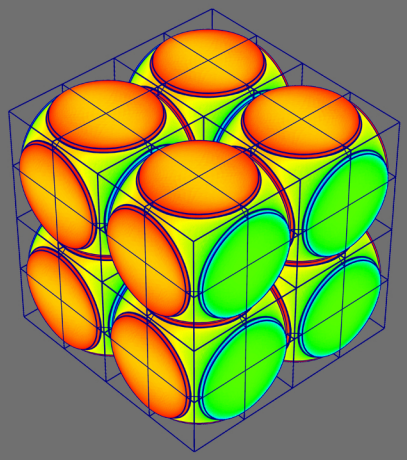
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Апельцин В. Ф., Мозжорина Т. Ю. Свойства одномерного фотонного кристалла как отражающей или волноведущей структуры в случае H-поляризованного возбуждения . Математическое моделирование и численные методы, 2014, №2 (2), с. 3-27

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/11/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.112
22.01.2026 23:04:10

УДК 537.876.4: 517.958

Свойства одномерного фотонного кристалла как отражающей или волноведущей структуры в случае *H*-поляризованного возбуждения

© В.Ф. Апельцин, Т.Ю. Мозжорина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена двумерная краевая задача о прохождении плоской электромагнитной волны через периодическую слоистую среду, имеющую структуру одномерного фотонного кристалла. Структура имеет конечное число плоскопараллельных слоев, в которой каждая ячейка периодичности состоит из двух слоев с разными действительными значениями постоянной диэлектрической проницаемости и разными толщинами. Показано, что при некотором дополнительном условии, связывающем угол падения плоской волны, толщины слоев, частоту и диэлектрические проницаемости слоев, задача решается до конца в явном виде и приводит к простым выражениям для отраженного от структуры и прошедшего сквозь нее волновых полей. При этом в случае Н-поляризованного поля, в отличие от случая Е-поля-ризации, свойства данной среды зависят от отношения толщин слоев, умноженных на их диэлектрические проницаемости (при Е-поляризации — только от отношения толщин). В результате фотонный кристалл в зависимости от частоты поля может вести себя как идеально отражающая структура при тех же отношениях толщин слоев, при которых в случае Е-поляризации он становится волноведущей структурой, и наоборот.
Произведено сравнение численных расчетов со случаем Е-поляризации.

Ключевые слова: *фотонный кристалл, плоскопараллельный слой, однородный диэлектрик, плоская волна, идеальный отражатель, волновод без потерь.*

Введение. В работе [1] приведены результаты исследования одномерного фотонного кристалла, состоящего из N ячеек периодичности, при его облучении полем E-поляризованной плоской волны. Под фотонным кристаллом подразумевают среду с периодической структурой, состоящей из ячеек постоянных значений диэлектрической проницаемости. Такая среда может быть трехмерной [2, 3], двумерной или одномерной. В одномерном случае — это бесконечная последовательность плоскопараллельных слоев из однородного диэлектрика, причем каждая ячейка периодичности состоит из двух слоев разной толщины и разных значений постоянной диэлектрической проницаемости.

В последние годы исследованию электродинамических и оптических свойств таких структур посвящено значительное число публикаций [2–5]. Если такая среда бесконечна, то она обладает строго фиксированными частотными полосами пропускания электромагнитной волны или, наоборот, полосами запирания энергии поля внутри структуры. Эти свойства, как следует из ряда работ, являются следствием теоремы Блоха и того, что волновое поле удовлетворяет в такой структуре условиям Флоке.

В случае практического применения этих свойств необходимо, разумеется, создавать такие структуры с большим, но конечным числом ячеек периодичности, для которых эта теория уже не справедлива. Однако и в конечном случае такие структуры должны обладать свойствами близкими к бесконечным, если число ячеек достаточно велико. Наиболее естественный метод теоретического исследования этих свойств подразумевает численные методы математического моделирования [6], что и делается в большинстве работ этого направления [7, 8].

В данной работе приведен аналитический подход к решению подобной задачи в случае одномерного фотонного кристалла с конечным числом слоев N, возбуждаемого H-поляризованной плоской волной. Аналогично случаю E-поляризованного возбуждения, рассмотренного в [1], удается выписать явное решение для прошедшего через структуру и отраженного от нее волновых полей, если потребовать выполнения некоторого необременительного дополнительного условия, связывающего диэлектрические проницаемости слоев ячейки периодичности и их толщины. В результате все практически важные физические свойства структуры становятся наглядными и обозримыми.

Постановка задачи и система уравнений для Фурье-образов решения. Пусть в области декартовых координат (y, z) при $z \le 0$ расположена многослойная среда с плоскими параллельными границами раздела, причем слои имеют периодичность по толщине и значению диэлектрической проницаемости ε. Элемент периодичности является двухслойной плоской полосой с толщинами слоев d_1 и d_2, общей толщиной $D = d_1 + d_2$ и с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Среда содержит N элементов периодичности. Общее число слоев — $2N$ (рис. 1).

