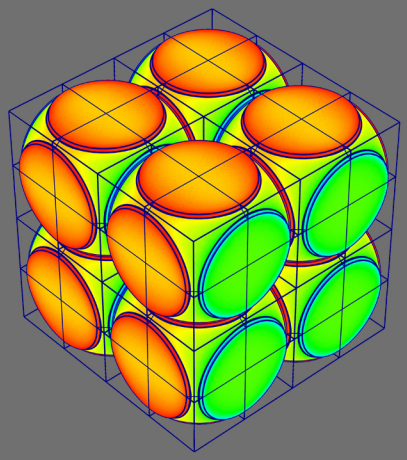
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Басок Б. И., Гоцуленко В. В. Моделирование автоколебаний напорного движения газа, возбуждаемых теплоподводом. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №4 (12), с. 17-33

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/116/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 13:55:12

УДК 534.142:536.24+621.63 DOI 10.18698/2309-3684-2016-4-1733

Моделирование автоколебаний напорного движения газа, возбуждаемых теплоподводом

© Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко

Институт технической теплофизики НАН Украины,
Киев, 03057, Украина

Получена математическая модель для определения параметров продольных автоколебаний, самовозбуждающихся в напорном движении газа при локальном теплоподводе к потоку. Установлено, что при определенных условиях подвод теплоты к газу изменяет гидравлические характеристики течения, порождая эффект «отрицательного» сопротивления. В этом случае возбуждение автоколебаний возможно даже при монотонно убывающей напорной характеристике нагнетателя.

Ключевые слова: *автоколебания, тепловое сопротивление, напорная характеристика теплоподвода, помпаж, неустойчивость.*

Введение. Известно, что при напорном перемещении газа, осуществляемом лопастным нагнетателем, возбуждаются продольные автоколебания (эффект помпажа). Теория автоколебаний помпажа одноступенчатого компрессора изложена в монографии [1]. Причина этого явления и его механизм заключаются в образовании восходящей ветви на напорной характеристике нагнетателя, а также петель гистерезиса, природа возникновения которых в работе [1] не была рассмотрена. В статье [2] предложено физическое обоснование механизма самовозбуждения автоколебаний (помпажа).

Межлопастные каналы рабочего колеса, входящие в проточный тракт, и спирального отводящего устройства центробежных нагнетателей являются диффузорами. С понижением подачи теплоносителя в таких каналах возникают отрывные вихревые движения, интенсивность которых возрастает с уменьшением объемного расхода Q перемещаемой среды. На зависимости вихревых потерь $h_{\text{вихр}}(Q)$ при малых подачах образуется нисходящая ветвь отрицательного сопротивления (рис. 1, *а*).

Поскольку теоретическая характеристика $H_{\text{т}}(Q)$ центробежного нагнетателя, в котором угол установки лопастей рабочего колеса на выходе $\beta_{2\text{л}} < \pi/2$ является линейной убывающей функцией Q, то на действительной напорной характеристике нагнетателя $H_{\text{д}}(Q) = H_{\text{т}}(Q) - h_{\text{вихр}}(Q)$ (рис. 1, *б*) при малых подачах образуется восходящая ветвь $\partial H_{\text{д}}(Q)/\partial Q > 0$, что составляет необходимое условие помпажа.

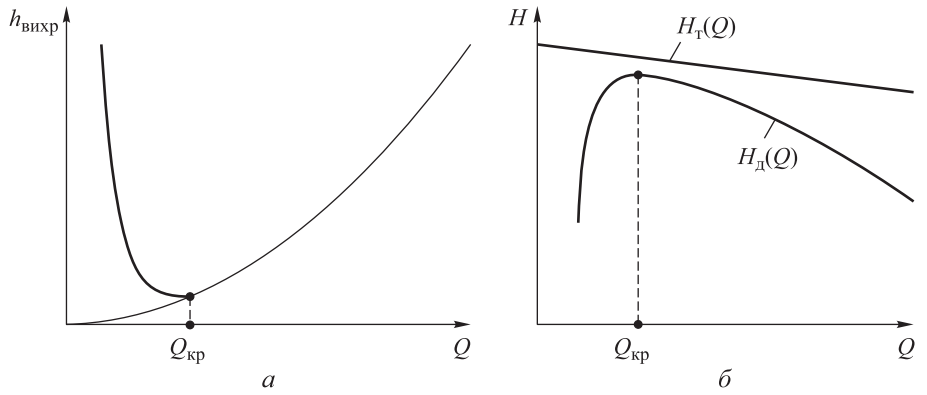


Рис. 1. Характер зависимости гидравлических вихревых потерь $h_{вихр}(Q)$ (*а*) и образование восходящей ветви на действительной напорной характеристике нагнетателя $H_д(Q)$ (*б*)

В настоящее время наряду с такими формами неустойчивости как помпаж вращающийся срыв и флаттер как никогда ранее остро проявляется проблема термоакустической неустойчивости, в частности вибрационного горения топлива в камерах сгорания теплоэнергетических установок. При решении этих задач в первую очередь обращают внимание на экономические и экологические требования. Возможности дальнейшего совершенствования теплоэнергетических установок, базирующихся на хорошо изученном стационарном процессе горения, ограничены, поэтому необходимо осваивать новые энергосберегающие технологии. В этом направлении весьма перспективной представляется реализация в теплоэнергетических установках процессов пульсирующего горения. Такой режим горения обеспечивает максимальную полноту тепловыделения топлива, позволяет существенно интенсифицировать тепломассообменные процессы при использовании получаемого теплоносителя и сократить требуемый удельный объем камеры для сжигания топлива. Как следствие, уменьшается металлоемкость конструкции, сокращаются затраты на монтаж и обслуживание теплоэнергетических установок. Кроме того, продукты сгорания отвечают самым жестким экологическим требованиям. Поэтому не случайно, что во многих лабораториях ведутся интенсивные исследования в области проектирования и внедрения в технологические процессы теплоэнергетических установок на основе вибрационного горения.

