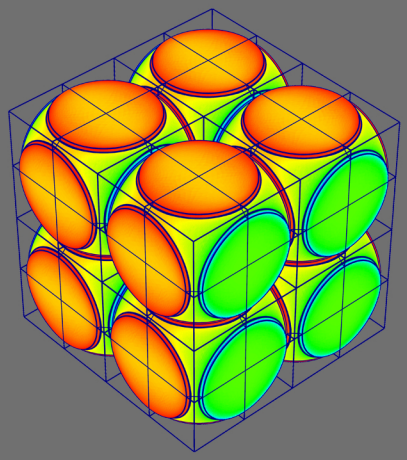
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В. Многомасштабное моделирование многослойных тонких композитных пластин с уединенными дефектами. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №4 (12), с. 47-66

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/117/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.114
24.01.2026 02:02:47

УДК 539.3 DOI 10.18698/2309-3684-2016-4-4766

Многомасштабное моделирование многослойных тонких композитных пластин с уединенными дефектами

© Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия

Разработана многомасштабная модель деформирования многослойных тонких пластин из композиционных материалов с уединенными дефектами. Модель основана на асимптотическом анализе общих трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела. Общее решение трехмерных уравнений сведено к решению задач для тонких пластин без дефектов и локальных трехмерных задач в окрестности дефекта с условием затухания решения на удалении от дефекта. Для расчета многослойных пластин использованы локальные задачи, которые позволяют найти явное решение для всех шести компонент тензора напряжений, в области без дефекта. В зоне дефекта напряжения и перемещения представляет собой суперпозицию двух решений: полученного на основе двумерного расчета пластин и локальной трехмерной задачи механики. Приведен пример численного конечно элементного решения локальной задачи механики для трехслойной композитной пластины с уединенным дефектом в среднем слое. Показано, что влияние дефекта локализовано в непосредственной его окрестности, а максимум концентрации трансверсальных напряжений достигается в окрестности вершины дефекта.

Ключевые слова: *многомасштабное моделирование, многослойные тонкие пластины, композиты, уединенные дефекты, метод конечного элемента, асимптотические разложения.*

Введение. Одной из отличительных особенностей современных конструкций из композиционных материалов является наличие в них значительного числа различных дефектов, часть из которых обусловлена спецификой технологии изготовления (непропиткой локальных зон композита связующим, наличием воздушных полостей между слоями композита, а также пор и их агломераций, возникающих при отверждении связующего, и др.), а другая часть образуется в процессе нагружения композитных конструкций. Расслоения — один из наиболее характерных дефектов в слоистых композитных конструкциях. Опасность дефектов заключается в том, что в их окрестности возникает концентрация напряжений, что приводит к снижению расчетной несущей способности конструкции в целом. Особенно важную роль играет учет дефектов при эксплуатации композитов в экстремальных условиях, например при воздействии высоких температур [1–3].

Проблеме расчета конструкций из композитов с дефектами посвящено достаточно большое число работ, отметим лишь некоторые из них [4–11]. Однако в основном предложенные методы расчета основаны на приближенном анализе напряжений в конструкциях

с дефектами, как правило, на допущении о снижении эффективных упругих жесткостей конструкций в окрестности дефектов [11, 12].

Способ, при котором для расчета тонкостенных конструкций с дефектами используется точная трехмерная постановка задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ), даже при наличии современной вычислительной техники практически не применяется в инженерной практике из-за необходимости использовать очень мелкие сетки и выполнять большие объемы вычислений. Наиболее перспективным, по-видимому, является метод, когда при расчете бездефектных зон используется двумерная теория тонких пластин и оболочек, а в зоне дефекта решается точная трехмерная задача МДТТ [13, 14]. Однако вопрос о корректном переносе решения двумерной теории в локальную трехмерную задачу остается открытым.

Целью настоящей работы является применение математически обоснованного метода асимптотического осреднения для получения задач двух типов: двумерной задачи теории тонких пластин без дефектов, полученной с помощью асимптотической теории [14, 15] и локальной трехмерной задачи механики для окрестности дефекта в конструкции, а также численная реализация предложенного метода и его тестирование.

Основные допущения. Рассмотрим многослойную пластину (рис. 1) постоянной толщины, в которой присутствуют уединенные дефекты, расположенные достаточно далеко (в некотором смысле) друг о друга. Введем малый параметр $\kappa = h / L << 1$ как отношение толщины пластины h к характерному размеру всей пластины L (например, к ее максимальной длине). Введем также глобальные x_k и локальные ξ_i координаты:

$$x_k = \tilde{x}_k / L, \quad \xi_i = x_i / \kappa, \tag{1}$$

где $\tilde{x}_k$ — обычные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси $O\tilde{x}_1$ $O\tilde{x}_2$ принадлежат срединной плоскости пластины. Обозначим также $\xi_3 = \xi$. Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами $I, J, K, L,$ принимают значения 1, 2, а индексы i, j, k, l — значения 1, 2, 3.

Полагаем, что существуют два масштаба изменения перемещений пластины u_k: один соответствует продольным направлениям $O\tilde{x}_1$ $O\tilde{x}_2$, другой — поперечному направлению $O\tilde{x}_3$. Координаты x_k и ξ_i,

как обычно в методе асимптотического осреднения [11–17], рассматриваются как независимые переменные. Координата $\xi \equiv \xi_3$ по толщине пластины изменяется в диапазоне $-0,5 < \xi_3 < 0,5$.

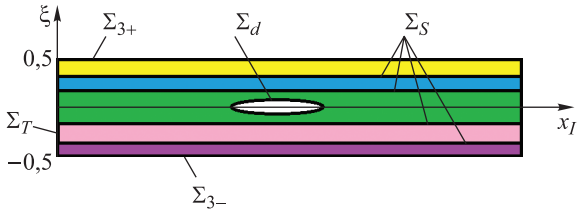


Рис. 1. Тонкая многослойная пластина с уединенным дефектом

Рассмотрим трехмерную задачу линейной теории упругости для пластины с дефектами. Запишем ее в безразмерном виде [18]:

$$\begin{aligned}
&\nabla_j \sigma_{ij} = 0,\\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right),\\
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\xi)\varepsilon_{kl},\\
&\Sigma_{3\pm} : \sigma_{ij} n_j = -\kappa^3 \tilde{p}_{\pm} n_i, \qquad \Sigma_T : u_i = u_{ei}, \qquad \Sigma_S : [\sigma_{ij}] n_j = 0,\\
&[u_i] = 0, \quad \Sigma_d : \sigma_{ij} n_j = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) состоит из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешней и внутренней поверхности $\Sigma_{3\pm}$ пластины (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и на торцевой поверхности Σ_T, а также из граничных условий на поверхности контакта Σ_S ($[u_i]$ — скачок функций) и условия на свободной поверхности дефекта Σ_d (рис. 1).

