сканирования, обеспечиваемое кратным алгоритмом M-PCA по сравнению с каноническим PCA, уменьшает число выполняемых поисков локальных минимумов и, следовательно, общее количество вычислений критериальной функции. Это определяет более высокую эффективность гибридного алгоритма M-PCAHJ по сравнению с алгоритмом HJPCA.

Следует отметить, что метод Хука — Дживса, используемый при локальном поиске, имеет ряд принципиальных недостатков. Так, вследствие нелинейных эффектов алгоритм Хука — Дживса может генерировать последовательность исследующих поисков без перехода к ускоряющему поиску по образцу. Выбор более эффективного метода для использования в локальной фазе позволяет улучшить результирующие характеристики гибридного алгоритма. Соответствующие подходы представлены в работах [29, 30].

Численные примеры. ***Пример 1.*** Рассматривается динамическая система, состоящая из N одинаковых элементов массы m_e, соединенных между собой (каждый с каждым) с помощью одинаковых пружин жесткости c_s и, кроме того, связанных с неподвижным основанием пружинами жесткости c_b [19]. Предполагается, что $N = 10$, $m_e = 1$ кг, причем $0{,}1 \le c_b \le 4$ Н/м, $0{,}1 \le c_s \le 4$ Н/м. Заданный спектр системы представлен собственными значениями $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_i^* = 11$, $i = \overline{2,\ 10}$. Требуется выбрать значения c_b, c_s так, чтобы обеспечить совпадение спектра системы с заданным. Здесь переменными управления являются коэффициенты жесткости пружин: $x_1 = c_b$, $x_2 = c_s$. Элементы диагональной матрицы масс $\mathbf{A}(x)$ и симметрической теплицевой матрицы жесткости $\mathbf{C}(x)$ задачи на собственные значения (4), расположенные на главных диагоналях указанных матриц, имеют вид:

$$a_{11} = a_{22} = \ \ldots\ = a_{99} = a_{1010} = m_e,$$

$$c_{11} = c_{22} = \ \ldots\ = c_{99} = c_{1010} = x_1 + x_2(N-1);$$

при этом каждый внедиагональный элемент матрицы $\mathbf{C}(x)$ равен $(-x_2)$. Требуется найти:

$$\min_{\vec{x} \in X \subset \mathrm{R}^2} F\left(\vec{x}\right) \text{ при ограничениях } x_i^l \le x_i \le x_i^u,\ i = \overline{1,\ 2},$$

где $F(\vec{x})$ — критериальная функция, $F(\vec{x}) = \left| \lambda_1^* - \lambda_1(\vec{x}) \right| + \left| \lambda_{10}^* - \lambda_{10}(\vec{x}) \right|$; $\lambda_1^*, \lambda_{10}^*$ — заданные минимальное и максимальное собственные значения системы (определены при $c_b = c_s = 1$ Н/м); $\lambda_1(\vec{x}), \lambda_{10}(\vec{x})$ — минимальное и максимальное собственные значения системы, соответствующие текущему $\vec{x}$; $x_i^l = 0{,}1$ Н/м, $x_i^u = 4$ Н/м, $i = \overline{1,\ 2}$.

Следует отметить, что сформулированная скалярная экстремальная задача эквивалентна задаче минимизации функции $f(\vec{x}) = \lambda_{\max}(\vec{x})$ при условии $\lambda_{\min}(\vec{x}) = \lambda_1^*$, где $\lambda_{\max}(\vec{x}) = \lambda_{10}(\vec{x})$.

Приближенное решение получено с использованием гибридного алгоритма M-PCAHJ. На рис. 1, 2 показано изменение переменных управления x_1, x_2 и критериальных функций $F(\vec{x})$, $f(\vec{x})$ при возрастании числа итераций в заключительной фазе локального поиска, определяющей глобальное решение.

