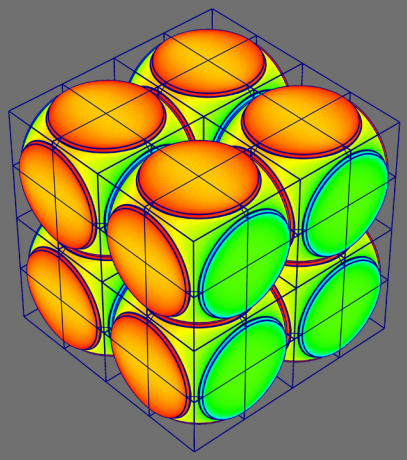
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Тимофеев В. Н. Построение полубесконечного эквивалентного тела при математическом моделировании дозвукового отрывного осесимметричного обтекания. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №4 (12), с. 67-83

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/118/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.114
23.01.2026 14:59:53

УДК 531.6.011.32:532.582.4:517.958
DOI 10.18698/2309-3684-2016-4-6783

Построение полубесконечного эквивалентного тела при математическом моделировании дозвукового отрывного осесимметричного обтекания

© В.Н. Тимофеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Проведено математическое моделирование процесса отрывного обтекания осесимметричных тел при дозвуковых скоростях набегающего потока на основе концепции вязко-невязкого взаимодействия. Скорости и давления на поверхности исследуемого тела найдены по результатам расчета невязкого обтекания некоторого эквивалентного тела. Влияние спутного следа смоделировано хвостовым участком эквивалентного тела. Вместо хвостовых участков конечной длины были рассмотрены полубесконечные хвостовые участки эквивалентного тела. Изучены режимы течения с отрывом потока в донной области. Для численного моделирования использован метод дискретных вихрей. Донное давление найдено по формуле Хорнера. Проведено математическое моделирование обтекания цилиндрических тел с головной частью оживальной формы.

Ключевые слова: *математическое моделирование, дозвуковое отрывное обтекание, концепция вязко-невязкого взаимодействия, эквивалентное тело, метод дискретных вихрей, донное давление.*

Введение. В исследованиях, базирующихся на концепции вязко-невязкого взаимодействия [1, 2], давление на поверхности тела, обтекаемого потоком вязкой среды, должно определяться по результатам расчета невязкого обтекания некоторого эквивалентного тела, называемого также телом вытеснения. Реализация концепции вязко-невязкого взаимодействия в полном объеме требует больших вычислительных ресурсов. Для снижения трудоемкости вычислений в работе [3] была предложена методика математического моделирования пространственного обтекания тел дозвуковым потоком газа, основанная на сочетании численного и физического экспериментов. Данная методика затем была применена к изучению дозвукового отрывного обтекания осесимметричных тел [4] с использованием эквивалентного тела конечных размеров. В данной статье предлагается иной вариант построения эквивалентного тела.

Рассмотрим режимы обтекания, при которых область отрыва потока расположена в окрестности донного среза. Например, при осесимметричном обтекании можно считать, что линия отрыва потока L_0 совпадает с контуром донного среза $L_д$ (рис. 1). Передний участок $\sum_1$ поверхности эквивалентного тела, простирающийся вниз по потоку от носовой оконечности обтекаемого тела, за линией стыков-

ки L_c дополняется хвостовым участком Σ_2, моделирующим влияние спутного следа. В совокупности два указанных участка образуют поверхность эквивалентного тела $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

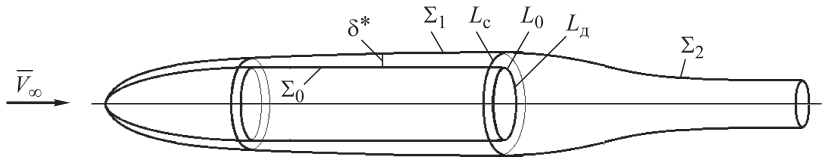


Рис. 1. Конфигурация обтекаемого и эквивалентного тел

Для построения переднего участка Σ_1 эквивалентного тела необходимо сместить соответствующие точки поверхности Σ_0 обтекаемого тела в направлении нормали к Σ_0 на расстояния, равные толщине δ^* вытеснения пограничного слоя. При этом точки, принадлежащие линии стыковки L_c, также окажутся смещенными на расстояния, равные δ^*, от соответствующих точек линии отрыва потока L_0.

Тогда, как следует из теории пограничного слоя, давление в произвольной точке поверхности Σ_0 обтекаемого тела должно равняться давлению в соответствующей точке переднего участка Σ_1 поверхности эквивалентного тела. Распределение давления на поверхности переднего участка эквивалентного тела следует находить с учетом формы поверхности хвостового участка. Поскольку указанная форма заранее неизвестна, возникает необходимость задавать конфигурацию поверхности Σ_2 в первом приближении, а затем проводить многоступенчатый итерационный цикл расчетов для уточнения координат точек, принадлежащих поверхности эквивалентного тела.