В уравнениях (2): σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; $\nabla_j = \partial / \partial \tilde{x}_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам; u_j — компоненты вектора перемещений; $C_{ijkl}(\xi_3)$ — компоненты тензора модулей упругости, который полагается различным для разных слоев пластины, т. е. зависящим только от координаты ξ; n_i — компоненты вектора нормали.

Никакого специального допущения об анизотропии материалов слоев не делаем, т. е. тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [18, 19].

В системе (2) принято основное допущение [16], заключающееся в том, что безразмерное давление $\tilde{p}_{\pm}$ на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости $O(\kappa^3)$, т. е. $\tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}$, где $p_{\pm}$ — безразмерное давление, имеющее порядок малости $O(1)$.

Асимптотические разложения для многослойной пластины с дефектом. Решение задачи (2) будем искать в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от глобальных и локальных координат:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \tilde{u}_k^{(n)}. \tag{3}$$

Здесь функции $\tilde{u}_k^{(n)}$ состоят из двух слагаемых

$$\tilde{u}_k^{(n)} = u_k^{(n)}(x_I, \xi) + \hat{u}_k^{(n)}(x_I, \xi_m), \tag{4}$$

одно из которых зависит только от поперечной координаты ξ и x_I, а другое $\hat{u}_k^{(n)}$ — от всех трех локальных координат ξ_m, но оно отлично от нуля только в некоторой окрестности дефекта (это условие будет сформулировано далее).

Подставим разложения (3) в соотношения Коши в системе (2), при этом используем правила дифференцирования функций локальных координат [13–17] $(\partial / \partial \tilde{x}_j \to \partial / \partial x_j + (1/\kappa)\partial / \partial \xi_j)$. Тогда получим асимптотические разложения для деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}, \tag{5}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}(x_I, \xi) + \hat{\varepsilon}_{ij}^{(n)}(x_I, \xi_m), \ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

где

$$\varepsilon_{IJ}^{(n)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(n)} + u_{J,I}^{(n)}), \ \varepsilon_{I3}^{(n)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(n)} + u_{I/3}^{(n+1)}), \ \varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)},$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j}^{(n)} + \hat{u}_{j,i}^{(n)}) + \frac{1}{2}(\hat{u}_{i/j}^{(n+1)} + \hat{u}_{j/i}^{(n+1)}), \ \hat{u}_i^{(0)} \equiv 0. \tag{7}$$

Здесь обозначены производные по локальной координате $u_{i/j}^{(n)} = \partial u_i^{(n)} / \partial \xi_j$ и глобальным координатам $u_{i,j}^{(n)} = \partial u_i^{(n)} / \partial x_j$.

Подставляя выражение (5) в закон Гука системы (2), получаем асимптотическое разложение для напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \tilde{\sigma}_{ij}^{(n)}, \tag{8}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(n)}(x_I, \xi) + \hat{\sigma}_{ij}^{(n)}(x_I, \xi_m), \tag{9}$$

где

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + \tilde{C}_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(n)}, \quad \sigma_{i3}^{(n)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + \tilde{C}_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(n)}, \tag{10}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}\hat{\varepsilon}_{kl}^{(n)}. \tag{11}$$

Здесь $\tilde{C}_{IJK3} = 2C_{IJK3}$, $\tilde{C}_{IJ33} = C_{IJ33}$, $\tilde{C}_{i3K3} = 2C_{i3K3}$, $\tilde{C}_{i333} = C_{i333}$.

Формулировка локальных задач. Подставляя разложения (3), (8) в уравнения равновесия и граничные условия системы (2), получим:

$$\frac{1}{\kappa}\left(\sigma_{i3/3}^{(0)} + \hat{\sigma}_{ij/j}^{(0)}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \left(\sigma_{iJ,J}^{(n)} + \sigma_{i3/3}^{(n+1)} + \hat{\sigma}_{ij,j}^{(n)} + \hat{\sigma}_{ij/j}^{(n+1)}\right) = 0,$$

$$\Sigma_{3\pm}:\ \tilde{\sigma}_{i3}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \tilde{\sigma}_{i3}^{(n)} = -\kappa^3 p_{\pm}\delta_{i3},\ \Sigma_T:\ u_k^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \tilde{u}_k^{(n)} = u_{ek}, \tag{12}$$

$$\Sigma_S:\ [\tilde{\sigma}_{i3}^{(0)}] + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n [\tilde{\sigma}_{i3}^{(n)}] = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n [\tilde{u}_k^{(n)}] = 0,$$

$$\Sigma_d:\ [\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}]n_j + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n [\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)}]n_j = 0.$$

Здесь учтено, что $[u_k^{(0)}] = 0$. Подставим теперь аддитивные представления перемещений (4) и напряжений (9) в эту систему уравнений и разделим ее на две части. В одну войдут функции $u_k^{(n)}(x_I, \xi)$, $\sigma_{ij}^{(n)}$, зависящие только от локальной координаты ξ

$$\frac{1}{\kappa}\sigma_{i3/3}^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n (\sigma_{iJ,J}^{(n)} + \sigma_{i3/3}^{(n+1)}) = 0,$$

$$\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \sigma_{i3}^{(n)} = -\kappa^3 p_{\pm}\delta_{i3},\ \Sigma_T:\ u_k^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n u_k^{(n)} = u_{ek}, \tag{13}$$

$$\Sigma_S:\ [\sigma_{i3}^{(0)}] + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n [\sigma_{i3}^{(n)}] = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n [u_k^{(n)}] = 0,$$

а в другую — функции $\hat{u}_k^{(n)}(x_I,\xi_m)$, $\hat{\sigma}_{ij}^{(n)}(x_I,\xi_m)$:

$$\frac{1}{\kappa}\hat{\sigma}_{ij/j}^{(0)}+\sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n(\hat{\sigma}_{ij,j}^{(n)}+\hat{\sigma}_{ij/j}^{(n+1)})=0,$$

$$\Sigma_{3\pm}:\hat{\sigma}_{i3}^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\hat{\sigma}_{i3}^{(n)}=0,\quad \Sigma_T:\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\hat{u}_k^{(n)}=0, \tag{14}$$

$$\Sigma_S:\ [\hat{\sigma}_{i3}^{(0)}]+\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n[\hat{\sigma}_{i3}^{(n)}]=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n[\hat{u}_k^{(n)}]=0,$$

$$\Sigma_d:\ \hat{\sigma}_{ij}^{(0)}n_j+n_j\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\hat{\sigma}_{ij}^{(n)}=-\sigma_{ij}^{(0)}n_j-n_j\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\sigma_{ij}^{(n)}.$$

В первую систему (13) для сохранения одномерности всех функций по ξ не включаем граничные условия на криволинейной поверхности дефекта Σ_d, поэтому во второй системе (14) появляются неоднородные граничные условия на поверхности дефекта Σ_d, которые содержат напряжения $\sigma_{ij}^{(n)}$. Удовлетворение систем (13) и (14) влечет и удовлетворение системы (12).