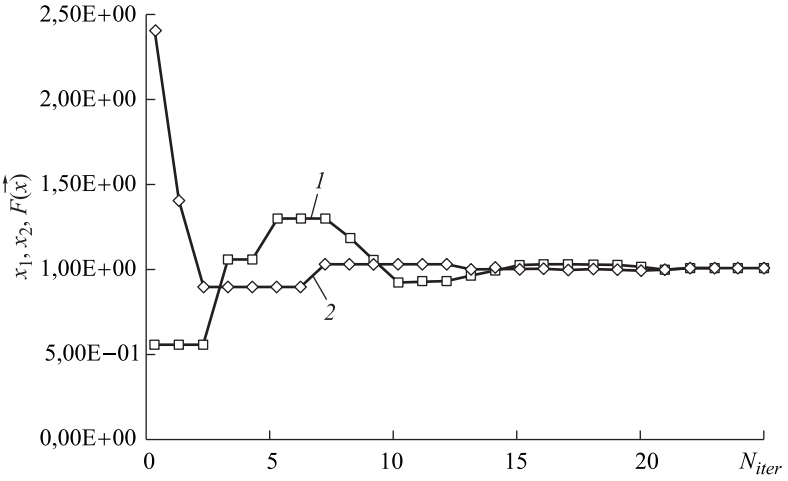


Рис. 1. Изменение переменных управления x_1 (*1*), x_2 (*2*) с ростом числа итераций

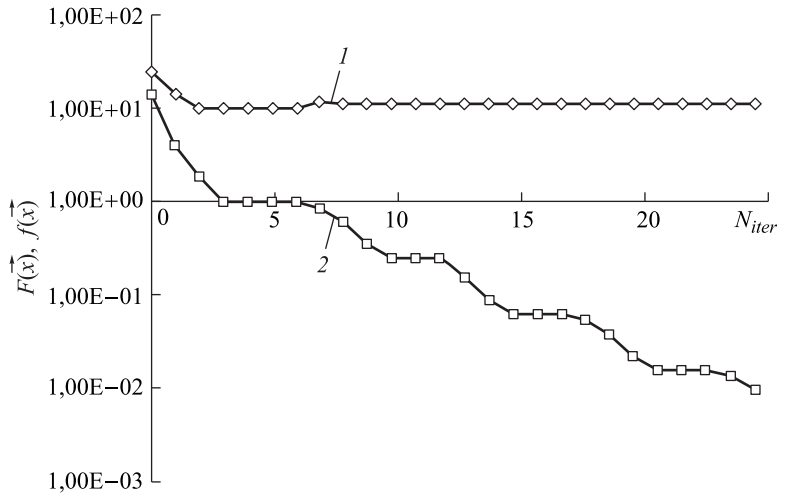


Рис. 2. Изменение функций $f(\vec{x})$ (*1*), $F(\vec{x})$ (*2*) с ростом числа итераций

Для числа итераций $N_{iter} = 25$ найдено: $x_1^{25} \approx 0,99727$ Н/м; $x_2^{25} \approx 0,99961$ Н/м; $F(\vec{x}^{25}) \approx 0,9375 \cdot 10^{-2}$ (что соответствует значению $f(\vec{x}^{25}) \approx 0,10993 \cdot 10^{2}$). Относительная погрешность решения составляет: при определении переменных управления (максимальная) $\delta_x \approx 0,28$ %; при определении минимума максимального собственного значения системы $\delta_{\lambda_{\max}} \approx 0,064$ %.

Пример 2. Рассматриваемая система состоит из трех элементов массы m_i, $i = \overline{1,\ 3}$, соединенных между собой пружинами: первый и второй элементы соединены пружиной жесткости C_1, второй и третий — пружиной жесткости C_2, первый и третий — пружиной жесткости C_3; кроме того, второй элемент связан с неподвижным основанием пружиной жесткости C_b. Задана следующая информация: $m_1 = m_3 = 1$ кг; $m_2 = 4$ кг; $0,1 \le C_1 \le 2,4$ Н/м; $0,1 \le C_2 \le 2,4$ Н/м; $C_3 = 5 - C_1 - C_2$ Н/м; $C_b = 8$ Н/м. Требуется определить значения переменных управления $x_i = C_i$, $i = \overline{1,\ 2}$, при которых максимальное собственное значение системы $\lambda_{\max}(\vec{x})$ достигает минимума.