Одна из ступеней указанного цикла — процедура определения формы хвостового участка эквивалентного тела при заданной конфигурации его переднего участка, она достаточно трудоемкая. Например, в работе [5] в точках, расположенных на поверхности хвостового участка, минимизируется сумма квадратов разностей между скоростями внешнего невязкого потока, обтекающего эквивалентное тело, и скоростями на внешней границе спутного следа. Последние следует определять методами теории струй и следов вязкой жидкости или вязкого газа [6]. Минимизация указанного функционала требует выполнения дополнительного набора итерационных процедур, что, в свою очередь, обуславливает сложность используемых алгоритмов, затраты больших вычислительных ресурсов и существенные трудно-

сти при реализации концепции вязко-невязкого взаимодействия в полном объеме.

Возможные способы снижения трудоемкости расчетов состоят в следующем. Во многих прикладных задачах значения чисел Рейнольдса, рассчитанные по скорости набегающего потока, превышают величину 10^6. Для таких значений чисел Рейнольдса величины δ^* толщин вытеснения пограничного слоя малы по сравнению с поперечными размерами хорошо обтекаемых тел. Данное обстоятельство позволяет не осуществлять поправку на малые толщины вытеснения. По этой причине для режимов течения с линией отрыва потока, близкой к контуру донного среза, поверхность Σ_1 переднего участка эквивалентного тела можно считать совпадающей с поверхностью Σ_0 обтекаемого тела (рис. 2).

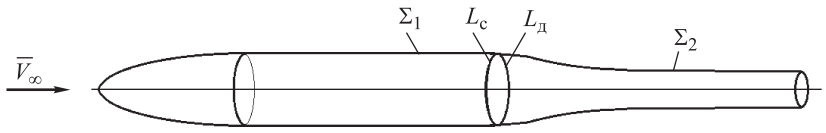


Рис. 2. Эквивалентное тело с полубесконечным хвостовом участком

Такой прием позволяет лишь частично снизить трудоемкость расчетов и не избавляет от необходимости проведения многоступенчатых итерационных процедур, необходимых для определения геометрической формы хвостового участка эквивалентного тела.

Вместе с тем для многих практически важных приложений основной задачей является получение распределения скорости и давления на поверхности обтекаемого тела, а не характеристик собственно спутного следа или других аэрогазодинамические параметров. В этом случае целесообразно отказаться от расчетного построения поверхности хвостового участка эквивалентного тела и задавать форму указанного участка априорно, принимая во внимание имеющиеся в литературных источниках данные и ряд дополнительных положений. В рамках такого подхода задачу обтекания тела вытеснения внешним невязким потоком можно рассматривать как приближенное решение задачи о дозвуковом отрывном обтекании исходного тела заданной формы.

Согласно рекомендациям работы [5] эквивалентное тело должно представлять собой полубесконечное тело вытеснения, у которого в сечении хвостового участка поперечный размер по мере удаления вниз по потоку от донного среза обтекаемого тела плавно изменяется и на бесконечности достигает некоторого конечного значения. Такая форма эквивалентного тела рассматривается в данной работе, в отли-

чие от предлагавшейся ранее [7] конфигурации с хвостовым участком конечной длины (рис. 3).

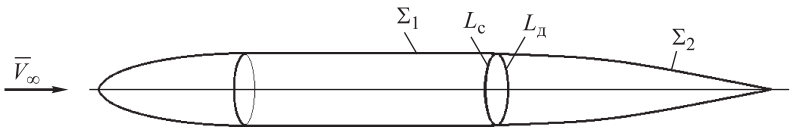


Рис. 3. Эквивалентное тело с хвостовым участком конечной длины

Выбор формы эквивалентного тела с хвостовым участком бесконечной длины более предпочтителен, если в дальнейшем в рамках математического моделирования не исключено проведение итерационных процедур определения геометрической формы данного участка. Поэтому математическое моделирование невязкого обтекания эквивалентного тела с хвостовым участком бесконечной длины можно рассматривать не только как приближенное решение задачи о дозвуковом отрывном обтекании исходного тела заданной формы, но и как важный этап проведения вычислений при реализации концепции вязко-невязкого взаимодействия в полном объеме. При этом в первом приближении, когда форма хвостового участка заранее неизвестна, выбор такой формы становится неотъемлемой составной частью решения задачи об отрывном обтекании тел.

Математическая модель и алгоритм решения. Рассмотрим умеренные дозвуковые скорости набегающего потока газа и установившееся движение среды, которая считается несжимаемой, однородной и невесомой жидкостью. Динамику среды опишем системой, состоящей из уравнения неразрывности и уравнений движения в форме Эйлера [8–10]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}, \end{cases} \tag{1}$$

где u, v, w — координаты вектора $\overline{V}$ скорости частиц среды, определяемые в декартовой системе координат, связанной с обтекаемым телом; p — статическое давление; ρ — плотность.

Поскольку используем декартову систему координат, связанную с обтекаемым телом, то граничное условие непротекания поверхности эквивалентного тела запишем в следующем виде:

$$\bar{V}(M_0)\bar{n}(M_0)\big|_{\Sigma} = 0, \tag{2}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка на поверхности Σ; $\bar{n}(M_0)\big|_{\Sigma}$ — орт вектора нормали к указанной поверхности.