Усилим граничное условие на торцевой поверхности $\Sigma_T:\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\hat{u}_k^{(n)}=0$, заменив его требованием стремления компонент вектора перемещений к нулю при удалении от области дефекта

$$\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\hat{u}_k^{(n)}\to 0,\qquad |\xi_I|\to\infty. \tag{15}$$

Приравнивая в системе (13) члены при κ^{-1} к нулю, а при остальных степенях геометрического параметра — к некоторым величинам $h_i^{(n)}$, не зависящим от ξ_l, получим рекуррентную последовательность локальных задач L_n, $n\in\mathbb{Z}_+$. Для этой последовательности задача L_0 имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{i3/3}^{(0)}=0,\\
&\sigma_{i3}^{(0)}=C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)}+\tilde{C}_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)},\\
&2\varepsilon_{IJ}^{(0)}=u_{I,J}^{(0)}+u_{J,I}^{(0)},\qquad 2\varepsilon_{I3}^{(0)}=u_{3,I}^{(0)}+u_{I/3}^{(1)},\qquad \varepsilon_{33}^{(0)}=u_{3/3}^{(1)},\\
&\Sigma_{3\pm}:\sigma_{i3}^{(0)}=0;\qquad \Sigma_S:[\sigma_{i3}^{(0)}]=0,\qquad [u_i^{(1)}]=0,\qquad <u_i^{(1)}>=0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Задачи L_n, $n \in \mathbb{N}$ могут быть записаны в форме:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{i3/3}^{(n)} + \sigma_{iJ,J}^{(n-1)} = h_i^{(n-1)}, \\
&\sigma_{i3}^{(n)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + \tilde{C}_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(n)}, \\
&2\varepsilon_{IJ}^{(n)} = u_{I,J}^{(n)} + u_{J,I}^{(n)}, \qquad 2\varepsilon_{I3}^{(n)} = u_{3,I}^{(n)} + u_{I/3}^{(n+1)}, \qquad \varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)}, \\
&\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(n)} = -p_{\pm}\delta_{i3}\delta_{n3}; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(n)}] = 0, \quad [u_i^{(n+1)}] = 0, \quad < u_i^{(n+1)} > = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

В этих задачах обозначена операция осреднения по толщине пластины

$$< u_i^{(1)} > = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(3)} d\xi. \tag{18}$$

Аналогично, приравнивая в системе (14) члены при κ^{-1} к нулю, а при остальных степенях геометрического параметра к некоторым величинам $\hat{h}_i^{(n)}$, не зависящим от ξ_l, получим рекуррентную последовательность локальных задач $\hat{L}_n$.

Задача $\hat{L}_0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_{ij/j}^{(0)} = 0, \\
&\hat{\sigma}_{ij}^{(0)} = C_{ijkl}\hat{\varepsilon}_{kl}^{(0)}, \\
&2\hat{\varepsilon}_{ij}^{(0)} = \hat{u}_{i/j}^{(1)} + \hat{u}_{j/i}^{(1)}, \\
&\Sigma_{3\pm} : \hat{\sigma}_{i3}^{(0)} = 0; \qquad \Sigma_S : [\hat{\sigma}_{i3}^{(0)}] = 0, \qquad [\hat{u}_i^{(1)}] = 0, \\
&\Sigma_d : \hat{\sigma}_{ij}^{(0)} n_j = -\sigma_{ij}^{(0)} n_j.
\end{aligned} \tag{19}$$

Задачи $\hat{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$ записываются в форме:

$$\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_{ij/j}^{(n)} + \hat{\sigma}_{ij,j}^{(n-1)} = \hat{h}_i^{(n-1)}, \\
&\hat{\sigma}_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}\hat{\varepsilon}_{kl}^{(n)}, \\
&2\hat{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \hat{u}_{i,j}^{(n)} + \hat{u}_{j,i}^{(n)} + \hat{u}_{i/j}^{(n+1)} + \hat{u}_{j/i}^{(n+1)}, \\
&\Sigma_{3\pm} : \hat{\sigma}_{i3}^{(n)} = 0; \qquad \Sigma_S : [\hat{\sigma}_{i3}^{(n)}] = 0, \qquad [\hat{u}_i^{(n+1)}] = 0, \\
&\Sigma_d : \hat{\sigma}_{ij}^{(n)} n_j = -\sigma_{ij}^{(n)} n_j, \\
&\hat{u}_k^{(n+1)} \to 0, \qquad |\xi_I| \to \infty.
\end{aligned} \tag{20}$$

Уравнения равновесия в системах (13), (14) после введения функций $h_i^{(n)}, \hat{h}_i^{(n)}$ принимают вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n h_i^{(n)} = 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \hat{h}_i^{(n)} = 0. \tag{21}$$

Решение задач нулевого приближения. Задачи L_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ (16), (17) в силу своего построения являются одномерными по локальной переменной ξ, их решение можно найти аналитически. Решение задачи (16) имеет вид [20]:

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \qquad \sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{22}$$

$$\varepsilon_{k3}^{(0)} = -\tilde{C}_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{23}$$

$$u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)} + U_{IKL}(\xi) \varepsilon_{KL}^{(0)}, \qquad u_3^{(1)} = U_{3KL}(\xi) \varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{24}$$

где

$$U_{IKL}(\xi) = -\langle Z_{IKL} \rangle_\xi, \quad U_{3KL}(\xi) = -\langle Z_{3KL} \rangle_\xi, \quad Z_{iKL} = C_{i3s3}^{-1} C_{s3KL}. \tag{25}$$

Здесь C_{i3k3}^{-1} — матрица компонент, обратная к C_{i3k3}. Также здесь обозначены операторы

$$\left\{ f(\xi) \right\}_\xi = \int_{-1/2}^{\xi} \left(f(\tilde{\xi}) - \left\langle f(\xi) \right\rangle \right) d\tilde{\xi},$$

$$\left\langle f(\xi) \right\rangle_\xi = \int_{-1/2}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} - \left\langle \int_{-1/2}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} \right\rangle. \tag{26}$$

Задачи $\hat{L}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (19), (20) являются трехмерными, получение их аналитического решения затруднительно. Для их решения используется численные методы. Задача (19) в качестве внешних данных («нагрузок») содержит компоненты вектора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)} n_j$ на поверхности дефекта, который является решением задачи L_0. В силу условия затухания решения задачи (19) на расстояниях, достаточно удаленных от поверхности дефекта, можно заменить условие $\hat{u}_k^{(1)} \to 0, |\xi_I| \to \infty$ условием обнуления компонент вектора перемещений на границе $\Sigma_{\xi d}$ (некоторой области $V_{\xi d}$) достаточно удаленной от дефекта:

$$\Sigma_{\xi d} : \hat{u}_k^{(1)} = 0. \tag{27}$$

Тогда задача (19) с граничным условием (27) представляет собой классическую задачу трехмерной теории упругости, и для ее решения может быть применен метод конечного элемента [13, 14].