Элементы диагональной матрицы масс $\mathbf{A}(x)$ и симметрической матрицы жесткости $\mathbf{C}(\vec{x})$ задачи на собственные значения (4), расположенные на главных диагоналях указанных матриц, имеют вид: $a_{11} = m_1$, $a_{22} = m_2$, $a_{33} = m_3$, $c_{11} = x_1 + C_3$, $c_{22} = x_1 + x_2 + C_b$; $c_{33} = x_2 + C_3$. Остальные элементы матрицы $\mathbf{C}(\vec{x})$ определены в виде: $c_{12} = c_{21} = -x_1$, $c_{13} = c_{31} = -C_3$, $c_{23} = c_{32} = -x_2$. Требуется найти

$$\min_{\vec{x} \in X \subset \mathrm{R}^2} f(\vec{x}) \text{ при ограничениях } x_i^l \le x_i \le x_i^u,\ i = \overline{1,\ 2},$$

$$C_3 = 5 - x_1 - x_2 \text{ Н/м},$$

где $f(\vec{x}) = \lambda_{\max}(\vec{x})$; $x_i^l = 0,1$ Н/м, $x_i^u = 2,4$ Н/м, $i = \overline{1,\ 2}$.

Приближенное решение получено с использованием гибридного алгоритма M-PCANJ. На рис. 3 показано изменение переменных управления x_1, x_2, а также коэффициента жесткости $C_3(\vec{x})$ при возрастании числа итераций в завершающей фазе локального поиска, где определяется глобальное решение задачи.

Для числа итераций $N_{iter} = 24$ найдено: $x_1^{24} \approx 2,000024$ Н/м; $x_2^{24} \approx 1,999976$ Н/м; $C_3(\vec{x}^{24}) \approx 4,0$ Н/м. Соответствующее изменение критериальной функции $f(\vec{x}) = \lambda_{\max}(\vec{x})$ показано на рис. 4, на кото-

ром также представлено изменение функций $f_1(\vec{x}) = \lambda_{\min}(\vec{x}) = \lambda_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x}) = \lambda_2(\vec{x})$, причем $\lambda_{\min} = \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 = \lambda_{\max}$. По завершении фазы локального поиска имеет место $f(\vec{x}^{24}) \approx 4,000028$; $f_1(\vec{x}^{24}) \approx 3,999972$; $f_2(\vec{x}^{24}) \approx 1,0$.

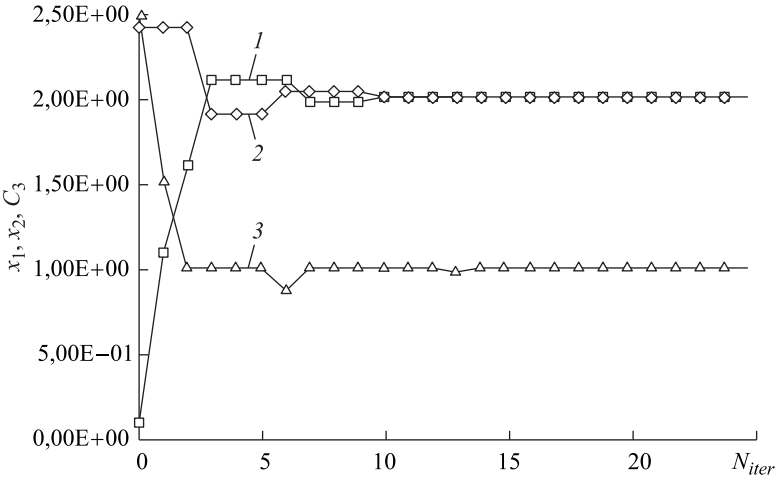


Рис. 3. Изменение переменных управления x_1 (*1*), x_2 (*2*) и коэффициента жесткости C_3 (*3*) с ростом числа итераций

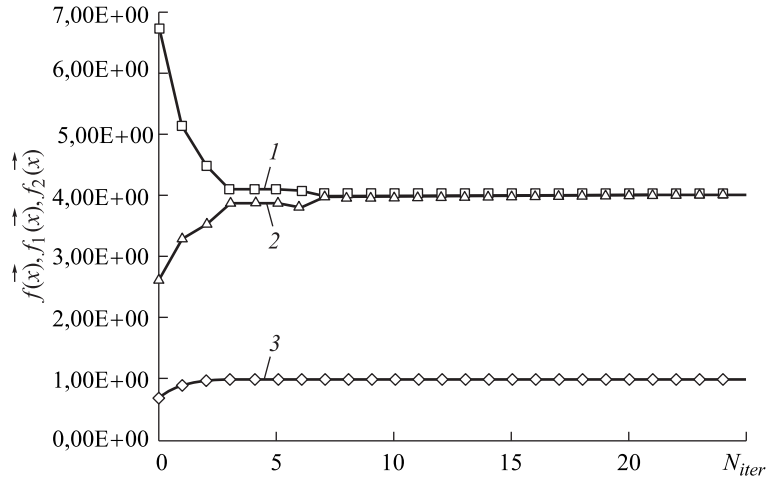


Рис. 4. Изменение функций $f(\vec{x})$ (*1*), $f_1(\vec{x})$ (*3*), $f_2(\vec{x})$ (*2*) с ростом числа итераций

Итак, сформулированная экстремальная задача решена, при этом искомый минимум достигается на кратном собственном значении $\lambda_2(\vec{x}^{24}) \approx \lambda_3(\vec{x}^{24})$ с достаточно высокой точностью.