В соответствии с граничным условием затухания возмущений вектор скорости частиц среды $\bar{V}(M_0) = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$ должен стремиться на бесконечности (при $M_0 \to \infty$ или $R = \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2} \to \infty$) к вектору скорости набегающего потока

$$\bar{V}_{\infty} = u_{\infty}\bar{i} + v_{\infty}\bar{j} + w_{\infty}\bar{k}.$$

Предполагается, что вне поверхности эквивалентного тела течение является потенциальным, поэтому вектор возмущенной скорости, равный разности $\bar{V}(M_0) - \bar{V}_{\infty}$, считается равным градиенту потенциала $\varphi(M_0)$ возмущенных скоростей, а вектор скорости потока находится по формуле

$$\bar{V}(M_0) = \bar{V}_{\infty} + \nabla\varphi(M_0), \tag{3}$$

где $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x_0}\bar{i} + \dfrac{\partial}{\partial y_0}\bar{j} + \dfrac{\partial}{\partial z_0}\bar{k}$ — оператор Гамильтона [11].

После определения потенциала $\varphi(M_0)$, вектора скорости $\bar{V}(M_0)$ и его модуля статическое давление может быть найдено с помощью интеграла Бернулли.

Для несжимаемой среды уравнение неразрывности записывается в виде $\operatorname{div}\bar{V} = 0$. После замены вектора скорости потока выражением, равным правой части равенства (3), уравнение неразрывности преобразовалось в соотношение $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0$, представляющее собой уравнение Лапласа относительно потенциала возмущенных скоростей $\Delta\varphi = 0$, где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_0{}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y_0{}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z_0{}^2}$ — оператор Лапласа.

Подстановка указанного выражения в условие непротекания (2) позволило получить равенство вида

$$((\bar{V}_{\infty} + \operatorname{grad}\varphi)\bar{n}(M_0))\big|_{\Sigma} = 0.$$

Наличие взаимосвязи между градиентом и производной по направлению нормали

$$(\operatorname{grad}\varphi\,\overline{n}(M_0)\big|_\Sigma = \left.\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial n}\right|_\Sigma$$

дало возможность сформулировать граничное условие для уравнения Лапласа, определяющее нормальную производную потенциала возмущенных скоростей на поверхности эквивалентного тела:

$$\left.\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial n}\right|_\Sigma = -\overline{V}_\infty\overline{n}(M_0)\big|_\Sigma. \tag{4}$$

В свою очередь, в соответствии с граничным условием затухания возмущений потенциал возмущенных скоростей $\varphi(M_0)$ и его градиент на бесконечности должны стремиться к нулю.

Таким образом, потенциал возмущенных скоростей должен быть решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi(M_0) = 0; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial n}\right|_\Sigma = -\overline{V}_\infty\overline{n}(M_0)\big|_\Sigma; \tag{6}$$

$$\varphi(M_0) \to 0, M_0 \to \infty; \tag{7}$$

$$\nabla\varphi(M_0) \to 0, M_0 \to \infty. \tag{8}$$

Внешняя задача Неймана имеет единственное решение, которое запишем в виде потенциала двойного слоя

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\overline{r}\cdot\overline{n}(M)}{r^3} g(M)\,d\Sigma, \tag{9}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, в которой вычисляется потенциал возмущенных скоростей и скорость потока; $\overline{r}$ — вектор, соединяющий точку M с точкой M_0; $\overline{n}(M)$ — орт вектора нормали к поверхности Σ; $g(M)$ — поверхностная плотность потенциала двойного слоя, определяемые в точке $M(x, y, z)$, расположенной на элементе поверхности $d\Sigma$; r — модуль указанного вектора, вычисляемый по формуле $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

Потенциал двойного слоя является решением уравнения Лапласа (5) и удовлетворяет граничным условиям (7), (8) затухания возмущений на бесконечности. Для выполнения граничного условия непротекания (6) поверхностная плотность $g(M)$ потенциала двойного слоя должна являться решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial n}\int_{\Sigma}\left(\frac{\overline{r}\cdot\overline{n}(M)}{r^3}\right)g(M)d\Sigma\right)\Bigg|_{M_0}=-\overline{V}_{\infty}\overline{n}(M_0).$$

Здесь M_0 — текущая точка, принадлежащая поверхности Σ; $\partial/(\partial n)$ — нормальная производная, которую следует понимать в смысле, определенном в работе [8].

Поверхностная плотность потенциала двойного слоя находим с помощью численного моделирования. Для этого поверхность $\sum$ эквивалентного тела аппроксимируем конечным числом панелей Σ_k; $k=1,...,N$, причем панели имеют форму многоугольников. Число сторон k-го многоугольника обозначим через T_k, а суммарное число панелей, аппроксимирующих поверхность $\sum$, — через N. В настоящей статье рассматриваем эквивалентное тело с полубесконечным хвостовым участком. Предполагается, что на некотором удалении вниз по потоку от донного среза поперечное сечение поверхности $\sum_2$ хвостового участка будет сохранять постоянную форму и размеры. По этой причине у некоторых из многоугольников Σ_k одна из сторон расположена на бесконечном удалении вниз по потоку от обтекаемого тела. На каждой из панелей Σ_k поверхностная плотность потенциала двойного слоя $g(M)$ считается постоянной и равной величине g_k, $k=1,...,N$.

