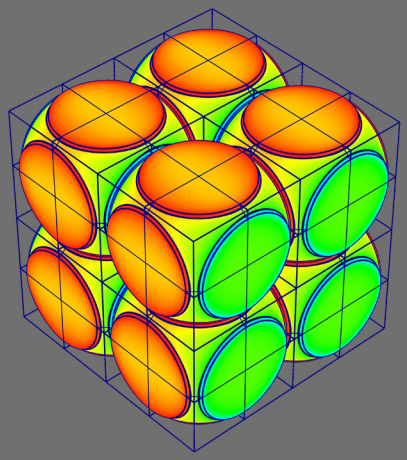
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Родников А. В. Моделирование поиска стационарных орбит космической станции в окрестности астероида сжатой формы. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №3 (11), с. 110-118

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/111/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:47

УДК 531.36:521.1

Моделирование поиска стационарных орбит космической станции в окрестности астероида сжатой формы

© А.В. Родников

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен численно-аналитический алгоритм поиска стационарных орбит космической станции в окрестности астероида, соответствующих положениям относительного равновесия станции в плоскости, которая образована осями прецессии и собственного вращения астероида, в случае, когда астероид представляется близким к динамически симметричному твердым телом, сжатым вдоль оси динамической симметрии. Алгоритм основан на представлении гравитационного потенциала астероида композицией потенциалов двух комплексно-сопряженных точечных масс и состоит из последовательных замен переменных, сводящих задачу к аналитическому и численному решению алгебраических уравнений. Приведены некоторые факты об эволюции стационарных орбит при изменении угловой скорости прецессии.

Ключевые слова: *астероид, стационарная орбита, прецессия, твердое тело, задача трех тел, точки либрации.*

Введение. В ряде планируемых космических миссий к астероидам предполагается, что космическая станция, направленная к астероиду, будет находиться в его окрестности достаточно продолжительное время, в частности, для увода астероида с «опасной» орбиты с помощью постоянно работающего ракетного двигателя (см. [1, 2] и др.) или солнечного паруса большой площади, эффективное развертывание и функционирование которого становятся технически все более реальными (идеи алгоритма взяты из работы [3, 4] и др.). Однако малые планеты Солнечной системы имеют весьма причудливые формы, следствием чего может являться более сложное, чем перманентное вращение, их движение вокруг центра масс. В этом случае стационарные орбиты в традиционном для больших планет понимании отсутствуют. Тем не менее если астероид можно рассматривать как твердое тело, близкое к динамически симметричному, а его движение вокруг центра масс является близким к регулярной прецессии, аналогами стационарных орбит можно считать положения относительного равновесия космической станции в системе отсчета, связанной с осями прецессии и собственного вращения астероида. Находясь в таком положении равновесия, космическая станция оказывается подвижной относительно поверхности малой планеты, но остается на неизменных расстояниях от полюсов астероида, т. е. точек пересечения оси динамической симметрии с его поверхностью.

В случае, когда гравитационный потенциал астероида инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, такие относительные равновесия возможны только в плоскости, проходящей через центр масс перпендикулярно оси прецессии (треугольные равновесия), и в плоскости, образуемой осями прецессии и собственного вращения, совпадающей в данном случае с осью динамической симметрии (компланарные равновесия) [5]. Если астероид имеет форму тела, сжатого вдоль оси динамической симметрии, в соответствии с работами [6–8] его гравитационный потенциал можно аппроксимировать композицией потенциалов двух комплексно-сопряженных точечных масс, расположенных на оси динамической симметрии, но имеющих вдоль этой оси комплексно-сопряженные координаты. В таком случае движение космической станции в непосредственной близости к поверхности малой планеты можно описать в рамках комплексифицированного варианта Обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел (ООКЗТТ) [9–11].

В настоящей работе предложен алгоритм поиска компланарных равновесий в наиболее общем варианте комплексифицированной ООКЗТТ. В соответствии с принятой терминологией, такие положения равновесия называют компланарными точками либрации.

Обозначения и параметры. Предположим, что астероид является динамически симметричным твердым телом с центром масс C и осью динамической симметрии Cz, совершающим регулярную прецессию вокруг оси Cz_1 с угловой скоростью ω. Обозначим через ϑ угол нутации, т. е. угол между Cz_1 и Cz (рис. 1).