Выводы. Рассмотрены экстремальные задачи на собственные значения для лагранжевых динамических систем. Предложен подход к решению экстремальных задач с использованием гибридных алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации. Исследование пространства переменных модели проводится стохастическим методом, реализуемым кратным алгоритмом столкновения частиц. При локальном поиске в гибридном алгоритме M-PCAGHS градиентная информация определяется для сглаживающих аппроксимаций не всюду дифференцируемых критериальных функций. Во втором гибридном алгоритме M-PCAHJ локальный поиск реализуется без использования производных. Решение модельных экстремальных задач получено с достаточной для приложений точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант Президента Российской Федерации по поддержке научных исследований ведущих научных школ НШ-4058.2014.8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Prieto-Martinez P.D., Román-Roy N. Lagrangian–Hamiltonian unified formalism for autonomous higher order dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011. DOI 10.1088/1751-8113/44/38/385203

[2] Havelková M. Symmetries of a dynamical system represented by singular Lagrangians. *Communications in Mathematics*, 2012, vol. 20, issue 1, pp. 22–32.

[3] Mestdag T., Sarlet W., Crampin M. Second-order dynamical systems of Lagrangian type with dissipation. *Differential Geometry and its Applications*, 2011, vol. 29, suppl. 1, pp. S156–S163.

[4] Musielak Z.E., Roy D., Swift L.D. Method to derive Lagrangian and Hamiltonian for a nonlinear dynamical system with variable coefficients. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 38, no. 3, pp. 894–902.

[5] El-Nabusi R.A. Modified plasma-fluid equations from nonstandard Lagrangians with applications to nuclear fusion. *Canadian Journal of Physics*, 2014, vol. 93, no. 1, pp. 55–67. DOI 10.1139/cjp-2014-0233

[6] Sabattini L., Secchi C., Chopra N. Decentralized connectivity maintenance for networked Lagrangian systems with collision avoidance. *Asian Journal of Control*, 2014, vol. 17, no. 1, pp. 111–123.

[7] Cresson J., Greff I. Non-differentiable embedding of Lagrangian systems and partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis*, 2011, vol. 384, no. 2, pp. 626–646.

[8] Gonçalves P. Behavior modes, pathways and overall trajectories: eigenvector and eigenvalue analysis of dynamic systems. *System Dynamics Review*, 2009, vol. 25, no. 1, pp. 35–62.

[9] Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 5, с. 109–116.

[10] Huijberts H., Michiels W., Nijmeijer H. Stabilizability via time-delayed feedback: an eigenvalue optimization approach. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2009, vol. 8, no. 1, pp. 1–20.

[11] Сулимов В.Д., Шкапов П.М., Бондаренко Н.И. Восстановление характеристик потока жидкости в трубе по спектральным данным с использованием гибридных алгоритмов оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 2, с. 65–78.
DOI 10.18698/1812-3368-2016-2-65-78

[12] Embree M., Lehoucq R.B. Dynamical systems and non-Hermitian iterative eigensolvers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2009, vol. 47, no. 2, pp. 1445–1473.

[13] Liu S.-T., Luo X.-L. A method based on Rayleigh quotient gradient flow for extreme and interior eigenvalue problems. *Linear Algebra and its Applications*, 2010, vol. 432, no. 7, pp. 1851–1863.

[14] Mengi E., Yildirim E.A., Kiliç M. Numerical optimization of eigenvalues of Hermitian matrix functions. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2014, vol. 35, no. 2, pp. 699–724.

[15] Lippert R.A. Fixing multiple eigenvalues by a minimal perturbation. *Linear Algebra and its Applications*, 2010, vol. 432, no. 7, pp. 1785–1817.

[16] Mengi E. Locating a nearest matrix with an eigenvalue of prescribed algebraic multiplicity. *Numerische Mathematik*, 2011, vol. 118, no. 1, pp. 109–135.