Свойство линейности градиента, а также свойства аддитивности и линейности поверхностного интеграла позволили представить в следующем виде формулу для вычисления потенциала возмущенных скоростей [11]:

$$\varphi(M_0)=\sum_{k=1}^{N}g_k\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_k}\frac{\overline{r}\cdot\overline{n}(M)}{r^3}d\Sigma$$

и формулу для вычисления скорости потока

$$\overline{V}(M_0)=\overline{V}_{\infty}+\sum_{k=1}^{N}g_k\left(\frac{1}{4\pi}\nabla\int_{\Sigma_k}\frac{\overline{r}\cdot\overline{n}(M)}{r^3}d\Sigma\right). \qquad (10)$$

Градиент потенциала двойного слоя, имеющего постоянную поверхностную плотность g_k на панели Σ_k, равен скорости, индуцированной замкнутой вихревой нитью L_k, расположенной на границе $\partial\Sigma_k$ указанной панели, при условии, что циркуляция Γ_k этой вихревой нити равняется величине $-g_k$ [10]. Скорость, индуцированную

замкнутой вихревой нитью, можно определить с помощью формулы Био—Савара. Тогда градиент потенциала двойного слоя панели Σ_k с постоянной поверхностной плотностью g_k представим следующим образом:

$$\frac{g_k}{4\pi}\nabla\int\limits_{\Sigma_k}\frac{\overline{r}\cdot\overline{n}(M)}{r^3}\,d\Sigma=\frac{\Gamma_k}{4\pi}\int\limits_{L_k}\frac{d\overline{s}\times\overline{r}}{r^3}.$$

После введения в рассмотрение вектора функции скорости, равного вектору скорости, индуцированной в точке M_0 k-й вихревой нитью L_k с единичной циркуляцией,

$$\overline{w_k}(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{L_k}\frac{d\overline{s}\times\overline{r}}{r^3},$$

формулу (10) преобразуем к виду:

$$\overline{V}(M_0)=\overline{V}_\infty+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\,\overline{w_k}(M_0). \qquad (11)$$

Это позволяет применить метод дискретных вихрей [12]. Каждый вихревой многоугольник L_k, $k=1,...,N$, расположенный на границе панели Σ_k, был составлен из вихревых отрезков $L_{k\,j}$, $j=1,...,T_k$, где T_k — число сторон данного многоугольника. Вектор $\overline{w_k}\left(M_0\right)$ функции скорости этого вихревого многоугольника $L_k=\bigcup\limits_{j=1}^{T_j}L_{k\,j}$ находим как сумму векторов $\overline{w_{k\,j}}\left(M_0\right)$ функций скорости составляющих его вихревых отрезков

$$\overline{w_k}\left(M_0\right)=\sum_{j=1}^{T_k}\overline{w_{k\,j}}\left(M_0\right).$$

Для нахождения $\overline{w_{k\,j}}\left(M_0\right)$, кроме координат точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, зафиксируем известные после построения вихревых многоугольников координаты точек начала $A_{1k\,j}$ и конца $A_{2k\,j}$ вихревого отрезка $L_{k\,j}$. Во избежание громоздкости записи не указываем индексы $k\,j$ у этих точек и связанных с ними объектов. После определения координат радиусов-векторов $\overline{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$, $\overline{r}_1=\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}=\overline{r}_2$ найдем координаты вектора $\overline{r}_{12}=\overrightarrow{A_1A_2}$ и его вспомогательных векторов $\overline{r}_{10}=\overrightarrow{A_1M_0}$,

$\overline{r}_{20} = \overrightarrow{A_2 M_0}$. Затем с помощью интегрирования по формуле Био — Савара [13] получим вектор функции скорости вихревого отрезка

$$\overline{W_{kj}}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{L_{kj}} \frac{\overline{ds} \times \overline{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\overline{r}_{12} \times \overline{r}_{10}}{r_{12}^2 r_{10}^2 - \left(\overline{r}_{12} \cdot \overline{r}_{10}\right)^2} \left(\frac{\overline{r}_{12}\,\overline{r}_{10}}{r_{10}} - \frac{\overline{r}_{12}\,\overline{r}_{20}}{r_{20}} \right),$$

где r_{10}, r_{12} и r_{20} — модули соответствующих векторов.

На границах тех панелей Σ_k, одна из сторон которых расположена на бесконечном удалении вниз по потоку от обтекаемого тела, разместим вихревые многоугольники, в которых два вихревых отрезка являются полубесконечными. Векторы функции скорости этих вихревых отрезков находим из выражений для векторов функций скорости вихревых отрезков конечной длины с помощью предельного перехода, при котором начало или конец соответствующего вихревого отрезка устремлены в бесконечность.

Для определения неизвестных циркуляций Γ_k, $k = 1, ..., N$ необходимо, чтобы граничные условия непротекания поверхности эквивалентного тела $\sum$ выполнялись в контрольных точках C_ν, $\nu = 1, ..., N$, расположенных в геометрических центрах панелей $\sum_\nu$. В контрольных точках нормальные производные потенциала двойного слоя непрерывны, поэтому с учетом соотношений $\dfrac{\partial \varphi(C_\nu)}{\partial n} = (\overline{V}(C_\nu) - \overline{V}_\infty) \cdot \overline{n}(C_\nu) =$ $= \sum\limits_{k=1}^{N} \Gamma_k \overline{w_k}(C_\nu) \cdot \overline{n}(C_\nu)$ граничное условие непротекания представим в виде:

$$\sum_{k=1}^{N} \Gamma_k (\overline{w_k}(C_\nu) \cdot \overline{n}(C_\nu)) = -\overline{V}_\infty \cdot \overline{n}(C_\nu), \ \ \nu = 1, ..., N, \tag{12}$$

где $\overline{n}(C_\nu)$ — орт вектора нормали к панели Σ_k в контрольной точке C_ν.