Широкое внедрение устройств вибрационного горения сдерживается отсутствием надежной теории их рабочего процесса для расчета конструктивных параметров при их проектировании.

В системах с локальным теплоподводом усвоенная теплота приводит к повышению температуры потока, что, в свою очередь, влечет

изменения теплофизических свойств теплоносителя, в частности меняется его вязкость и плотность. Это приводит к изменению гидродинамического сопротивления, которое при определенных условиях с увеличением скорости движения теплоносителя не возрастает, а убывает, т. е. возникает так называемое отрицательное сопротивление. Движение теплоносителя осуществляется под напором, который возрастает с увеличением скорости теплоносителя, что приводит к неустойчивости и в дальнейшем к возбуждению автоколебаний.

При описании термоакустических автоколебаний в некоторых явлениях был использован механизм запаздывания [3]. Неустойчивость кипения связывалась с зоной многозначности (нисходящей ветвью) на зависимости гидравлических потерь от расхода [4], которая определялась экспериментально. Природа образования области многозначности гидравлического сопротивления при парообразовании в теории мало изучена.

Введение феноменологического запаздывания процесса горения сыграло выдающуюся роль в развитии теории вибрационного горения. М.С. Натанзон [5] первым использовал понятие постоянного времени запаздывания, исследуя низкочастотную неустойчивость горения. Л. Крокко [6] ввел в рассмотрение переменное время запаздывания (чувствительное к колебаниям давления) и на его основе разработал механизм высокочастотной неустойчивости горения в жидкостном реактивном двигателе.

В работе [7] приведены феноменологические рассуждения, показано, что дестабилизирующая роль вязкости является следствием закона запаздывания в передаче действия в вязкой среде, а это запаздывание может изменить знак эффективного трения, т. е. привести к появлению эффекта отрицательного трения.

В статье [8] рассмотрен процесс образования эффекта отрицательного сопротивления, приводящего к самовозбуждению автоколебаний в потоке жидкости с экспоненциальной зависимостью ее вязкости от температуры, причиной которых является ее саморазогрев.

Механизм отрицательного сопротивления в жидкости также является причиной периодической работы сифона или лопастного насоса в режиме разрывных (релаксационных) автоколебаний [9].

Обоснование запаздывания $\tau_п$ парообразования, которое наряду с зоной многозначности гидравлических потерь составляет механизм неустойчивости стационарного режима парообразования, приведено в работе [10].

На сегодняшний день с появлением эффективных алгоритмов численного интегрирования [11] и методов CFD-моделирования (Computational Fluid Dynamics) стал возможным численный анализ многих задач гидрогазодинамики. Однако расчет автоколебаний по прямым

уравнениям гидрогазодинамики даже в этом случае сопряжен со значительными вычислительными трудностями, которые можно исключить при рассмотрении приближенных упрощенных математических моделей.

Таким образом, актуальной является задача построения простых эффективных алгоритмов для приближенного определения параметров автоколебаний, возбуждающихся в потенциально неустойчивых элементах различных теплоэнергетических систем.

Постановка задачи. Рассмотрим теоретическую модель самовозбуждения автоколебаний газа при его напорном движении, создаваемом нагнетателем в горизонтальном канале. При этом также предположим, что газ локально подогревается (рис. 2).

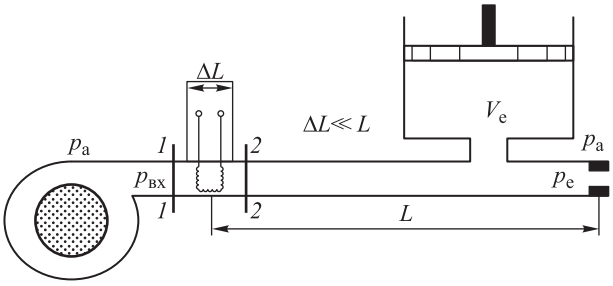


Рис. 2. Схема пневмосистемы с нагнетателем и подогревом газа на напорной магистрали:
1 — сечение до зоны теплоподвода;
2 — сечение после подвода теплоты

Как будет показано далее, именно благодаря теплоподводу на напорной магистрали возможно возбуждение продольных автоколебаний газа даже при монотонно убывающей (устойчивой) напорной характеристике нагнетателя, что, как известно, исключает возбуждение помпажных автоколебаний [1, 2].