[17] Alam R., Bora S. On sensitivity of eigenvalues and eigendecompositions of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2005, vol. 396, pp. 273–301.

[18] Wilkins A.K., Tidor B., White J., Barton P.I. Sensitivity analysis for oscillating dynamical systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, vol. 31, no. 4, pp. 2706–2732.

[19] Palej R., Krowiak A. Modal analysis of multi-degree-of-freedom systems with repeated frequencies — analytical approach. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, vol. 49, no. 2, pp. 343–354.

[20] Tang P.T.P., Polizzi E. FEAST as a subspace iteration eigensolver accelerated by approximate spectral projection. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2014, vol. 35, no. 2, pp. 354–390.

[21] Floudas C.A., Gounaris C.E. A review of recent advances in global optimization. *Journal of Global Optimization*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 3–38.

[22] Карпенко А.П. *Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 446 с.

[23] Rios-Coelho A.C., Sacco W.f., Henderson N. A Metropolis algorithm combined with Hooke-Jeeves local search method applied to global optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, vol. 217, no. 2, pp. 843–885.

[24] Voglis C., Parsopoulos K.E., Papageorgiou D.G., Lagaris I.E., Vrahatis M.N. MEMPSODE: A global optimization software based on hybridization of population-based algorithms and local searches. *Computer Physics Communications*, 2012, vol. 183, no. 2, pp. 1139–1154.

[25] Gil C., Márques A., Baños R., Montoya M.G., Gómez J. A hybrid method for solving multi-objective global optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 2007, vol. 38, no. 2, pp. 265–281.

[26] Sulimov V.D., Shkapov P.M. Hybrid algorithms for multiobjective optimization of mechanical and hydromechanical systems. *Journal of Mechanics Engineering and Automation*, 2012, vol. 2, no. 3, pp. 190–196.

[27] Bagirov A.M., Al Nuaimat A., Sultanova N. Hyperbolic smoothing function method for minimax problems. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 2013, vol. 62, no. 16, pp. 759–782.

[28] Luz E.F.P., Becceneri J.C., de Campos Velho H.F. A new multi-particle collision algorithm for optimization in a high performance environment. *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, 2008, vol. 1, pp. 3–10.

[29] Сулимов В.Д., Шкапов П.М. Гибридные методы вычислительной диагностики двухфазного потока в циркуляционном контуре. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 68–88.

[30] Sulimov V.D., Shkapov P.M. Application of hybrid algorithms to computational diagnostic problems for hydromechanical systems. *Journal of Mechanics Engineering and Automation*, 2012, vol. 2, no. 12, pp. 734–741.

Статья поступила в редакцию 20.11.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сулимов В.Д., Шкапов П.М., Гончаров Д.А. Применение гибридных алгоритмов к экстремальным задачам на собственные значения лагранжевых динамических систем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4 (12), с. 84–102.

Сулимов Валерий Дмитриевич, старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области математического моделирования и оптимизации динамических систем.
e-mail: fn3@bmstu.ru

Шкапов Павел Михайлович, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 печатных работ по динамике, оптимизации и диагностированию механических и гидромеханических систем. e-mail: spm@bmstu.ru

Гончаров Дмитрий Александрович, ассистент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области гидродинамики и динамики космических аппаратов. e-mail: goncharov@bmstu.ru

Use of hybrid algorithms in extremum eigenproblems of Lagrangian dynamical systems

© V.D. Sulimov, P.M. Shkapov, D.A. Goncharov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The study examines extremum problems for eigen spectra components of Lagrangian dynamical systems. Mathematical models of the systems studied are described by the matrices depending on the parameters. The eigenproblems defined for such systems, in general, are characterized by a spectrum, which can contain multiple eigenvalues. Subtests in extremum problems are assumed to be continuous, Lipschitzian, multiextremum and maybe not everywhere differentiable functions. The search for global solutions is conducted using new hybrid algorithms that combine a stochastic algorithm for scanning the variables space and deterministic local search methods. The study gives numerical examples of solving the problems of global nondifferentiable minimization of the maximum systems eigenvalues.

Keywords*: eigenvalue, algebraic multiplicity, Lipschitz condition, smoothing approximation, global optimization, Metropolis algorithm, hybrid algorithm.*

REFERENCES

[1] Prieto-Martinez P.D., Román-Roy N. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011, vol. 44, no. 38. DOI 10.1088/1751-8113/44/38/385203

[2] Havelková M. *Communications in Mathematics*, 2012, vol. 20, no. 1, pp. 22–32.