В соответствии с равенствами (12) циркуляции Γ_k определим из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} a_{\nu k} \Gamma_k = b_\nu, \ \ \nu = 1, ..., N, \tag{13}$$

в которой вычислим коэффициенты и правые части

$$a_{\nu k} = \overline{w_k}(C_\nu) \cdot \overline{n}(C_\nu), \quad \nu = 1, ..., N; \quad k = 1, ..., N;$$

$$b_\nu = -\overline{V}_\infty \cdot \overline{n}(C_\nu), \quad \nu = 1, ..., N.$$

При проведении вычислений методом дискретных вихрей для замкнутых поверхностей матрица, составленная из коэффициентов $a_{\nu k}$, получается вырожденной, поэтому систему (13) решаем, используя регуляризирующую переменную [14].

После нахождения неизвестных циркуляций Γ_k скорость потока в точках, расположенных вне поверхности тела, определяем из соотношения (11), которое было получено из формулы (3), где вектор скорости потока содержит слагаемое, равное градиенту потенциала возмущенных скоростей. В дальнейшем потенциал возмущенных скоростей определим как потенциал двойного слоя, поэтому в контрольных точках, лежащих на поверхности тела, вектор скорости как градиент потенциала двойного слоя должен испытывать разрыв

$$\overline{\Delta V(C_\nu)} = \frac{\partial g(C_\nu)}{\partial \tau_1}\overline{\tau_1(C_\nu)} + \frac{\partial g(C_\nu)}{\partial \tau_2}\overline{\tau_2(C_\nu)}. \tag{14}$$

При этом частные производные $\dfrac{\partial g(C_\nu)}{\partial \tau_1}$ и $\dfrac{\partial g(C_\nu)}{\partial \tau_2}$ должны вычисляться по направлениям двух неколлинеарных ортов $\overline{\tau_1(C_\nu)}$ и $\overline{\tau_2(C_\nu)}$, лежащих в касательной плоскости, проходящей через контрольную точку C_ν. Поскольку на каждой панели Σ_ν поверхностная плотность $g(C_\nu)$ постоянна и равна величине $(-\Gamma_\nu)$, в формуле (14) частные производные определяем численным дифференцированием по значениям циркуляций ν-го и соседних с ним вихревых многоугольников. После процедуры вычисления значений указанных частных производных и нахождения векторов $\overline{\Delta V(C_\nu)}$ скорость потока в контрольных точках определяем как предельное значение градиента потенциала двойного слоя

$$\bar{V}(C_\nu) = \bar{V}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \overline{w_k(C_\nu)} + \frac{1}{2}\overline{\Delta V(C_\nu)}.$$

Статическое давление находим из интеграла Бернулли:

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty (V_\infty^2 - V^2), \tag{15}$$

где V — модуль вектора скорости в рассматриваемой точке течения; V_∞ — модуль вектора скорости набегающего потока. В заключение определим безразмерные коэффициенты давления $c_p = 2(p - p_\infty)/$ $/(\rho_\infty V_\infty^2)$, рассчитываемые в соответствии с интегралом Бернулли по формуле

$$c_p = 1 - (V / V_\infty)^2. \qquad (16)$$

Результаты математического моделирования. Наиболее существенным отличием численных исследований, выполненных в данной статье, является моделирование влияния спутного следа хвостовым полубесконечным участком эквивалентного тела, а не хвостовым участком конечной длины [3, 4, 7].

Как и в указанных работах, изучено обтекание осесимметричных тел при нулевом угле. При таких условиях эквивалентное тело оказалось осесимметричным (рис. 4).

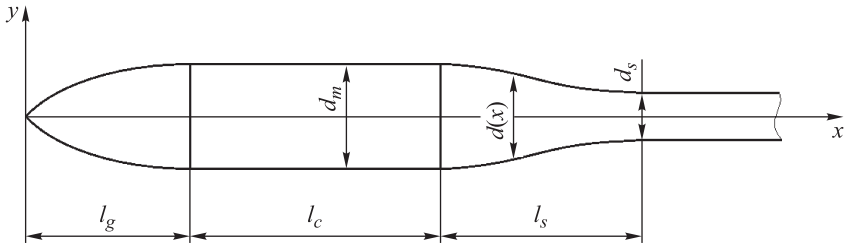


Рис. 4. Геометрические размеры эквивалентного тела

Исследуем обтекание цилиндрических тел, снабженных головными частями оживальной формы. Характерным линейным размером считается диаметр миделевого сечения цилиндрической части d_m. Длину головной оживальной части обтекаемого тела обозначим через l_g, а основной цилиндрической части — через l_c. Суммарная длина обтекаемого тела l_b равна сумме $l_g + l_c$.