Уравнения, описывающие автоколебания в рассматриваемой динамической системе. Запишем уравнение изменения импульса массы газа, заключенного в проточной части рассматриваемой динамической системы (см. рис. 2):

$$\rho L \frac{dw}{dt} = \left(p_{вх} - p_е\right) - h_{тр} - h_т. \qquad (1)$$

Здесь ρ — плотность; L — длина трубопровода; d — диаметр трубопровода, w — скорость движения газа после его нагрева; t — время; $p_{вх}$ — давление после нагнетателя; $p_е$ — давление в емкости перед дросселем; $h_{тр} = \lambda(L/d)\rho(w^2/2)$ — гидравлические потери по длине канала (где λ — коэффициент гидравлических потерь по

длине канала); $h_{\text{т}} = (\rho_{\text{вх}} w_{\text{вх}}^2)/2\left[1-\left(T/T_{\text{вх}}\right)^2\right]$ — местное гидравлическое сопротивление зоны теплоподвода (тепловое сопротивление) [12] ($T_{\text{вх}}$, T — температура газа до и после его нагрева).

Учитывая, что $p_{\text{вх}} - p_{\text{а}} = H\left(Q_{\text{вх}}\right)$, где $p_{\text{а}}$ — давление в окружающей среде; $H\left(Q_{\text{вх}}\right)$ — напорная характеристика нагнетателя ($Q_{\text{вх}}$ — объемный расход газа на выходе из нагнетателя перед зоной теплоподвода), уравнение движения (1) окончательно представим в форме

$$L_{\text{а}} \frac{dQ}{dt} = F\left(Q\right) - P. \tag{2}$$

Здесь $L_{\text{а}} = \rho L/S$ — акустическая масса трубопровода [1]; $Q = Sw$ — объемный расход газа после зоны теплоподвода; $F\left(Q\right) = H\left(Q_{\text{вх}}\right) - h_{\text{тр}}\left(Q\right) - h_{\text{т}}\left(Q\right)$ — напорная характеристика теплоподвода [13, 14]; $P = p_{\text{е}} - p_{\text{а}}$.

Обозначим через W мощность электронагревателя. Тогда уравнение энергии с учетом тепловых потерь через боковую стенку трубопровода может быть записано в следующем виде [8]:

$$c_p \rho L S \frac{dT}{dt} = c_p \rho S w\left(T_{\text{вх}} - T\right) - \alpha S_{\text{бок}}\left(T - T_{\text{а}}\right) + W, \tag{3}$$

где c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; $S = \pi d^2/4$ — площадь поперечного сечения трубопровода; α — коэффициент теплоотдачи единицы поверхности; $S_{\text{бок}} = \pi d L$ — площадь боковой поверхности трубопровода; $T_{\text{а}}$ — температура окружающей среды.

Уравнение, выражающее закон сохранения массы в рассматриваемом случае, может быть записано в виде

$$dm = \left(\rho Q - \rho_{\text{е}} Q_{\text{вых}}\right) dt, \tag{4}$$

где m — масса газа в объеме $V_{\text{е}}$; $\rho_{\text{е}}$ — плотность газа в объеме $V_{\text{е}}$; $dm = V_{\text{е}} d\rho_{\text{е}}$. Полагаем, что процесс в объеме $V_{\text{е}}$ является адиабатическим [1]. Связь между плотностью и давлением при этом выражается соотношением $p_{\text{е}} / \rho_{\text{е}}^k = \text{const}$.

Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$k \frac{d\rho_{\text{е}}}{\rho_{\text{е}}} = \frac{dp_{\text{е}}}{p_{\text{е}}}.$$

Откуда, воспользовавшись уравнением состояния $p_{\text{е}} = \rho_{\text{е}} TR$ (R — газовая постоянная) и известной формулой $c = \sqrt{kRT}$ для определения скорости распространения звука, с учетом того, что $p_{\text{а}} = \text{const}$, получим представление для дифференциала плотности газа в объеме $V_{\text{е}}$:

$$d\rho_{\text{е}} = \frac{\rho_{\text{е}}}{kp_{\text{е}}} d\left(p_{\text{е}} - p_{\text{а}}\right) = \frac{1}{c^2} dP.$$

Наконец, воспользовавшись гидравлической характеристикой дросселя:

$$p_{\text{е}} - p_{\text{а}} = k_{\text{др}} Q_{\text{вых}}^2, \tag{5}$$

где $k_{\text{др}}$ — коэффициент гидравлических потерь на дросселе. Тогда запишем уравнение (4):

$$C_{\text{а}} \frac{dP}{dt} = Q - \phi\left(P\right), \tag{6}$$

где $C_{\text{а}} = \dfrac{V_{\text{е}}}{\rho c^2}$ — акустическая гибкость; $\varphi\left(P\right) = k_{\text{е}}\sqrt{P}$ — обращение характеристики дросселя (5) ($k_{\text{е}} = \rho_{\text{е}} / \left(\rho\sqrt{k_{\text{др}}}\right)$) [1].

Таким образом, для определения параметров рассматриваемых автоколебаний получена нелинейная автономная динамическая система (2), (3), (6). Однако в состав данной системы уравнений кроме акустических параметров пневмосистемы (рис. 1) $L_{\text{а}}$, $C_{\text{а}}$ и напорной характеристики нагнетателя $H\left(Q_{\text{вх}}\right)$ входят дополнительные слагаемые: тепловое сопротивление $h_{\text{т}}\left(Q\right)$ и напорная характеристика теплоподвода $F\left(Q\right)$. Расчет последних характеристик требует проведения некоторых предварительных рассуждений.

Тепловое сопротивление при изобарном теплоподводе к газу. В работе [15] было установлено, что подвод тепловой энергии даже к невязкому газу приводит к возникновению особого вида сопротивления, названного (возможно, не совсем удачно) тепловым сопротивлением. В этой же монографии тепловое сопротивление было объяснено с точки зрения термодинамики.