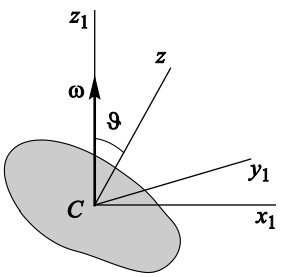


Рис. 1. Система координат и ось динамической симметрии

В нашем случае $\vartheta = \text{const}$ и является одним из параметров задачи. Для определенности будем считать $0 < \vartheta < \pi/2$. Пусть S — материальная точка, моделирующая космическую станцию, с координатами x_1, y_1, z_1 в системе осей $Cx_1y_1z_1$, вращающуюся вокруг Cz_1 с угловой скоростью ω такой, что Cz, Cz_1 и Cx_1 всегда находятся в одной плоскости. Будем искать положения относительного равновесия точки S в плоскости Cx_1z_1, т. е. ее компланарные равновесия.

Будем считать, что твердое тело, представляющее астероид, сжато вдоль оси динамической симметрии, а его гравитационный потенциал Π — композиция гравитационных потенциалов двух материальных точек O_1 и O_2 массами $m_1 = m(1 - \boldsymbol{i}\nu)/2$ и массами $m_2 = m(1 + \boldsymbol{i}\nu)/2$ соответственно. Здесь m — масса астероида; $\boldsymbol{i}$ —

мнимая единица; ν — безразмерный параметр, величину которого, не ограничивая общности рассуждений, примем неотрицательной. Точки O_1 и O_2 должны лежать на оси динамической симметрии и иметь вдоль этой оси сопряженные координаты, поэтому примем, что в системе координат $Cx_1y_1z_1$:

$$O_1\left(\frac{l(-\lambda+\boldsymbol{i})\sin\vartheta}{2},0,\frac{l(-\lambda+\boldsymbol{i})\cos\vartheta}{2}\right),O_2\left(\frac{l(-\lambda-\boldsymbol{i})\sin\vartheta}{2},0,\frac{l(-\lambda-\boldsymbol{i})\cos\vartheta}{2}\right),$$

где l — некоторое действительное расстояние; λ — безразмерный параметр. Тогда расстояния r_1 и r_2 от точки S до O_1 и O_2 соответственно могут быть записаны как $r_{1,2}=l(a\pm\boldsymbol{i}b)$, причем

$$\begin{cases} a^2-b^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\lambda(\xi\sin\vartheta+\zeta\cos\vartheta)+\dfrac{\lambda^2-1}{4}, \\ 2ab=\xi\sin\vartheta+\zeta\cos\vartheta+\dfrac{\lambda^2}{2}, \end{cases} \tag{1}$$

где безразмерные переменные ξ, η, ζ определяются равенствами:

$$x_1=l\xi,\ y_1=l\eta,\ z_1=l\zeta.$$

Условия равновесия и особенности гравитационного потенциала. Координаты компланарных точек либрации должны удовлетворять условиям равновесия точки S во вращающейся системе координат $Cx_1y_1z_1$, которые можно записать в виде:

$$\xi=\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\xi},\ \eta=0,\ \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\zeta}=0,\ \hat{\Pi}=-\alpha\frac{a+\nu b}{a^2+b^2}. \tag{2}$$

Здесь $\hat{\Pi}$ — безразмерная версия гравитационного потенциала Π; принимающий только положительные значения безразмерный параметр α определяется равенством $\alpha=Gml^{-3}\omega^{-2}$, где G — гравитационная постоянная. Таким образом, количество и положение стационарных орбит, соответствующих компланарным точкам либрации, определяются значениями четырех безразмерных параметров: ϑ, ν, λ, α.

Отметим, что потенциал Π имеет в плоскости Cx_1z_1 целый отрезок A_1A_2 особых точек. Концы этого отрезка имеют координаты:

$$A_1\left(-\frac{l}{2}\cos\vartheta-\frac{l}{2}\lambda\sin\vartheta,0,\frac{l}{2}\sin\vartheta-\frac{l}{2}\lambda\cos\vartheta\right),$$

$$A_2\left(\frac{l}{2}\cos\vartheta-\frac{l}{2}\lambda\sin\vartheta,0,\ -\frac{l}{2}\sin\vartheta-\frac{l}{2}\lambda\cos\vartheta\right).$$

В сколь угодно малой окрестности точек A_1 и A_2 гравитационный потенциал может принимать сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения, поэтому в рассматриваемом случае эти точки фактически выполняют ту же функцию, что и центр притяжения стандартного точечного потенциала.

Впервые композиция потенциалов двух комплексно-сопряженных масс была использована для аппроксимации гравитационного потенциала Земли практически одновременно в работах [6, 8]. При этом в работе [6] фактически предполагалось, что потенциал симметричен относительно центра Земли, что в нашем случае соответствует $\lambda=0$. Назовем это случаем Винти. В работе [8] предполагалось, что формально вычисленный центр масс системы комплексно-сопряженных точечных масс совпадает с центром масс Земли, что в нашем случае соответствует $\lambda=\nu$. Эту ситуацию будем называть по первым буквам фамилий авторов — случаем АГД.