Как было указано во введении, в случае полубесконечного хвостового участка его поперечный размер по мере удаления вниз по потоку от донного среза обтекаемого тела должен плавно изменяться, достигая на бесконечности некоторого конечного значения. Для сокращения количества вихревых многоугольников, используемых при численном моделировании, целесообразно считать, что на длине l_s, отсчитываемой вниз по потоку от донного среза обтекаемого тела, диаметр хвостового участка $d(x)$ уменьшается пропорционально косинусу разности $x - l_b$ от значения, равного диаметру миделевого сечения d_m, до величины d_s, которая остается постоянной при дальнейшем увеличении координаты x, т. е. изменяется по закону

$$d(x) = d_m - (d_m - d_s)\cos(\pi(x - l_b)/l_s).$$

Данный подход позволил охарактеризовать форму полубесконечного хвостового участка эквивалентного тела всего двумя пара-

метрами: минимальным диаметром d_s и длиной l_s, которую можно трактовать как характерный размер хвостового участка такой конфигурации.

На рис. 5 представлено пространственное изображение эквивалентного тела, построенного для следующих значений геометрических параметров: $l_g = d_m$; $l_c = 3d_m$; $l_s = 2,65\,d_m$ и $d_0 = 0,3\,d_m$.

Кольцевой контур линии донного среза обтекаемого тела имеет большую толщину, чем линии, изображающие вихревые многоугольники. Часть поверхности полубесконечного хвостового участка, имеющая постоянный диаметр d_s и расположенная вниз по потоку от крайнего правого сечения, на рис. 5 не показана.

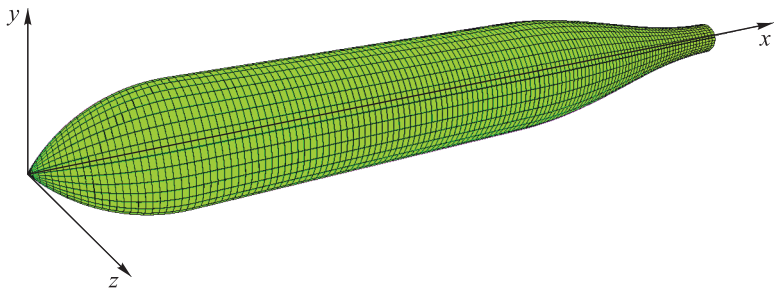


Рис. 5. Конфигурация эквивалентного тела с полубесконечным хвостовым участком

Для получения замкнутой расчетной методики эти параметры l_s и d_s определим следующим образом. При известном значении минимального диаметра d_s использование формулы Хорнера [15] и приемов, описанных в работе [16], позволяет найти параметр l_s как функцию суммарной длины обтекаемого тела l_b и числа Рейнольдса Re, определяемого по скорости набегающего потока и по длине l_b. В свою очередь, диаметр d_s рассматривается как размер эквивалентного тела на бесконечности, что позволяет выразить его [5] через аэродинамический коэффициент суммарного сопротивления, составляющими которого являлись коэффициенты сопротивления давления и трения, а также коэффициент донного сопротивления.

Проведенные расчеты показали, что в исследованных диапазонах значений $l_b = 4\ldots12$ и $\mathrm{Re} = 10^6 \ldots 2\cdot10^7$ можно приближенно принять минимальный диаметр $d_s = 0,3$.

На рис. 6 и 7 представлены распределения безразмерной скорости $\overline{v} = v / V_\infty$ по поверхности эквивалентного тела бесконечным хвостовым участком и хвостовыми участками конечной длины ($l_g = d_m$; $l_c = 3d_m$; $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$).

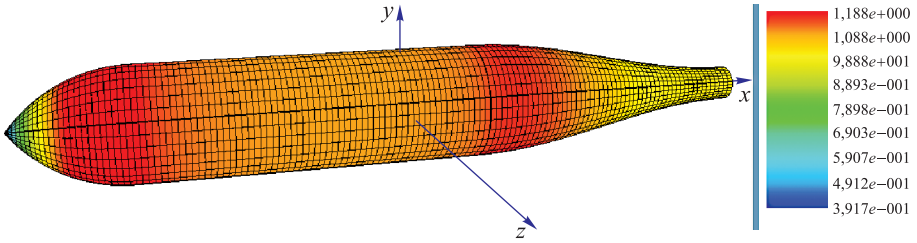


Рис. 6. Распределение безразмерной скорости $\overline{v} = v / V_\infty$ по поверхности эквивалентного тела с бесконечным хвостовым участком

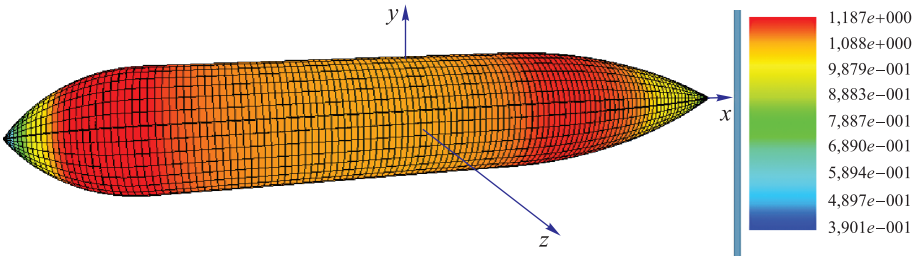


Рис. 7. Распределение безразмерной скорости $\overline{v} = v / V_\infty$ по поверхности эквивалентного тела с хвостовым участком конечной длины