Решение задач последующих приближений. Решение задач L_n, $n \in \mathbb{N}$ (17) имеет вид:

$$\sigma_{i3}^{(n+1)} = -\left\{\sigma_{iJ,J}^{(n)}\right\}_{\xi} - (p_- + \Delta p(\xi + 0,5))\delta_{i3}\delta_{n2}, \tag{28}$$

$$u_3^{(n+1)} = \left\langle \varepsilon_{33}^{(n)} \right\rangle_{\xi}, \; u_I^{(n+1)} = 2\left\langle \varepsilon_{I3}^{(n)} \right\rangle_{\xi} - \left\langle u_{3,I}^{(n)} \right\rangle_{\xi},$$

$$\varepsilon_{IJ}^{(n+1)} = \left\langle \varepsilon_{I3,J}^{(n)} \right\rangle_{\xi} + \left\langle \varepsilon_{J3,I}^{(n)} \right\rangle_{\xi} + \left\langle \eta_{IJ}^{(n)} \right\rangle_{\xi}.$$

Здесь введены функции искривлений срединной поверхности пластины:

$$\eta_{IJ}^{(n)} = -u_{3,IJ}^{(n)}. \tag{29}$$

Обращая определяющее соотношение в системе (17), получаем:

$$\varepsilon_{k3}^{(n)} = \tilde{C}_{k3s3}^{-1}\left(\sigma_{s3}^{(n)} - C_{s3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)}\right). \tag{30}$$

Подставив это соотношение в первую группу определяющих соотношений в системах (16), (17), получаем

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJk3}C_{k3s3}^{-1}\sigma_{s3}^{(n)}, \tag{31}$$

$$C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{IJk3}C_{k3s3}^{-1}C_{s3KL}.$$

Подставляя формулу (30) в третью группу соотношений выражения (28), находим:

$$\varepsilon_{IJ}^{(n+1)} = \left\langle \Psi_{IJsK}\sigma_{s3,K}^{(n)} \right\rangle_{\xi} + \left\langle \Phi_{IJKLM}\varepsilon_{KL,M}^{(n)} \right\rangle_{\xi} + \left\langle \eta_{IJ}^{(n)} \right\rangle_{\xi}, \tag{32}$$

$$2\Psi_{IJsK} = C_{I3s3}^{-1}\delta_{KJ} + C_{J3s3}^{-1}\delta_{KI}, \; 2\Phi_{IJKLM} = -C_{s3KL}\left(C_{I3s3}^{-1}\delta_{MJ} + C_{J3s3}^{-1}\delta_{MI}\right).$$

Найдем рекуррентное соотношение для функций искривлений $\eta_{IJ}^{(n+1)} = -u_{3,IJ}^{(n+1)}$. Подставив второе соотношение системы (28) в формулу (29), а затем вместо компоненты $\varepsilon_{33}^{(n)}$ ее представление в форме (30), получим

$$\eta_{IJ}^{(n+1)} = -\left\langle C_{33s3}^{-1}\sigma_{s3,IJ}^{(n)} \right\rangle_{\xi} + \left\langle C_{33s3}^{-1}C_{s3KL}\varepsilon_{KL,IJ}^{(n)} \right\rangle_{\xi}, \tag{33}$$

Записав соотношение (31) для $n+1$ и подставив в него выражение (32) для $\varepsilon_{IJ}^{(n+1)}$ и выражение (28) для $\sigma_{i3}^{(n+1)}$, получим

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ}^{(n+1)} &= C_{IJKL}^{(0)}\left(\left\langle \Psi_{KLsM}\sigma_{s3,M}^{(n)}\right\rangle_{\xi} + \left\langle \Phi_{KLPQM}\varepsilon_{PQ,M}^{(n)}\right\rangle_{\xi} + \left\langle \eta_{KL}^{(n)}\right\rangle_{\xi}\right) - \\ &- C_{IJk3}C_{k3s3}^{-1}\left(\left\{\sigma_{sJ,J}^{(n)}\right\}_{\xi} + \left(p_{-} + \Delta p\left(\xi + 0,5\right)\right)\delta_{s3}\delta_{n2}\right).\end{aligned} \tag{34}$$

Соотношения (28) совместно с формулами (32)–(34) позволяют вычислять компоненты $\sigma_{i3}^{(n+1)}$, $\varepsilon_{IJ}^{(n+1)}$, $u_i^{(n+1)}$, $\eta_{IJ}^{(n+1)}$, $\sigma_{IJ}^{(n+1)}$ по предыдущим членам асимптотических разложений этих же компонент.

Напишем в явном виде начальные члены асимптотических разложений.

Если для компонент вектора перемещений использовать соотношения (19), его начальные члены будут иметь следующий вид:

для перемещений

$$u_I = u_I^{(0)} - \kappa\left(\xi u_{3.I}^{(0)} - U_{IKL}(\xi)\varepsilon_{KL}^{(0)}\right),\ u_3 = u_3^{(0)} - \kappa U_{3KL}(\xi)\varepsilon_{KL}^{(0)}; \tag{35}$$

для изгибных деформаций

$$\varepsilon_{IJ} = \varepsilon_{IJ}^{(0)} + \kappa\left(\xi\eta_{IJ}^{(0)} + \left\langle \Phi_{IJKLM}\right\rangle_{\xi}\varepsilon_{KL,M}^{(0)}\right); \tag{36}$$

для межслойных и поперечных деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i3} = -Z_{iKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} - \kappa\Bigg(\xi Z_{iKL}\eta_{KL}^{(0)} + \Bigg(\tilde{C}_{i3S3}^{-1}\left\{C_{SMKL}^{(0)}\right\}_{\xi} + \\ + Z_{iPQ}\left\langle \Phi_{PQKLM}\right\rangle_{\xi}\Bigg)\varepsilon_{KL,M}^{(0)}\Bigg).\end{aligned} \tag{37}$$

Начальные члены асимптотических разложений напряжений имеют следующий вид:

для изгибных и сдвиговых напряжений

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(0)} + \kappa\xi C_{IJKL}^{(0)}\eta_{KL}^{(0)} + \kappa\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)}\varepsilon_{KL,M}^{(0)}, \tag{38}$$

$$\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = C_{IJPQ}^{(0)}\left\langle \Phi_{PQKLM}\right\rangle_{\xi} - Z_{IJS}\left\{C_{SMKL}^{(0)}\right\}_{\xi};$$