Отметим, что в случае Винти координаты точек A_1 и A_2 всегда имеют различные знаки, в то время как в случае АГД в зависимости от величины угла нутации ϑ отрезок A_1A_2 может как пересекать, так и не пересекать ось прецессии.

Замены переменных и вывод основных уравнений. Перейдем к новым переменным χ и κ, определяемым по формулам:

$$\chi=\frac{2\xi}{\sin\vartheta}+\lambda,\quad \kappa=\frac{2\zeta}{\cos\vartheta}+\lambda. \tag{3}$$

Дифференцируя правые и левые части (1) по ξ и ζ, получим выражения для частных производных величин a и b по безразмерным координатам. Подставив эти выражения в формулы (2), после некоторых преобразований получим:

$$u^3+3u^2\frac{\kappa-\nu}{1+\kappa\nu}-3u-\frac{\kappa-\nu}{1+\kappa\nu}=0, \tag{4}$$

$$\alpha=\frac{(\chi-\lambda)(1+\kappa\nu)\left(1+u^2\right)^3}{8(\kappa-\chi)\left(1+\nu^2\right)\left(3u^2-1\right)}\left(\frac{\chi\sin^2\vartheta+\kappa\cos^2\vartheta}{u}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{5}$$

где $u=b/a$. Поделив равенства (1) друг на друга, получим:

$$\chi^2-\left(\frac{1}{u}-u\right)\chi-1+\operatorname{ctg}^2\vartheta\left(\kappa^2-\left(\frac{1}{u}-u\right)\kappa-1\right)=0. \tag{6}$$

Используя наряду с ранее введенными параметры δ и μ, определяемые соотношениями $\nu = \operatorname{tg} 3\delta$, $0 \le \delta < \pi/6$, $\lambda = \operatorname{tg} 3\mu$, $-\pi/6 < \mu < \pi/6$, и переменные γ и ψ ($\kappa = \operatorname{tg} 3\gamma$, $-\pi/6 < \gamma < \pi/6$ и $u = \operatorname{tg} 3\psi$, $-\pi/2 < < \psi < \pi/2$), запишем корни кубического уравнения (4) в виде $u_j = \operatorname{tg} \psi_j$, $j = 1, 2, 3$,
где

$$\psi_1 = \delta - \gamma - \frac{\pi}{3},\ \psi_2 = \delta - \gamma,\ \psi_3 = \delta - \gamma + \frac{\pi}{3}, \tag{7}$$

а корни квадратного уравнения (6) — в виде

$$\chi_{1,2} = f_{1,2}(\psi) = \operatorname{ctg} 2\psi \pm \frac{\sqrt{\cos^2 3\gamma - \cos^2 \vartheta \cos^2 (2\psi + 3\gamma)}}{\sin 2\psi \sin \vartheta \cos 3\gamma} \tag{8}$$

(при этом будем считать, что в последнем равенстве индекс 1 соответствует знаку «минус», а индекс 2 — знаку «плюс»).

Пусть $\chi_{kj} = f_k(\psi_j)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. Подставляя в правую часть формулы (5) величины χ_{kj} вместо χ и выражения u_j вместо u, после очевидных преобразований получим шесть выражений параметра α через переменную γ и другие параметры задачи, которые могут быть представлены как:

$$\alpha = \alpha_{k1}(\gamma) = -\frac{1}{8} \frac{(\chi_{k1} - \lambda)}{(\chi_{k1} - \operatorname{tg} 3\gamma)} \frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \cos^3 (\delta - \gamma - \pi/3)} \left(\frac{\chi_{k1} \sin^2 \vartheta + \operatorname{tg} 3\gamma \cos^2 \vartheta}{\operatorname{tg} (\delta - \gamma - \pi/3)} \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha = \alpha_{k2}(\gamma) = \frac{1}{8} \frac{(\chi_{k2} - \lambda)}{(\chi_{k2} - \operatorname{tg} 3\gamma)} \frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \cos^3 (\delta - \gamma)} \left(\frac{\chi_{k2} \sin^2 \vartheta + \operatorname{tg} 3\gamma \cos^2 \vartheta}{\operatorname{tg} (\delta - \gamma)} \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha = \alpha_{k3}(\gamma) = -\frac{1}{8} \frac{(\chi_{k3} - \lambda)}{(\chi_{k3} - \operatorname{tg} 3\gamma)} \frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \cos^3 (\delta - \gamma + \pi/3)} \left(\frac{\chi_{k3} \sin^2 \vartheta + \operatorname{tg} 3\gamma \cos^2 \vartheta}{\operatorname{tg} (\delta - \gamma + \pi/3)} \right)^{\frac{3}{2}},$$

где $k = 1, 2$.