Б.В. Раушенбах [16], используя уравнение Бернулли, получил выражение для теплового сопротивления, возникающего при теплоподводе к жидкости. Это выражение было положительным и, таким образом, не могло приводить к неустойчивости стационарного течения жидкости. Было сделано заключение: «Если теплоподвод бу-

дет колебаться около нуля, то на поток будет действовать то положительное, то отрицательное тепловое сопротивление. Если при этом увеличению скорости течения будет соответствовать уменьшение сопротивления, то система будет раскачиваться» [16]. Однако во многих случаях потеря устойчивости стационарного течения и самовозбуждение автоколебаний имеют место и при постоянной мощности подвода теплоты [13].

Как отмечено выше, для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы с увеличением скорости течения тепловое сопротивление уменьшалось, а с ее уменьшением — увеличивалось. Отрицательное сопротивление является одним из наиболее известных механизмов возбуждения автоколебаний [16].

Рассмотрим установившееся одномерное течение идеального газа в горизонтальном цилиндрическом канале, к которому на определенном участке подводится теплота. При этом подвод теплоты к газу предполагается при постоянном давлении, а движение газа создается нагнетателем, расположенным на входе в канал (рис. 2). Для определения теплового сопротивления воспользуемся уравнением энергии в форме первого начала термодинамики. Рассмотрим произвольные сечения канала 1 — 1 до и 2 — 2 после зоны подвода теплоты (рис. 2). Тогда, согласно уравнению энергии [12]

$$q+\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{w_1^2}{2}+u_1=\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{w_2^2}{2}+u_2+\Delta h_{\text{т}}. \qquad (7)$$

Здесь q — удельный тепловой поток, p_i — давление, ρ_i — плотность, w_i — скорость, u_i — внутренняя энергия единицы массы газа в сечении канала с номером $\left(i=\overline{1,\ 2}\right)$; $\Delta h_{\text{т}}$ — потери энергии из-за теплового сопротивления.

При изобарном подводе теплоты $q=c_p\left(T_2-T_1\right)$, где $c_p=kc_v$ — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении (c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; k — показатель адиабаты); T — температура газа. Также воспользовавшись уравнением состояния $p=\rho RT$ и уравнением Майера $c_p-c_v=R$ (R — газовая постоянная), получаем соотношения:

$$\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}=R\left(T_2-T_1\right),\ \ R\left(T_2-T_1\right)=c_v\left(k-1\right)\left(T_2-T_1\right),$$

$$u_2-u_1=c_v\left(T_2-T_1\right).$$

Отметим, что в приведенных формулах рассмотрены средние массовые теплоемкости на интервале температур $T_1...T_2$. Однако за-

висимость теплоемкости газа от температуры в сравнительно небольших интервалах ее изменения достаточно слабая [17]. С учетом этого из формулы (1) следует:

$$\Delta h_{\text{т}} = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}.$$

Далее, учитывая, что $p_1 = p_2$, и используя уравнения состояния и неразрывности $S_1\rho_1 w_1 = S_2\rho_2 w_2$ (S_i — площадь сечения канала с номером $\left(i = \overline{1,\ 2}\right)$), получается следующее выражение для разности удельных кинетических энергий газа в рассматриваемых сечениях канала:

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = \frac{w_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\right].$$

Окончательно потери энергии из-за теплового сопротивления определяются соотношением

$$\Delta h_{\text{т}} = \frac{w_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\right].$$

Следовательно, потери давления, т. е. собственно тепловое сопротивление $h_{\text{т}} = \rho_1 \Delta h_{\text{т}}$ в канале постоянного сечения, определяются выражением

$$h_{\text{т}} = \frac{\rho_1 w_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Построение напорной характеристики теплоподвода. Для проведения расчетов параметров автоколебаний с помощью полученной выше динамической системы уравнений (2), (3)–(6) необходимо предварительно построить напорную характеристику теплоподвода. Для этого воспользуемся принципом иерархии времен релаксации [8]. Предположим, что самым малым временем в рассматриваемой задаче является время установления температуры внутри трубы. Соответственно, будем считать, что уравнение энергии (3) стационарно:

$$W = c_p \rho S w \left(T - T_{\text{вх}}\right) + \alpha S_{\text{бок}} \left(T - T_{\text{а}}\right). \tag{9}$$

Учитывая, что $c_p = k c_v$, а также приведенную ранее зависимость от температуры для удельной массовой теплоемкости $c_v\left(T\right)$, приходим к аппроксимации

$$c_p(T) \approx aT + b, \ (a, b = \text{const}). \tag{10}$$

Из выражений (9), (10) несложно получить явное представление для температуры

$$T = \theta(Q), \ \theta(Q) = -\theta_0(Q) + \sqrt{\theta_0^2(Q) - \theta_1(Q)}, \tag{11}$$

где

$$\theta_0(Q) = \frac{1}{2}\frac{\rho_{\text{вх}} T_{\text{вх}}(b - aT_{\text{вх}})Q - \alpha S_{\text{бок}} T_{\text{а}} - W}{a\rho_{\text{вх}} T_{\text{вх}} Q + \alpha S_{\text{бок}}},$$

$$\theta_1(Q) = \frac{-b\rho_{\text{вх}} T_{\text{вх}}^2 Q}{a\rho_{\text{вх}} T_{\text{вх}} Q + \alpha S_{\text{бок}}}.$$