для напряжений межслойного сдвига

$$\sigma_{I3} = -\kappa\left\{C_{IMKL}^{(0)}\right\}_{\xi}\varepsilon_{KL,M}^{(0)} - \kappa^2\left\{\xi C_{IMKL}^{(0)}\right\}_{\xi}\eta_{KL,M}^{(0)} + \kappa^2 P_{INKLM}^{(0)}\varepsilon_{KL,MN}^{(0)}, \tag{39}$$

$$P_{INKLM}^{(0)} = \left\{Z_{INS}\left\{C_{SKLM}^{(0)}\right\}_{\xi} - C_{INPQ}^{(0)}\left\langle \Phi_{PQKLM}\right\rangle_{\xi}\right\}_{\xi};$$

для поперечных нормальных напряжений

$$\sigma_{33} = \kappa^2 \left\{ \left\{ C^{(0)}_{MNKL} \right\}_\xi \right\}_\xi \varepsilon^{(0)}_{KL,MN} - \kappa^3 \left(p_- + \Delta p \left(\xi + 1/2 \right) \right) +$$
$$+ \kappa^3 \left\{ \left\{ \xi C^{(0)}_{MNKL} \right\}_\xi \right\}_\xi \eta^{(0)}_{KL,MN} - \kappa^3 S^{(0)}_{RNKLM} \varepsilon^{(0)}_{KL,MNR}, \tag{40}$$

$$S^{(0)}_{RNKLM} = \left\{ \left\{ Z_{RNS} \left\{ C^{(0)}_{SMKL} \right\}_\xi - C^{(0)}_{RNPQ} \left\langle \Phi_{PQKLM} \right\rangle_\xi \right\}_\xi \right\}_\xi .$$

Осредненные уравнения равновесия пластины без учета дефектов. Введем обозначения для усилий T_{IJ}, моментов M_{IJ} и перерезывающих сил Q_I в пластине [20]:

$$T_{IJ} = < \sigma^{(0)}_{IJ} > + \kappa < \sigma^{(1)}_{IJ} > + ...,$$
$$Q_I = \kappa < \sigma^{(1)}_{I3} > + \kappa^2 < \sigma^{(2)}_{I3} > + ..., \tag{41}$$
$$M_{IJ} = \kappa < \xi \sigma^{(0)}_{IJ} > + \kappa^2 < \xi \sigma^{(1)}_{IJ} > + ...$$

Тогда для пластины имеет место классическая система уравнений равновесия [20]:

$$T_{IJ,J} = 0, \qquad Q_{J,J} = \Delta \overline{p}, \qquad M_{IJ,J} - Q_I = 0, \tag{42}$$

где $\Delta \overline{p} = \kappa^2 \Delta p$.

Подставив выражения (38) для напряжений σ_{IJ} в интегралы формул (41), получим осредненные определяющие соотношения для пластины:

$$T_{IJ} = \overline{C}_{IJKL} \varepsilon^{(0)}_{KL} + B_{IJKL} \eta_{KL} + K_{IJKLM} \varepsilon^{(0)}_{KL,M},$$
$$M_{IJ} = B_{IJKL} \varepsilon^{(0)}_{KL} + D_{IJKL} \eta_{KL} + \overline{K}_{IJKLM} \varepsilon^{(0)}_{KL,M}, \tag{43}$$

где тензоры осредненных упругих констант пластины

$$\overline{C}_{IJKL} = < C^{(0)}_{IJKL} >, \quad B_{IJKL} = \kappa < \xi C^{(0)}_{IJKL} >, \quad K_{IJKLM} = \kappa < \tilde{N}^{(0)}_{IJKLM} >, \tag{44}$$
$$D_{IJKL} = \kappa^2 < \xi^2 C^{(0)}_{IJKL} >, \quad \overline{K}_{IJKLM} = \kappa^2 < \xi \tilde{N}^{(0)}_{IJKLM} > .$$

Система уравнений (42), (43) вместе с кинематическими соотношениями

$$\varepsilon^{(0)}_{IJ} = \frac{1}{2} (u^{(0)}_{I,J} + u^{(0)}_{J,I}), \quad \eta_{KL} = -u^{(0)}_{3,KL} \tag{45}$$

представляет собой систему трех уравнений относительно трех функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ глобальных переменных x_I.

Задача об изгибе многослойной композитной пластины с дефектом. Рассмотрим в качестве примера задачу об изгибе многослойной пластины (допуская несимметричность расположения слоев относительно срединной поверхности) прямоугольной формы с уединенным дефектом под действием равномерно распределенного давления. Предположим, что $x_1 \in [0,1]$ — продольная, а $x_2 \in [-b/2, b/2], b \in \mathbb{R}_+$ — поперечная глобальная координата пластины. Пластина предполагается жестко защемленной на торцах (Γ — контур, ограничивающий пластину на срединной поверхности):

$$\begin{gathered} u_1^{(0)}\Big|_{x_1=0} = u_1^{(0)}\Big|_{x_1=1} = u_3^{(0)}\Big|_{x_1=0} = u_3^{(0)}\Big|_{x_1=1} = 0, \\ u_2^{(0)}\Big|_{x_2=-(b/2)} = u_2^{(0)}\Big|_{x_2=b/2} = 0, \\ \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial n_I}\Bigg|_{\Gamma} = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Слои пластины будем полагать ортотропными, тогда $\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = 0$, $K_{IJKLM} = 0$, $\bar{K}_{IJKLM} = 0$ [20]. Решение системы (42), (43), (45) в этом случае является одномерным и имеет вид:

$$u_1^{(0)}(x_1) = A_1 x_1 \left(x_1^2 - 1\right) + A_2 x_1 (x_1 - 1),\ u_2^{(0)} \equiv 0,\ u_3^{(0)}(x_1) = B q_1^2 (q_1 - 1)^2, \tag{47}$$

$$24\left(D_{1111}\bar{C}_{1111} - \left(B_{1111}\right)^2\right)B = -\Delta\bar{p}\bar{C}_{1111},$$

$$6\left(D_{1111}\bar{C}_{1111} - \left(B_{1111}\right)^2\right)A_1 = -\Delta\bar{p}B_{1111},$$

$$4\left(D_{1111}\bar{C}_{1111} - \left(B_{1111}\right)^2\right)A_2 = \Delta\bar{p}B_{1111}.$$

Изгибные, поперечные и напряжения межслойного сдвига, согласно (38)–(40) и (47), при сохранении главных членов в асимптотических разложениях вычисляются по формулам:

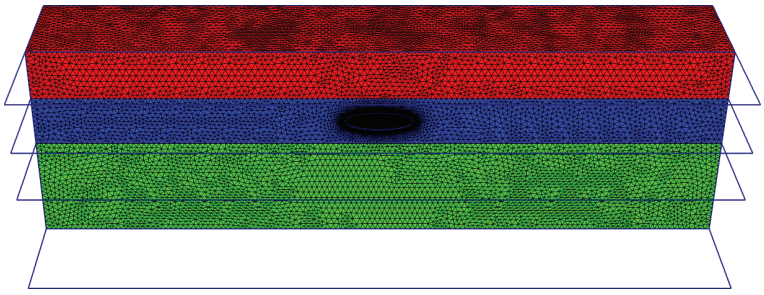
$$\sigma_{IJ} = C_{IJ11}^{(0)}\left(u_{1,1}^{(0)} - \kappa\xi u_{3,11}^{(0)}\right),$$

$$\sigma_{I3} = \kappa\left(-\left\{\hat{C}_{I111}\right\}_{\xi} u_{1,11}^{(0)} + \kappa\left\{\xi\hat{C}_{I111}\right\}_{\xi} u_{3,111}^{(0)}\right), \tag{48}$$

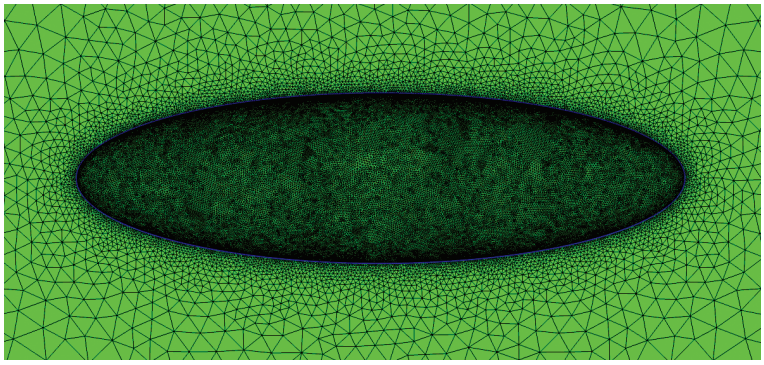
$$\sigma_{33} = \kappa^2 \left\{ \left\{ \hat{C}_{1111} \right\}_\xi \right\}_\xi u^{(0)}_{1,111} - \kappa^3 \left(\left(p_- + \Delta p \left(\xi + 1/2 \right) \right) + \left\{ \left\{ \xi \hat{C}_{1111} \right\}_\xi \right\}_\xi u^{(0)}_{3,1111} \right).$$

Вектор напряжений на границе дефекта в пластине вычисляется по формуле $\sigma^{(1)}_{ij} n_j$, где $\sigma^{(1)}_{ij}$ выражают по формулам (48), выделяя явно члены при κ^1, который после этого подставляется в задачу $\hat{L}_1$ в выражение (20), координаты x_I при этом фиксируются, а решение ищется в виде функций $\hat{\sigma}^{(1)}_{ij}(\xi_l)$, $\hat{u}^{(2)}_i(\xi_l)$.

Для решения задачи $\hat{L}_1$ в системе (20) был применен метод конечного элемента [13, 14]. Программная реализация решения этой трехмерной задачи теории упругости была осуществлена с помощью программной платформы SMCM, разработанной в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «СИМПЛЕКС») МГТУ им. Н.Э. Баумана. Для визуализации трехмерных полей напряжений был использован программный модуль Netgazer, также разработанный в НОЦ «СИМПЛЕКС». Некоторые результаты расчетов показаны на рис. 2–5.



а



б

Рис. 2. Конечно-элементная сетка, созданная для решения локальной задачи (20) для трехслойной композитной пластины (*а*) с уединенным дефектом (*б*)

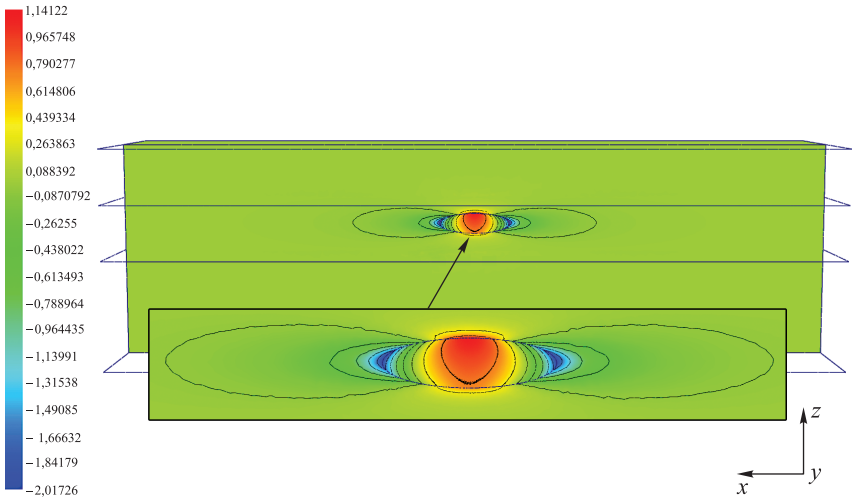


Рис. 3. Распределение поля продольного напряжения $\hat{\sigma}_{11}^{(1)}$ в локальной задаче $\hat{L}_1$ для трехслойной композитной пластины с уединенным дефектом

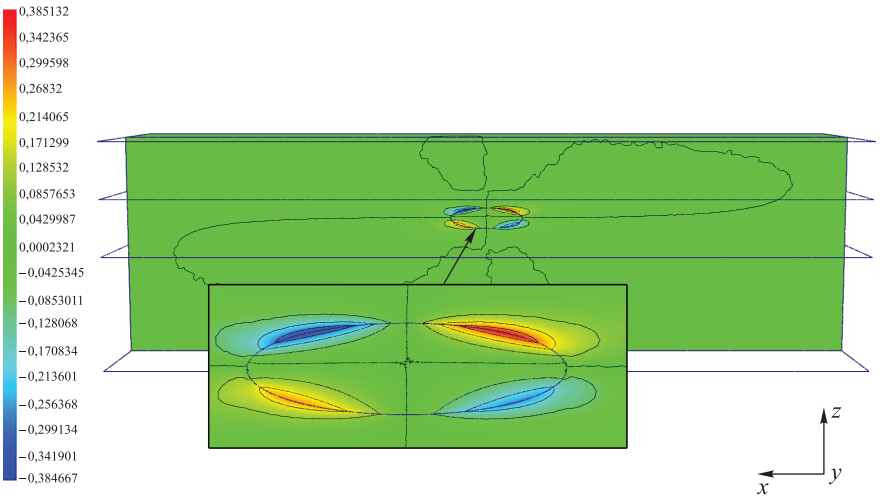


Рис. 4. Распределение поля сдвигового напряжения $\hat{\sigma}_{13}^{(1)}$ в локальной задаче $\hat{L}_1$ для трехслойной композитной пластины с уединенным дефектом