Определение количества и координат компланарных равновесий. Количество компланарных равновесий совпадает с общим числом решений совокупности (9), рассматриваемой как набор уравнений относительно γ на интервале $(-\pi/6, \pi/6)$ при фиксированных значениях параметров рассматриваемой задачи. Множество таких решений можно интерпретировать как набор абсцисс точек пересечения графиков функций $\alpha_{kj}(\gamma)$, построенных в плоскости (γ, α) при фиксированных значениях δ, и ϑ с прямой $\alpha = \text{const}$,

если $-\pi/6<\gamma<\pi/6$ и $\alpha>0$. Такой набор в одной из наиболее типичных ситуаций изображен на рис. 2 (точки L_1-L_4), на котором $\gamma_1=-\pi/12-\delta/6,\ \gamma_2=\delta-\pi/6,\ \gamma_3=\pi/12-\delta/2.$

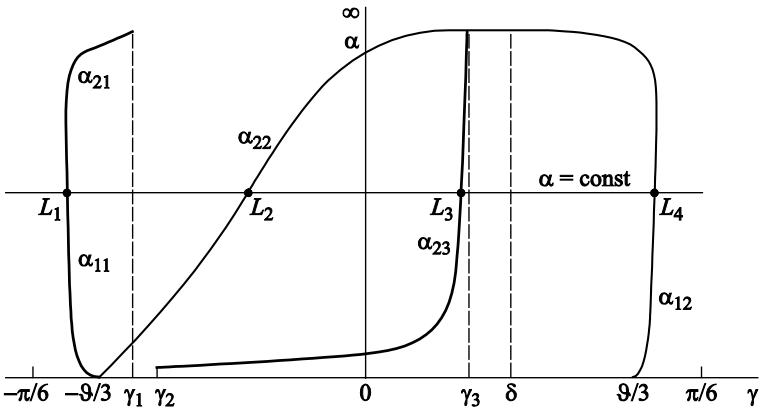


Рис. 2. Типичные графики функций $\alpha_{kj}(\gamma)$

Можно показать, что особенности графиков функций $\alpha_{kj}(\gamma)$ таковы, что минимально возможное число точек пересечения равно четырем. Однако в отдельных сравнительно редких ситуациях некоторые из функций $\alpha_{kj}(\gamma)$ оказываются немонотонными, и тогда количество пересечений возрастает.

Для определения координат каждого из компланарных равновесий сначала необходимо численно решить соответствующее уравнение $\alpha=\alpha_{kj}(\gamma),$ далее, подставив его корень (корни) в соответствующее из равенств (7), определить значение (или значения) величины ψ_j. После этого, подставив их в качестве аргументов в выражение для функции f_k (см. (8)), определить значение переменной χ и с учетом равенства $\kappa=\operatorname{tg}3\gamma$ из формул (3) вычислить координаты ξ и ζ.

Эволюция стационарных орбит при изменении угловой скорости прецессии. Диаграммы типа изображенной на рис. 2 позволяют определить пути эволюции компланарных равновесий при возрастании угловой скорости прецессии. Для этого достаточно проследить изменение значений переменной γ, соответствующих пересечениям с прямой $\alpha=\text{const}$ при изменении значения параметра α от бесконечности до нуля.

Анализ показывает, что в случае Винти вследствие симметрии потенциала компланарные точки либрации перемещаются либо из бесконечности в одну из точек $A_{1,2}$, либо между осями прецессии

и динамической симметрии, либо в окрестности отрезка CA_2. В случае АГД, кроме указанных, существуют и другие варианты такой эволюции. Так, в ситуации, изображенной на рис. 2, точка либрации, соответствующая L_1, перемещается от оси динамической симметрии к особой точке A_2, а точка, соответствующая L_3, — от оси динамической симметрии к одной из внутренних точек отрезка A_1A_2. Возможен и такой путь эволюции, как перемещение из бесконечности к оси прецессии.

Заключение. Изложенное выше позволяет заключить, что при использовании специальных переменных, алгоритм поиска стационарных орбит космической станции около прецессирующего динамически симметричного астероида сжатой формы сводится к численному поиску корней алгебраических уравнений от одной переменной. Этот же алгоритм позволяет проследить эволюцию стационарных орбит при изменении угловой скорости прецессии астероида.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивашкин В.В., Стихно К.А. О проблеме коррекции орбиты сближающегося с Землей астероида (99942) Apophis. *Доклады Академии наук*, 2008, т. 419, № 5, с. 624–627.