Далее, воспользовавшись уравнением неразрывности $\rho_{\text{вх}} w_{\text{вх}} = \rho w$, в рассматриваемой задаче для характеристик сопротивлений как функций объемного расхода нагретого газа $Q = wS$ окончательно получим:

$$h_{\text{т}}(Q) = k_{\text{т}} Q^2, \ k_{\text{т}}(Q) = \frac{\rho_{\text{вх}}}{2S^2}\left[1 - \left(\frac{\theta(Q)}{T_{\text{вх}}}\right)^2\right], \tag{12}$$

$$h_{\text{тр}}(Q) = k_{\text{тр}} Q^2, \ k_{\text{тр}}(Q) = \frac{L}{d}\frac{\rho_{\text{вх}} T_{\text{вх}}}{2S^2}\frac{\lambda(\text{Re})}{\theta(Q)}. \tag{13}$$

Здесь $\lambda = \lambda(\text{Re})$ — коэффициент гидравлических потерь по длине гладкой трубы, определяемый в зависимости от режима движения из соотношений:

$$\lambda(\text{Re}) = \begin{cases} \dfrac{64}{\text{Re}}, \ \text{при } \text{Re} \le \text{Re}_{\text{кр}} \ (\text{ламинарный режим}); \\ \dfrac{0{,}3164}{\text{Re}^{0{,}25}}, \ \text{при } \text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}} \ (\text{турбулентный режим}), \end{cases}$$

где $\text{Re} = \dfrac{wd}{\nu}$ — число Рейнольдса; критическое число Рейнольдса для гидравлически идеальных труб $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 2320$ (ν — кинематический коэффициент вязкости газа, зависящий от температуры T и определяемый по таблицам теплофизических свойств газов [17]).

При этом воспользовавшись, например, сплайн-аппроксимацией, коэффициент ν можно представить в виде известной непрерывной

функции от температуры $\nu = f(T)$. Следовательно, согласно выражению (11) для числа Рейнольдса Re, получим

$$\mathrm{Re}(Q) = \frac{dQ}{Sf(T)},$$

где $T = \theta(Q)$.

С учетом зависимостей (12), (13) при заданной напорной характеристике вентилятора $H(Q_{\text{вх}})$ напорную характеристику теплоподвода $F(Q)$ можно рассчитать теоретически с помощью формулы

$$F(Q) = H(Q_{\text{вх}}) - h_{\text{тр}}(Q) - h_{\text{т}}(Q), \tag{14}$$

где $Q_{\text{вх}} = (\rho / \rho_{\text{вх}})Q$ $\left(\rho / \rho_{\text{вх}} = T_{\text{вх}} / T,\ T = \theta(Q)\right)$.

Отметим, что в отсутствие теплоподвода коэффициенты пропорциональности $k_{\text{т}}$ и $k_{\text{тр}}$ (более того $k_{\text{т}} = 0$) в соответствующих характеристиках гидравлических сопротивлений являются постоянными. Однако из-за подвода теплоты эти коэффициенты, согласно выражениям (12), (13), становятся переменными. Поэтому в последнем случае при определенных рассмотренных ниже условиях возможно проявление эффекта отрицательного сопротивления. В этом случае на некотором интервале изменения расхода $Q_1 \le Q \le Q_2$ выполняется неравенство $\partial h(Q)/\partial Q < 0$, т. е. при увеличении расхода Q из-за теплоподвода гидравлическое сопротивление $h(Q)$ не возрастает, а, наоборот, уменьшается, что приводит к появлению неустойчивости.

На рис. 3 приведены графики зависимостей $h_{\text{тр}}(Q)$ и $h_{\text{т}}(Q)$ при различных мощностях W электронагревателя, где качестве теплоносителя был рассмотрен воздух. Также для определенности полагались следующие геометрические размеры пневмосистемы (рис. 2): $d = 0{,}05$ м, $L = 2{,}5$ м. На рис. 4 приведены графики зависимости $h_{\text{тр}}(Q)$ при различных значениях коэффициента теплоотдачи α. Тепловое сопротивление $h_{\text{т}}(Q)$ от коэффициента теплоотдачи α не зависит. Из данных графиков видно, что с ростом мощности W эффект отрицательного сопротивления усиливается, а с увеличением α — ослабевает.

На рис. 5 приведен график напорной характеристики теплоподвода (см. рис. 2). Отметим, что, как следует из формулы (14), именно области отрицательных сопротивлений на гидравлических характе-

ристиках $h_{\text{тр}}(Q)$ и $h_{\text{т}}(Q)$ приводят к появлению на напорной характеристике теплоподвода $F(Q)$ восходящей (неустойчивой) ветви, определяемой неравенством $dF(Q)/dQ > 0$.