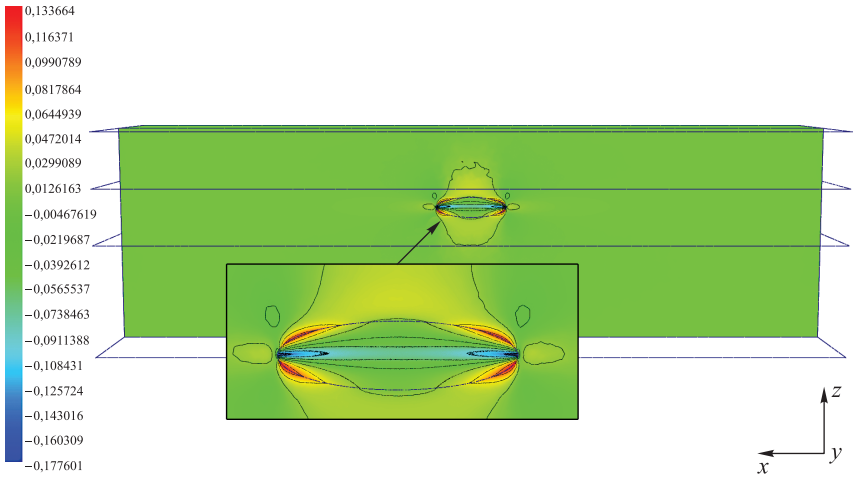


Рис. 5. Распределение поля поперечного напряжения $\hat{\sigma}_{33}^{(1)}$ в локальной задаче $\hat{L}_1$ для трехслойной композитной пластины с уединенным дефектом

При численном моделировании была рассмотрена трехслойная пластина. Длина пластины $L = 0{,}84$ м, толщина пластины $h = 0{,}021$ м, а толщина слоев соответствует сетке $A_3 = \left(-1/2;\ -1/4;\ 0{,}1/2\right)$ по нормальной координате ξ. Значения давления на верхней и нижней поверхности пластины были следующими: $\tilde{p}_+ = 1$ и $\tilde{p}_- = 0{,}1$ МПа. В качестве материалов слоев № 1, 2, 3 были выбраны ровинговые углепластики на эпоксидном связующем с различной ориентацией стеклянных волокон в слоях. Для слоя № 1 волокна ориентированы под углами $[0^\circ / 90^\circ]$ к оси ξ_1 в равных соотношениях между собой; для слоя № 2 — под углами $[\pm 45^\circ / 90^\circ]$; для слоя № 3 — под углами $[0^\circ / \pm 45^\circ]$ к оси ξ_1, также в равных соотношениях между собой. Выбраны следующие упругие характеристики углеродных моноволокон: продольный модуль упругости $E'_f = 200$ ГПа, поперечный модуль упругости $E_f = 20$ ГПа, прочность при продольном растяжении $\sigma_{fT} = 2{,}2$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_f = 0{,}25$; параметры статистического разброса прочности [21]: $\omega_f = 0{,}33$, $s_f = 0{,}07$, $r_f = 0{,}25$, $H_0 = 3$, средний угол разориетации моноволокон в нити $\Phi_f = 1^\circ$.

Матрица в составе композита — Dion, упругие и прочностные характеристики матрицы, использованные в расчетах, были следующие: модуль упругости $E_m = 3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_m = 0{,}35$, прочность при растяжении $\sigma_{mT} = 35$ МПа, прочность при

сжатии $\sigma_{mC} = 43$, МПа прочность при сдвиге $\sigma_{mS} = 27$ МПа. Методика расчета эффективных характеристик ортотропных слоев по характеристикам матрицы и волокон изложена в работе [11]. Расчетные эффективные упругие константы материалов слоев пластины представлены в таблице, где E_i — модули упругости, G_{ij} — модули сдвига, ν_{ij} — коэффициенты Пуассона. Слой № 3 соответствует значению локальной координаты $\xi = -0,5$, а слой № 1 — $\xi = 0,5$. Пластина содержала дефект в среднем слое. Форма дефекта выбиралась эллипсоидальной.

Эффективные упругие константы материалов слоев пластины, принятые в расчетах

№ слоя	E_1, ГПа	E_2, ГПа	E_3, ГПа	G_{12}, ГПа	G_{13}, ГПа	G_{23}, ГПа	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
1	14	14	5,3	1,8	0,75	0,75	0,08	0,14	0,15
2	7	7	2,7	0,9	0,38	0,38	0,04	0,07	0,08
3	21	21	8	2,7	1,13	1,13	0,12	0,21	0,23

На рис. 2 показан общий вид области $V_{\xi d}$, представляющей собой часть трехслойной конструкции композитной пластины, которая была рассмотрена при решении задачи $\hat{L}_1$ в системе (20). Также показана конечно-элементная сетка, созданная для решения локальной задачи $\hat{L}_1$ для трехслойной композитной пластины с уединенным дефектом. Число конечных элементов в локальной задаче составило 24 012 519. Конечно-элементная сетка имела сильное сгущение в окрестности дефекта.

На рис. 3–5 показаны распределения полей напряжений $\hat{\sigma}_{11}^{(1)}$, $\hat{\sigma}_{13}^{(1)}$, $\hat{\sigma}_{33}^{(1)}$ (МПа) в локальной задаче для трехслойной композитной пластины с уединенным дефектом. Результаты моделирования показывают, что напряжения в этой задаче сильно локализуются в непосредственной окрестности поверхности дефекта. Влияние дефекта для всех компонент напряжений сказывается только в среднем слое, где располагается дефект, причем на поверхностях раздела слоев в непосредственной зоне дефекта его влияние уже практически не сказывается.

Однако максимальные значения концентрации напряжений на поверхности дефекта весьма значительны, наибольшие значения концентрации этих напряжений реализуются для продольной компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}_{11}^{(1)}$ (рис. 3) не в вершине дефекта, а в зоне наименьшей кривизны его поверхности. Максимальные зна-

чения поперечной компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}_{33}^{(1)}$ (рис. 5) реализуются, наоборот, в вершине дефекта, в зоне наибольшей кривизны его поверхности. Именно эти напряжения вызывают раскрытие дефекта и его последующее распространение.

Заключение. Разработана многомасштабная модель деформирования многослойных тонких пластин из композиционных материалов с уединенными дефектами, основанная на асимптотическом анализе общих трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела.

С помощью разработанного асимптотического метода общее решение трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела сведено к решению задач для тонких пластин без дефектов и локальных трехмерных задач в окрестности дефекта с условием затухания решения на удалении от дефекта.