[3] Mestdag T., Sarlet W., Crampin M. *Differential Geometry and its Applications*, 2011, vol. 29, suppl. 1, pp. S156–S163.

[4] Musielak Z.E., Roy D., Swift L.D. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 38, no. 3, pp. 894–902.

[5] El-Nabusi R.A. *Canadian Journal of Physics*, 2014, vol. 93, no. 1, pp. 55–67. DOI 10.1139/cjp-2014-0233

[6] Sabattini L., Secchi C., Chopra N. *Asian Journal of Control*, 2014, vol. 17, no. 1, pp. 111–123.

[7] Cresson J., Greff I. *Journal of Mathematical Analysis*, 2011, vol. 384, no. 2, pp. 626–646.

[8] Gonçalves P. *System Dynamics Review*, 2009, vol. 25, no. 1, pp. 35–62.

[9] Pozhalostin A.A., Goncharov D.A., Kokushkin V.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2014, no. 5, pp. 109–116.

[10] Huijberts H., Michiels W., Nijmeijer H. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2009, vol. 8, no. 1, pp. 1–20.

[11] Sulimov V.D., Shkapov P.M., Bondarenko N.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2016, no. 2, pp. 65–78. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-65-78

[12] Embree M., Lehoucq R.B. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2009, vol. 47, no. 2, pp. 1445–1473.

[13] Liu S.-T., Luo X.-L. *Linear Algebra and its Applications*, 2010, vol. 432, no. 7, pp. 1851–1863.

[14] Mengi E., Yildirim E.A., Kiliç M. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2014, vol. 35, no. 2, pp. 699–724.

[15] Lippert R.A. *Linear Algebra and its Applications*, 2010, vol. 432, no. 7, pp. 1785–1817.

[16] Mengi E. *Numerische Mathematik*, 2011, vol. 118, no. 1, pp. 109–135.

[17] Alam R., Bora S. *Linear Algebra and its Applications*, 2005, vol. 396, pp. 273–301.

[18] Wilkins A.K., Tidor B., White J., Barton P.I. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, vol. 31, no. 4, pp. 2706–2732.

[19] Palej R., Krowiak A. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, vol. 49, no. 2, pp. 343–354.

[20] Tang P.T.P., Polizzi E. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2014, vol. 35, no. 2, pp. 354–390.

[21] Floudas C.A., Gounaris C.E. *Journal of Global Optimization*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 3–38.

[22] Karpenko A.P. *Sovremennye algoritmy poiskovoy optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennye prirodoy* [Modern search optimization algorithms. Algorithms inspired by nature]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 446 p.

[23] Rios-Coelho A.C., Sacco W.f., Henderson N. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, vol. 217, no. 2, pp. 843–885.

[24] Voglis C., Parsopoulos K.E., Papageorgiou D.G., Lagaris I.E., Vrahatis M.N. *Computer Physics Communications*, 2012, vol. 183, no. 2, pp. 1139–1154.

[25] Gil C., Márques A., Baños R., Montoya M.G., Gómez J. *Journal of Global Optimization*, 2007, vol. 38, no. 2, pp. 265–281.
[26] Sulimov V.D., Shkapov P.M. *Journal of Mechanics Engineering and Automation*, 2012, vol. 2, no. 3, pp. 190–196.
[27] Bagirov A.M., Al Nuaimat A., Sultanova N. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 2013, vol. 62, no. 16, pp. 759–782.
[28] Luz E.F.P., Becceneri J.C., de Campos Velho H.F. *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, 2008, vol. 1, pp. 3–10.
[29] Sulimov V.D., Shkapov P.M. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3, pp. 68–88.
[30] Sulimov V.D., Shkapov P.M. *Journal of Mechanics Engineering and Automation*, 2012, vol. 2, no. 12, pp. 734–741.

Sulimov V.D., Assist. Professor of Theoretical Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 60 research papers in the field of mathematical modeling and dynamic systems optimization. e-mail: spm@bmstu.ru

Shkapov P.M., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 100 publications on dynamics, optimization and diagnostics of mechanical and hydro-mechanical systems.
e-mail: spm@bmstu.ru

Goncharov D.A., Assist. of Theoretical Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 10 publications in the field of hydrodynamics and dynamics of spacecraft. e-mail: goncharov@bmstu.ru