Сравнение распределений безразмерных модулей скорости и коэффициента давления с аналогичными распределениями, полученными для эквивалентных тел с хвостовыми участками конечной длины, показало, что на поверхности обтекаемых тел они мало отличаются друг от друга. В то же время на поверхностях хвостовых участков указанные распределения оказываются качественно различными. На полубесконечных хвостовых участках отсутствуют зоны, в которых значения модуля скорости приближаются к нулю. Это делает вариант методики математического моделирования дозвукового отрывного обтекания тел с применением эквивалентного тела, имеющего полубесконечный хвостовой участок, более удобным в тех случаях, когда в дальнейшем не исключена реализация концепции вязко-невязкого взаимодействия в полном объеме.

На рис. 8 представлено распределение коэффициента давления c_p по поверхности эквивалентного тела с бесконечным хвостовым участком ($l_g = d_m$; $l_c = 3d_m$; $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$).

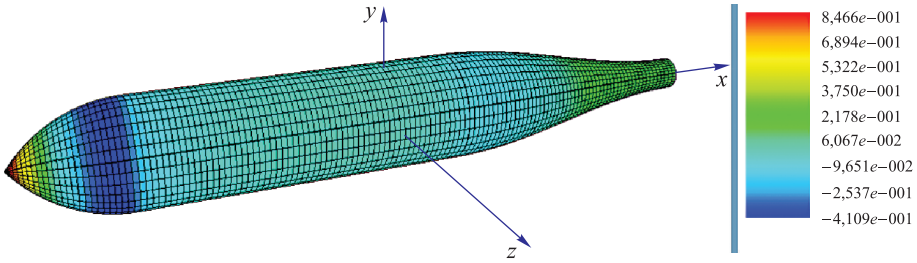


Рис. 8. Распределение коэффициента давления c_p по поверхности эквивалентного тела с бесконечным хвостовым участком

В качестве иллюстрации на рис. 9 и 10 представлены распределения безразмерной скорости $\bar{v} = v / V_\infty$ и коэффициента давления c_p по поверхности тел, у которых длина головной оживальной части $l_g = d_m$ сохраняется постоянной, а длина основной цилиндрической части — варьируется. По оси абсцисс отложены значения безразмерной продольной координаты $\bar{x} = x / d_m$. Число Рейнольдса равно $5 \cdot 10^6$.

Безразмерным значениям суммарных длин обтекаемых тел $\bar{l}_b = l_b / d_m$, равных 6, 8, 10 и 12, на рис. 9 и 10 соответствуют линии *1*, *2*, *3* и *4*.

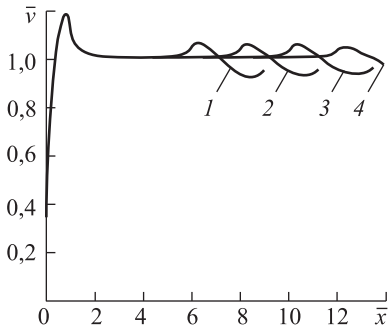


Рис. 9. Зависимость безразмерной скорости $\bar{v}$ на поверхности эквивалентного тела от безразмерной продольной координаты $\bar{x}$ и безразмерной длины обтекаемого тела $\bar{l}_b$:

1 — $\bar{l}_b = 6$; *2* — $\bar{l}_b = 8$; *3* — $\bar{l}_b = 10$; *4* — $\bar{l}_b = 12$

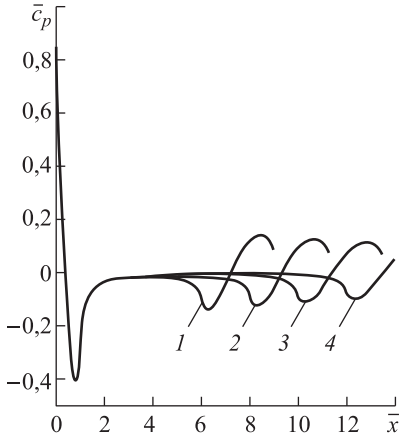


Рис. 10. Зависимость коэффициента давления c_p на поверхности эквивалентного тела от безразмерной продольной координаты $\bar{x}$ и безразмерной длины обтекаемого тела $\bar{l}_b$:

1 — $\bar{l}_b = 6$; *2* — $\bar{l}_b = 8$; *3* — $\bar{l}_b = 10$; *4* — $\bar{l}_b = 12$

Выводы. Предложен вариант методики математического моделирования дозвукового отрывного обтекания тел с применением эквивалентного тела, имеющего хвостовой участок бесконечной длины. Указаны пути определения параметров, характеризующих конфигурацию такого эквивалентного тела. Представленный подход позволяет расширить сферу применения разработанной ранее методики, так как делает ее более удобной при реализации концепции вязко-невязкого взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гогиш А.В., Степанов Г.Ю. *Турбулентные отрывные течения.* Москва, Наука, 1979, 368 с.

[2] Плюснин А.В. Моделирование внутреннего и внешнего нестационарного взаимодействия корпуса летательного аппарата с жидкостью методом граничных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 77–100.