Приведен пример численного конечно элементного решения локальной задачи механики для трехслойной композитной пластины с уединенным дефектом в среднем слое. Показано, что влияние дефекта на распределение полей напряжений существенно локализовано в непосредственной его окрестности. Установлено, что максимум концентрации трансверсальных напряжений достигается в окрестности вершины дефекта.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dimitrienko Yu.I. A structural thermo-mechanical model of textile composite materials at high temperatures. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.

[2] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Effect of thermomechanical erosion on heterogeneous combustion of composite materials in high-speed flows. *Combustion and Flame*, 2000, vol. 122, no. 3, pp. 211–226.

[3] Dimitrienko Yu.I. Internal Heat-Mass Transfer and stresses in thin-walled structures of ablating materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1997, vol. 40, no. 7, pp. 1701–1711.

[4] Heslehurst R.B. *Defects and Damage in Composite Materials and Structures*. CRC Press, 2014, 154 p.

[5] Joffre T., Miettinen A., Wernersson E., Isaksson P., Gamstedt E. Effects of defects on the tensile strength of short-fibre composite materials. *Mechanics of Materials*, 2014, vol. 75, pp. 125–134. DOI 10.1016/j.mechmat.2014.04.003

[6] Lemanski S.L., Wang J., Sutcliffe M.P.F., Potter K.D., Wisnom M.R. Modelling failure of composite specimens with defects under compression loading. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2013, vol. 48, pp. 26–36. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.12.007

[7] Dong J., Huo N. A two-scale method for predicting the mechanical properties of 3D braided composites with internal defects. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 1–10.

[8] Shigang A., Daining F., Rujie H., Yongmao P. Effect of Manufacturing Defects on Mechanical Properties and Failure Features of 3D orthogonal woven C/C composites. *Composites Part B: Engineering*, 2015, vol. 71, pp. 113–121.

[9] Ribeiro F.M.F., Campilho R.D.S.G., Carbas R.J.C., da Silva L.F.M. Strength and damage growth in composite bonded joints with defects. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 100, pp. 91–100.

[10] Gowayed Y., Ojard G., Prevost E., Santhosh U., Jefferson G. Defects in ceramic matrix composites and their impact on elastic properties. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 167–175.

[11] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Федонюк Н.Н. Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных конструкций с дефектами. Математическое моделирование и численные методы, 2016, № 3, с. 3–23. DOI 10.18698/2309-3684-2016-3-323

[12] Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. *Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов*. Москва, Физматлит, 2014, 196 с.

[13] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 26–46.

[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.

[15] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым заполнителем. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 5 (56), с. 66–81.

[16] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. URL: http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641

[17] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Asymptotic theory for vibrations of composite plates. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 60, pp. 2993–3002. URL: https://doi.org/10.12988/ams.2016.68231

[18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 367 с.

[20] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.

[21] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composites structures under high temperatures*. Springer, 2015, 367 p.

Статья поступила в редакцию 12.11.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Многомасштабное моделирование многослойных тонких композитных пластин с уединенными дефектами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4 (12), с. 47–66.

Димитриенко Юрий Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «СИМПЛЕКС») МГТУ им. Н.Э. Баумана; заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Юрин Юрий Викторович, аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Multiscale modeling of thin multilayer composite plates with solitary defects

© Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow 105005, Russia

We developed a multiscale model of deformation of thin multilayer composite plates with solitary defects. The model is based on the asymptotic analysis of general three-dimensional equations of deformable solid mechanics. The general solution of three-dimensional equations is reduced to the solution of two classes of problems: problems for thin plates without defects and local three-dimensional problems in the vicinity of the defect with the condition of damping solution at the distance from the defect. A solution of local problems is used for averaged problems of the multilayer plates theory, which enables us to find an explicit solution for all six components of the stress tensor in the field without the defect, based on the solution of the averaged two-dimensional problem of the plate theory. In the defect area the general solution is a superposition of the two solutions: the one obtained on the basis of the plates theory and local three-dimensional mechanics problems. The paper gives an example of a numerical finite element solution of the local mechanics problem for the three-layer composite plate with a solitary defect in the middle layer. Moreover, findings of the research show that the defect impact is localized in its immediate vicinity and the maximum transverse stress concentration is achieved in the vicinity of the defect peak.

***Keywords**: multiscale modeling, multilayer thin plates, composite, solitary defects, finite element method, asymptotic decomposition.*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.
[2] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. *Combustion and Flame*, 2000, vol. 122, no. 3, pp. 211–226.
[3] Dimitrienko Yu.I. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1997, vol. 40, no. 7, pp. 1701–1711.
[4] Heslehurst R.B. *Defects and Damage in Composite Materials and Structures*. CRC Press, 2014, 154 p.
[5] Joffre T., Miettinen A., Wernersson E., Isaksson P., Gamstedt E. *Mechanics of Materials*, 2014, vol. 75, pp. 125–134. DOI: 10.1016/j.mechmat.2014.04.003
[6] Lemanski S.L., Wang J., Sutcliffe M.P.F., Potter K.D., Wisnom M.R. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2013, vol. 48, pp. 26–36. Available at: http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.12.007
[7] Dong J., Huo N. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 1–10.

[8] Shigang A., Daining F., Rujie H., Yongmao P. *Composites Part B: Engineering*, 2015, vol. 71, pp. 113–121.
[9] Ribeiro F.M.F., Campilho R.D.S.G., Carbas R.J.C., da Silva L.F.M. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 100, pp. 91–100.
[10] Gowayed Y., Ojard G., Prevost E., Santhosh U., Jefferson G. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 167–175.
[11] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Fedonyuk N.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 3, pp. 3–23. DOI: 10.18698/2309-3684-2016-3-323
[12] Kaledin V.O., Aulchenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Iu.V. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolochechnykh konstruktsiy iz kompozitsionnykh materialov* [Modeling of statics and dynamics of shell composite structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 196 p.
[13] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 26–46.
[14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sporschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 3–23.
[15] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sporschikov S.V., Prozorovskiy A.A., Erasov V.S., Yakovlev N.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2014, no. 5 (56), pp. 66–81.
[16] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. Available at: http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641
[17] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 60, pp. 2993–3002. Available at: https://doi.org/10.12988/ams.2016.68231
[18] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 1. Tenzornyi analiz* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 367 p.
[20] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–100.
[21] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composites structures under high temperatures*. Springer, 2015, 367 p.

Dimitrienko Y.I., Dr. Sc. (Phys.- Math.), Professor, Director of Research and Education Center of Supercomputer engineering modeling and program software (Simplex), Bauman Moscow State Technical University, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, BMSTU. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Yurin Y.V., post-graduate student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: yvyurin@yandex.ru