[2] Ивашкин В.В., Стихно К.А. О предотвращении возможного столкновения астероида Apophis с Землей. *Астрономический Вестник*, 2009, т. 43, № 6, с. 502–516.

[3] Поляхова Е.Н. *Космический полет с солнечным парусом*. Москва, URSS, 2011, 320 с.

[4] Бушуев А.Ю., Фарафонов Б.А. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 101–114.

[5] Родников А.В. О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле. *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7. № 2, с. 295–311.

[6] Aksenov Ye.P., Grebenikov Ye.A., Demin V.G. General solution of the problem of the motion of an artificial satellite in the normal field of the Earth's attraction. *Planetary and Space Science*, 1962, vol. 9, iss. 8, pp. 491–498.

[7] Демин В.Г. *Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения*. Москва, Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010, 420 с.

[8] Vinti J.P. Theory of an accurate intermediate orbit for satellite astronomy. *Journal of research of the National Bureau of Standards, Section B: Mathematics and Mathematical Physics*, 1961, 65B, no. 3, pp. 169–201.

[9] Белецкий В.В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов. *Космические исследования*, 2007, т. 45, вып. 5, с. 435–442.

[10] Белецкий В.В., Родников А.В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел. *Космические исследования*, 2008, т. 46, № 1, с. 42–50.

[11] Родников А.В. Моделирование динамики космической станции в окрестности астероида. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2 (10), с. 55–68.

Статья поступила в редакцию 09.09.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Родников А.В. Моделирование поиска стационарных орбит космической станции в окрестности астероида сжатой формы. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3 (11), с. 110–118.

Родников Александр Владимирович окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 90 научных публикаций, член European Mechanics Society (Euromech) и International Physics and Control Society (IPACS). Сфера научных интересов: прикладная небесная механика (космические тросовые системы, задача трех тел).
e-mail: springer@inbox.ru

Modelling the search for stationary space station orbits in the vicinity of an oblate-shaped asteroid

© A.V. Rodnikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

We suggest a numerical and analytical algorithm of searching for stationary space station orbits in the vicinity of an oblate asteroid, when these orbits correspond to relative equilibrium positions of the space station on the plane defined by the asteroid precession and proper rotation axes, in the case of the asteroid being represented by a solid body of an approximately dynamically symmetric shape, compressed along the axis of dynamic symmetry. The algorithm is based on representing the asteroid gravitational potential by a composition of two complex conjugate point masses and consists of sequential variable substitution steps, reducing the problem to solving algebraic equations analytically and numerically. We supply a number of facts concerning evolution of stationary orbits in cases of changes in precession angular velocity.

Keywords: *asteroid, stationary orbit, precession, solid body, three-body problem, libration points.*

REFERENCES

[1] Ivashkin V.V., Stikhno K.A. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Science*, 2008, vol. 419, no. 5. pp. 624–627.

[2] Ivashkin V.V., Stikhno K.A. *Astronomicheskiy Vestnik — Solar System Research*, 2009, vol. 43, no. 6, pp. 502–516.

[3] Polyakhova E.N. *Kosmicheskiy polet s solnechnym parusom* [Space flight using a solar sail]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2011, 320 p.

[4] Bushuev A.Yu., Farafonov B.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 101–114.

[5] Rodnikov A.V. *Nelineynaya dinamika — Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 295–311.

[6] Aksenov Ye.P., Grebenikov Ye.A., Demin V.G. *Planetary and Space Science*, 1962, vol. 9, no. 8, pp. 491–498.
[7] Demin V.G. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika v netsentralnom pole tyagoteniya* [Artificial satellite motion in a non-central gravity field]. Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Computer Research Institute Publ., 2010, 420 p.
[8] Vinti J.P. *Journal of research of the National Bureau of Standards, Section B: Mathematics and Mathematical Physics*, 1961, 65B, no. 3, pp. 169–201.
[9] Beletskiy V.V. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 5, pp. 435–442.
[10] Beletskiy V.V., Rodnikov A.V. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 42–50.
[11] Rodnikov A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2 (10), pp. 55–68.

Rodnikov A.V. graduated from Lomonosov Moscow State University, the Faculty of Mechanics and Mathematics. Dr. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of 90 scientific papers, member of European Mechanics Society (Euromech) and International Physics and Control Society (IPACS). Science research interests include applied celestial mechanics (space cable systems, three-body problem). e-mail: springer@inbox.ru