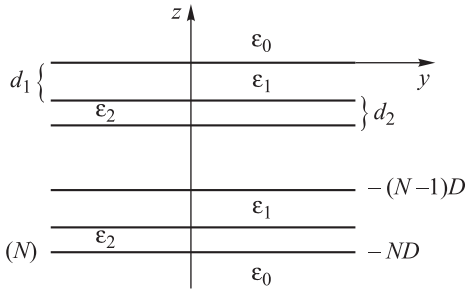


Рис. 1. Одномерный фотонный кристалл с N слоями

Структура возбуждается плоской волной $u^{(0)}(y,z) = e^{-ik_0(y\cos\alpha + z\sin\alpha)}$, присутствующей в области $z > 0$ выше структуры. Здесь же присутствует поле $u_0(y,z)$, отраженное от структуры и подлежащее определению. В области $z < -ND$ присутствует про-

шедшее поле $u_{2N+1}(y,\ z)$, также подлежащее определению. Рассматривается случай *H*-поляризации (единственная компонента магнитного поля, отличная от нуля, $H_x = u(y,\ z)$).) В каждой области постоянства ε возбуждаемое поле $u_j(y,\ z)$, $j = 0,\ ...,\ 2N+1$, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\begin{aligned}
&\Delta u^{(0)}(y,\ z) + k_0^2 u^{(0)} = 0;\\
&\Delta u_0(y,\ z) + k_0^2 u_0 = 0;\\
&\Delta u_1(y,\ z) + k_1^2 u_1 = 0;\\
&\Delta u_2(y,\ z) + k_2^2 u_2 = 0;\\
&\Delta u_3(y,\ z) + k_1^2 u_3 = 0;\\
&\Delta u_4(y,\ z) + k_2^2 u_4 = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta u_{2N-1}(y,\ z) + k_1^2 u_{2N-1} = 0;\\
&\Delta u_{2N}(y,\ z) + k_2^2 u_{2N} = 0;\\
&\Delta u_{2N+1}(y,\ z) + k_0^2 u_{2N+1} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

На границах раздела свойств однородных сред ставятся условия сшивания значений полей и их производных по *z*, соответствующие случаю *H*-поляризации ($u_j = H_x$): $u_j = u_{j+1}$, $\dfrac{\partial u_j}{\varepsilon_j \partial z} = \dfrac{\partial u_{j+1}}{\varepsilon_{j+1} \partial z}$. Первая группа условий удовлетворяется введением $2N + 1$ произвольных неизвестных функций $f_j(y)$, подчиненных условиям:

$$\begin{aligned}
&u^{(0)}(y,\ 0) + u_0(y,\ 0) = f_0(y);\\
&u_1(y,\ 0) = f_0(y);\\
&u_1(y,\ -d_1) = f_1(y);\\
&u_2(y,\ -d_1) = f_1(y);\\
&u_2(y,\ -D) = f_2(y);\\
&u_3(y,\ -D) = f_2(y);\\
&u_3(y,\ -D - d_1) = f_3(y);\\
&u_4(y,\ -2D) = f_4(y);
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{2N}(y, -(N-1)D - d_1) = f_{2N-1}(y); \qquad (2)$$

$$u_{2N}(y, -ND) = f_{2N}(y);$$

$$u_{2N+1}(y, -ND) = f_{2N}(y).$$

Дальнейшее рассмотрение удобно проводить для образов Фурье-решений в каждом слое.

Если ν — спектральный параметр преобразования Фурье по y, то решения уравнений (1) для образов $U_j(\nu, z)$, в каждом слое запишутся в виде

$$U_0(\nu, z) = A_0(\nu)e^{i\sigma_0(\nu)z};$$

$$U_1(\nu, z) = A_1(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)z} + B_1(\nu)e^{-i\sigma_1(\nu)z};$$

$$U_2(\nu, z) = A_2(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)z} + B_2(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)z};$$

$$U_3(\nu, z) = A_3(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)z} + B_3(\nu)e^{-i\sigma_1(\nu)z}; \qquad (3)$$

$$U_4(\nu, z) = A_4(\nu)\, e^{i\sigma_2(\nu)z} + B_4(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)z};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_{2N-1}(\nu, z) = A_{2N-1}(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)z} + B_{2N-1}(\nu)\, e^{-i\sigma_1(\nu)z};$$

$$U_{2N}(\nu, z) = A_{2N}(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)z} + B_{2N}(\nu)\, e^{-i\sigma_2(\nu)z};$$