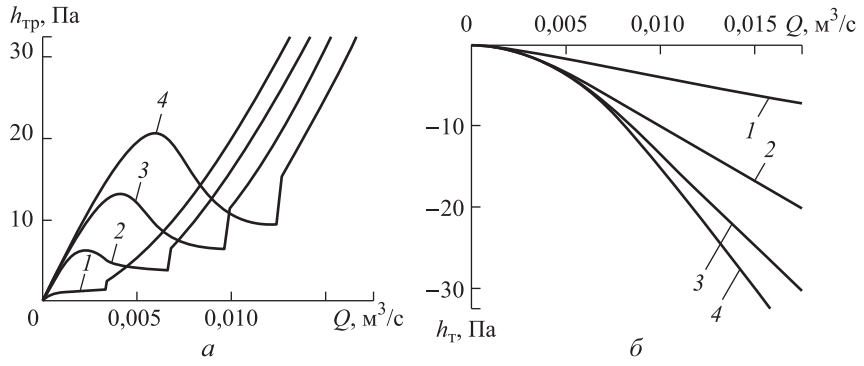


Рис. 3. Графики зависимости гидравлических характеристик $h_{\text{тр}}(Q)$ (*а*) и $h_{\text{т}}(Q)$ (*б*) от мощности спирали электронагревателя W, кВт: *1* — 0,5; *2* — 1,5; *3* — 2,5; *4* — 3,5

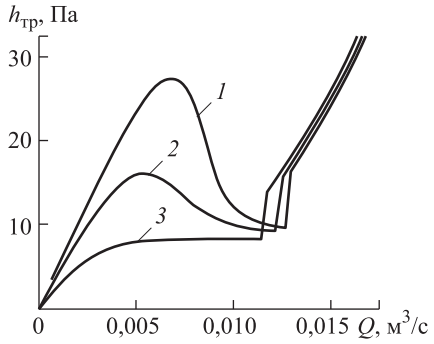


Рис. 4. График зависимости гидравлической характеристики $h_{\text{тр}}(Q)$ от коэффициента теплоотдачи α, Вт/м^{2}К: *1* — 0; *2* — 0,5; *3* — 1,5

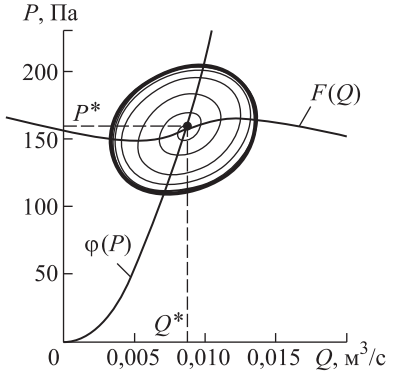


Рис. 5. Напорная характеристика теплоподвода и предельный цикл автоколебаний газа в пневмосистеме

Предполагается, что в пневмосистеме (см. рис. 2) используется вентилятор с монотонно убывающей напорной характеристикой $H(Q_{\text{вх}}) \approx H_0 - |k| Q_{\text{вх}}^3$ ($H_0, k = \text{const}$). В этом случае, согласно теории помпажа [1], при отсутствии теплоподвода в пневмосистеме возбуждение автоколебаний невозможно ни при каких допустимых значениях ее акустических параметров L_a и C_a. Ниже будет показано, что

образование восходящей ветви на напорной характеристике теплоподвода $F(Q)$ является причиной возбуждения автоколебаний в рассматриваемой задаче.

Условия самовозбуждения автоколебаний при теплоподводе. Для проведения анализа устойчивости удобно в динамической системе уравнений (2), (6) перейти к новым безразмерным переменным, полагая, что

$$x = k_1 Q/Q^*, \; y = k_2 P/P^*, \; \tau = t/\sqrt{L_a C_a}, \tag{15}$$

где параметры Q^* и P^* определяются на стационарном режиме, т. е. из системы уравнений (2), (6), в которой $dP/dt = 0$ и $dQ/dt = 0$; k_1 и k_2 — безразмерные масштабирующие множители; τ — безразмерное время. Введение последних множителей позволяет при соответствующем их выборе повысить устойчивость численного интегрирования автоколебательных решений приведенной ниже динамической системы (16). В новых переменных (15) рассматриваемую динамическую систему (2), (6) можно записать в виде

$$r\frac{dx}{d\tau} = J(x) - y, \; \frac{1}{r}\frac{dy}{d\tau} = x - \psi(y), \tag{16}$$

где $r = \frac{k_1}{k_2}\frac{Q^*}{P^*}Z$ — безразмерное волновое сопротивление ($Z = \sqrt{\frac{L_a}{C_a}}$ — волновое сопротивление колебательного контура пневмосистемы (см. рис. 2)); $J(x) = \frac{k_2}{P^*}F\left(\frac{Q^*}{k_1}x\right)$ — безразмерная напорная характеристика теплоподвода; $\psi(y) = \frac{k_1}{Q^*}\varphi\left(\frac{P^*}{k_2}y\right)$ — безразмерная характеристика дросселя. Полученная динамическая система (16) имеет особую точку (положение равновесия), определяемую на фазовой плоскости $R^2\{x, y\}$ координатами (k_1, k_2). Для самовозбуждения автоколебаний необходимо, чтобы данное положение равновесия было неустойчивым. Рассмотрим волновые возмущения

$$x(\tau) = k_1 + \xi\exp(\lambda\tau), \; y(\tau) = k_2 + \eta\exp(\lambda\tau), \tag{17}$$

где λ — характеристический показатель Ляпунова; ξ, η — произвольные константы. Подставив выражения (17) в систему (16), после

выполнения стандартной процедуры линеаризации, для показателя Ляпунова λ получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \left(r\tilde{\psi} - \frac{\tilde{J}}{r} \right)\lambda + 1 - \tilde{J}\tilde{\psi} = 0. \tag{18}$$

Здесь $\tilde{\psi} = \left.\dfrac{d\psi(y)}{dy}\right|_{y=k_2}$, $\tilde{J} = \left.\dfrac{dJ(x)}{dx}\right|_{x=k_1}$.