[3] Тимофеев В.Н. Математическое моделирование дозвукового пространственного обтекания тел. *Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях: Сб. трудов Междунар. науч. конф., посвящ. 180-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, с. 198–202.

[4] Тимофеев В.Н., Бушуев А.Ю. Математическое моделирование дозвукового обтекания тел с отрывом потока в донной области. *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2012, № 1 (64), вып. 2, с. 11–14.

[5] Гогиш А.В., Степанов Г.Ю. *Отрывные и кавитационные течения*. Москва, Наука, 1990, 384 с.

[6] Гиневский А.С. *Теория турбулентных струй и следов*. Москва, Машиностроение, 1969, 400 с.

[7] Тимофеев В.Н., Бушуев А.Ю. Численное моделирование дозвукового отрывного обтекания осесимметричных тел. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/967.html

[8] Соболев С.Л. *Уравнения математической физики.* Москва, Наука, 1992, 432 с.

[9] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[10] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Наука, 1987, 676 с.

[11] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 367 с.

[12] Белоцерковский С.М., Ништ Н.И. *Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью*. Москва, Наука, 1978, 352 с.

[13] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. Москва ТОО «Янус», 1995, 520 с.

[14] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике*. Москва, Наука, 1985, 256 с.

[15] Hoerner S.F. Base Drag and Thick Trailing Edges. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1950, vol. 17, no. 10, pp. 622–628.

[16] Тимофеев В.Н. Математическое моделирование отрывного дозвукового обтекания осесимметричных тел с учетом донного давления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 10.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1246.html

Статья поступила в редакцию 05.12.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Тимофеев В.Н. Построение полубесконечного эквивалентного тела при математическом моделировании дозвукового отрывного осесимметричного обтекания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4 (12), с. 67–83.

Тимофеев Валерий Николаевич, канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных и методических работ. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, механика жидкости и газа, аэродинамика, численные методы, методы оптимизации. e-mail: v_n_1951@mail.ru

Construction of a semi-infinite equivalent body in mathematical modeling of subsonic separated axisymmetric flow

© V.N. Timofeev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The purpose of the work was to do mathematical modeling of axisymmetric body separation flow at subsonic velocities of incident flow. In our research we used the concept of viscous-inviscid interaction. We found velocities and pressures on the surface of the body under study according to the results of calculating of some equivalent body inviscid flow. The wake turbulence effect was simulated by the tailed section of the equivalent body. We examined the semi-infinite tailed sections of the equivalent body instead of the tailed sections of finite length. Moreover, we studied flow separation conditions in the base region. For the numerical simulation we used the discrete vortex method. The base pressure was found by Horner formula. We carried out mathematical modeling of the flow around cylindrical bodies with the head part of the ogival form.

***Keywords**: mathematical modeling, subsonic separation flow, concept of viscous-inviscid interaction, equivalent body, discrete vortex method, base pressure.*

REFERENCES

[1] Gogish A.V., Stepanov G.Yu. *Turbulentnye otryvnye techeniya* [Turbulent separated flows]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 368 p.

[2] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 77–100.

[3] Timofeev V.N. Matematicheskoe modelirovanie dozvukovogo prostranstvennogo obtekaniya tel [Mathematical modeling of subsonic spatial body flow]. *Aktualnye napravleniya razvitiya prikladnoi matematiki v energetike, ener-*

goeffektivnosti i informatsionno-kommunikatsionnykh tekhnologiyakh: Sbornik trudov mezhdunar. nauch. konf., posvyashch. 180-letiyu MGTU im. N.E. Baumana [Topical areas of applied mathematics in the energy sector, energy and information and communication technologies: coll. pap. of the international scientific conference dedicated to the 180th anniversary of Bauman Moscow State Technical University]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, pp. 198–202.

[4] Timofeev V.N., Bushuev A.Yu. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta — Vestnik Saratov State Technical University*, 2012, no. 1 (64), issue 2, pp. 11–14.

[5] Gogish A.V., Stepanov G.Yu. *Otryvnye i kavitatsionnye techeniya* [Separated and cavitational flow]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 384 p.

[6] Ginevskiy A.S. *Teoriya turbulentnykh struy i sledov* [The theory of turbulent jets and traces]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969, 400 p.

[7] Timofeev V.N., Bushuev A.Yu. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/967.html

[8] Sobolev S.L. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1992, 432 p.

[9] Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 676 p.

[10] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy.* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media.]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[11] [Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 1. Tenzornyi analiz* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 367 p.

[12] Belotserkovskiy S.M., Nisht N.I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh krylev idealnoi zhidkostyu* [Separated and steady thin wings flow by ideal fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p.

[13] Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integralnykh uravneniy i chislennyi eksperiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow TOO "Yanus", 1995, 520 p.

[14] Belotserkovskiy S.M., Lifanov I.K. *Chislennye metody v singulyarnykh integralnykh uravneniyakh i ikh primenenie v aerodinamike, teorii uprugosti, elektrodinamike* [Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, theory of elasticity, electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 256 p.

[15] Hoerner S.F. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1950, vol. 17, no. 10, pp. 622–628.

[16] Timofeev V.N. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 10. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1246.html.

Timofeev V.N., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 research and methodological papers. Research interests include mathematical modeling, computational methods, fluid mechanics, aerodynamics, optimization methods. e-mail: v_n_1951@mail.ru