Таким образом, согласно критерию Рауса — Гурвица, устойчивость стационарного режима определяется положительностью коэффициентов характеристического полинома (18)

$$\tilde{J}\tilde{\psi} < 1, \ \ \tilde{J}/\tilde{\psi} < r^2. \tag{19}$$

Условия неустойчивости получаются как отрицание условий (19) и, как несложно проверить, имеют место только при выполнении неравенства $\tilde{J} > 0$, что, согласно системе (15), эквивалентно неравенству $dF\left(Q^*\right)/dQ > 0$.

Предельный цикл (изолированное замкнутое решение) уравнения интегральных кривых, которое для системы (16) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = r^2 \frac{x - \psi(y)}{J(x) - y}, \tag{20}$$

позволяет определить амплитуду автоколебаний (см. рис. 5).

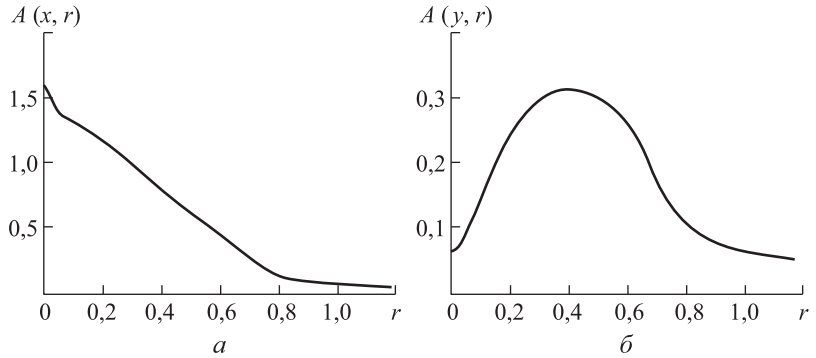


Рис. 6. Графики зависимости амплитуд автоколебаний:
а — $A(x,r)$; *б* — $A(y,r)$

На рис. 6 приведены графики зависимости амплитуд автоколебаний $A(y,r)$ и $A(x,r)$ соответственно безразмерных давления и расхода от безразмерного волнового сопротивления r, из которых сле-

дует, что при увеличении волнового сопротивления пневмосистемы апмлитуда автоколебаний расхода газа уменьшается. При этом зависимость амплитуды автоколебаний давления имеет унимодальный характер (см. рис. 6, *б*).

Волновое сопротивление Z выражается через объем V_e присоединенной емкости (см. рис. 2) зависимостью $Z = \rho c S^{-1} \gamma^{1/2}$, $\gamma = V V_e^{-1}$, $V = LS$.

Варьируя дополнительный объем V_e, можно как интенсифицировать (см. рис. 6, *б*), так и устранять автоколебания давления в пневмосистеме (см. рис. 2).

Заключение. Установлено, что локальный подвод теплоты к газу при его напорном перемещении нагнетателем даже с устойчивой монотонно убывающей напорной характеристикой приводит к самовозбуждению продольных автоколебаний. Причина их самовозбуждения — проявление эффекта отрицательного сопротивления, приводящего к возникновению нисходящих ветвей на соответствующих гидравлических характеристиках, определяющих потери напора по длине канала и на местном гидравлическом сопротивлении зоны теплоподвода.

Полученная математическая модель рассмотренных автоколебаний формально совпадает с уравнениями теории помпажа в одноступенчатом компрессоре [1]. В состав уравнений теории помпажа, полученных в статье [1], входит напорная характеристика нагнетателя. В полученной математической модели в рассмотрение введена напорная характеристика теплоподвода. При этом напорная характеристика нагнетателя характеризует часть энергии вращения его привода, переходящую в напор потока, а напорная характеристика теплоподвода определяет часть подведенной к потоку газа теплоты, которая переходит в его напор.

В работе [1] установлено, что возбуждение автоколебаний помпажа возможно только при наличии восходящей (неустойчивой) ветви на напорной характеристике нагнетателя. Проведенный в данной работе анализ позволил установить аналогичное заключение для автоколебаний газа, возбуждаемых теплоподводом. Возбуждение данных автоколебаний возможно только в области восходящей ветви напорной характеристики теплоподвода.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кампсти Н. *Аэродинамика компрессоров.* Москва, Мир, 2000, 688 с.

[2] Гоцуленко В.В., Гоцуленко В.Н. Автоколебания (помпаж) компрессора при переходе распределенной сети в систему с дискретными параметрами. *Математическое моделирование*, 2011, № 1 (24), с. 43–47.

[3] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Проблема термоакустических колебаний и вибрационного горения. *Техническая теплофизика и промышленная теплоэнергетика*, 2009, вып. 1, с. 5–15.

[4] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Периодические движения теплоносителя в моделях элементов парогенераторов. *Промышленная теплотехника*, 2010, т. 32, № 4, с. 33–42.

[5] Натанзон М.С. *Неустойчивость горения*. Москва, Машиностроение, 1986, 248 с.

[6] Крокко Л., Чжен Синь-и. *Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях*. Москва, Изд-во ин. лит., 1958, 351 с.

[7] Гершуни Г.З. Гидродинамическая неустойчивость. Изотермические течения. *Соросовский образовательный журнал*, 1997, № 2, с. 99–106.

[8] Мелких А.В., Селезнев В.Д. Автоколебания неизотермического течения вязкой жидкости в канале. *Теплофизика высоких температур*, 2008, т. 46, № 1, с. 100–109.

[9] Гоцуленко В.В., Гоцуленко В.Н. Особенность автоколебаний (помпажа) лопастных насосов. *Инженерно-физический журнал*, 2012, т. 85, № 1, с. 117–122.

[10] Морозов И.И. Влияние переменности теплового потока на устойчивость рабочего процесса прямоточного парогенератора. *Инженерно-физический журнал*, 1964, т. VII, № 4, с. 51–57.

[11] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 4 (8), с. 75–91.

[12] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Отрицательное тепловое сопротивление в одномерном установившемся течении совершенного невязкого газа. *Труды МФТИ*, 2014, т. 6, № 4 (24), с. 153–157.

[13] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Автоколебания в трубе Рийке при расположении ресивера на ее входе. *Теплофизика и аэромеханика*, 2014, т. 21, № 4, с. 487–496.

[14] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Расчет параметров автоколебаний в вертикальной камере горения воздухонагревателя доменной печи при неустойчивом горении. *Теплоэнергетика*, 2015, № 1, с. 59–64.

[15] Абрамович Г.Н. *Прикладная газовая динамика*. Москва, Наука, 1969, 824 с.

[16] Раушенбах Б.В. *Вибрационное горение*. Москва, Физматгиз, 1961, 500 с.

[17] Варгафтик Н.Б. *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей*. Москва, Наука, 1972, 720 с.

Статья поступила в редакцию 29.09.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Моделирование автоколебаний напорного движения газа, возбуждаемых теплоподводом. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4 (12), с. 17–33.

Басок Борис Иванович, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент НАН Украины, зам. директора Института технической теплофизики НАН Украины. e-mail: basok@ittf.kiev.ua

Гоцуленко Владимир Владимирович, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник отдела теплофизических основ энергосберегающих теплотехнологий Института технической теплофизики НАН Украины. e-mail: gosul@ukr.net

Simulation of pressure gas flow self-oscillation excited by heat supply

© B.I. Basok, V.V. Gotsulenko

Institute of Engineering Thermophysics of Ukraine National Academy of Sciences, Ukraine, 03057, Kiev

We obtained a mathematical model for determining the parameters of longitudinal self-oscillations, excited in the pressure gas flow at local flow heat supply. In our research we established that under certain conditions the gas heat supply alters the flow hydraulic characteristics, creating the "negative" resistance effect. In this case, the self-oscillation excitation is possible even with the monotonically decreasing supercharger pressure characteristic.

Keywords: *self-oscillations, thermal resistance, heat supply pressure characteristic, surge, instability.*

REFERENCES

[1] Kampsti N. *Aerodinamika kompressorov* [Compressor aerodynamics]. Moscow, Mir Publ., 2000, 688 p.

[2] Gotsulenko V.V., Gotsulenko V.N. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2011, no. 1 (24), pp. 43–47.

[3] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Tekhnicheskaya teplofizika i promyshlennaya teploenergetika — Technical thermal physics and industrial heat power engineering*, 2009, no. 1, pp. 5–15.

[4] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Promyshlennaya teplotekhnika — Industrial Heat Engineerin*g, 2010, vol. 32, no. 4, pp. 33–42.

[5] Natanzon M.S. *Neustoichivost goreniya* [Combustion instability]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986, 248 p.

[6] Krokko L., Chzhen Sin-i. *Teoriya neustoychivosti goreniya v zhidkostnykh raketnykh dvigatelyakh* [The theory of combustion instability in liquid rocket engines]. Moscow, Izd. in. lit. Publ., 1958, 351 p.

[7] Gershuni G.Z. *Sorosovskiy obrazovatelnyy zhurnal — Soros Educational Journal*, 1997, no. 2, pp. 99–106.

[8] Melkikh A.V., Seleznev V.D. *Teplofizika vysokikh temperatur — High Temperature*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 100–109.

[9] Gotsulenko V.V., Gotsulenko V.N. *Inzhenerno-fizicheskyi zhurnal — Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2012, vol. 85, no 1, pp. 117–122.

[10] Morozov I.I. *Inzhenerno-fizicheskyi zhurnal — Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1964, vol. 7, no. 4, pp. 51–57.

[11] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 4 (8), pp. 75–91.

[12] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Trudy MFTI — Proceedings of MIPT*, 2014, vol. 6, no 4 (24), pp. 153–157.

[13] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Teplofizika i aeromekhanika — Thermophysics and Aeromechanics*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 487–496.

[14] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Teploenergetika — Thermal Engineering*, 2015, no. 1, pp. 59–64.

[15] Abramovich G.N. *Prikladnaya gazovaya dinamika* [Applied gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 824 p.
[16] Raushenbakh B.V. *Vibratsionnoe gorenie* [Vibrating combustion]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 500 p.
[17] Vargaftik N.B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoystvam gazov i zhidkostey* [Manual on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 720 p.

Basok B.I., Dr. Sc. (Eng.), Professor, corresponding member of Ukraine National Academy of Sciences, deputy director of Institute of Engineering Thermophysics of Ukraine National Academy of Sciences. e-mail: basok@ittf.kiev.ua

Gotsulenko V.V., Dr. Sc. (Eng.), Leading Research Scientist of Department of thermophysical fundamentals of energy saving thermotechnologies, Institute of Engineering Thermophysics of Ukraine National Academy of Sciences. e-mail: gosul@ukr.net