$$U_{2N+1}(\nu, z) = B_{2N+1}(\nu)\, e^{-i\sigma_0(\nu)z},$$

где $\sigma_0(\nu) = \sqrt{k_0^2 - \nu^2}$; $\sigma_{1,2}(\nu) = \sqrt{k_{1,2}^2 - \nu^2}$, а краевые условия (2) для образов примут вид:

$$U_0(\nu, 0) + \sqrt{2\pi}\,\delta(\nu + k_0\cos\alpha) = F_0(\nu);$$

$$U_1(\nu, 0) = F_0(\nu);$$

$$U_1(\nu, -d_1) = F_1(\nu);$$

$$U_2(\nu, -d_1) = F_1(\nu);$$

$$U_2(\nu, -D) = F_2(\nu);$$

$$U_3(\nu, -D) = F_2(\nu);$$

$$U_3(\nu, -D - d_1) = F_3(\nu);$$

$$U_4(\nu, -D - d_1) = F_3(\nu);$$

$$
\begin{aligned}
&U_4(\nu,\ -2D) = F_4(\nu);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&U_{2N}(\nu, -(N-1)D - d_1) = F_{2N-1}(\nu);\\
&U_{2N}(\nu, -ND) = F_{2N}(\nu);\\
&U_{2N+1}(\nu, -ND) = F_{2N}(\nu),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $F_j(\nu)$ — образы Фурье-функций $f_j(y)$ в (2).

Используя (3), краевые условия (4) можно разбить на пары уравнений, из которых однозначно определяются неизвестные амплитуды $A_j(\nu)$, $B_j(\nu)$ через функции $F_j(\nu)$ (пока также неизвестные):

$$
\begin{aligned}
&A_0(\nu) + \sqrt{2\pi}\,\delta(\nu + k_0\cos\alpha) = F_0(\nu);\\
&A_1(\nu) + B_1(\nu) = F_0(\nu);\\
&A_1(\nu)e^{-i\sigma_1(\nu)d_1} + B_1(\nu)\,e^{i\sigma_1(\nu)d_1} = F_1(\nu);\\
&A_2(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)d_1} + B_2(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)d_1} = F_1(\nu);\\
&A_2(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)D} + B_2(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)D} = F_2(\nu);\\
&A_3(\nu)e^{-i\sigma_1(\nu)D} + B_3(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)D} = F_2(\nu);\\
&A_3(\nu)e^{-i\sigma_1(\nu)(D+d_1)} + B_3(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)(D+d_1)} = F_3(\nu);\\
&A_4(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)(D+d_1)} + B_4(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)(D+d_1)} = F_3(\nu);\\
&A_4(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)2D} + B_4(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)2D} = F_4(\nu);\\
&A_5(\nu)\,e^{-i\sigma_1(\nu)2D} + B_5(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)2D} = F_4(\nu);\\
&A_5(\nu)e^{-i\sigma_1(\nu)(2D+d_1)} + B_5(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)(2D+d_1)} = F_5(\nu);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{2N}(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)[(N-1)D+d_1]} + B_{2N}(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)[(N-1)D+d_1]} = F_{2N-1}(\nu);\\
&A_{2N}(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)ND} + B_{2N}(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)ND} = F_{2N}(\nu);\\
&B_{2N+1}(\nu)e^{i\sigma_0(\nu)ND} = F_{2N}(\nu).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Решив эти парные системы и два крайних одинарных уравнения, получим общее представление коэффициентов $A_j(\nu)$, $B_j(\nu)$ через $F_j(\nu)$ для четных и нечетных значений индекса j:

$$
A_{2n+1}(\nu) = e^{i\sigma_1(\nu)nD}\,\frac{F_{2n}(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)d_1} - F_{2n+1}(\nu)}{2i\sin\sigma_1(\nu)d_1};
\tag{6}
$$

$$B_{2n+1}(\nu) = e^{-i\sigma_1(\nu)nD}\,\frac{F_{2n+1}(\nu) - F_{2n}(\nu)e^{-i\sigma_1(\nu)d_1}}{2i\sin\sigma_1(\nu)d_1},$$

$n = 0, \ldots, N-1;$

$$A_{2n}(\nu) = e^{i\sigma_2(\nu)(n-1)D}\,\frac{F_{2n-1}(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)D} - F_{2n}(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)d_1}}{2i\sin\sigma_2(\nu)d_2}; \qquad (6)$$

$$B_{2n}(\nu) = e^{-i\sigma_2(\nu)(n-1)D}\,\frac{F_{2n}(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)d_1} - F_{2n-1}(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)D}}{2i\sin\sigma_2(\nu)d_2},$$

$N = 1, \ldots, N;$

$$A_0(\nu) = F_0(\nu) - \sqrt{2\pi}\,\delta(\nu + k_0\cos\alpha);\;\; B_{2N+1}(\nu) = F_{2N}(\nu)\,e^{-i\sigma_0(\nu)ND}.$$

Теперь можно выписать единообразные выражения для образов Фурье $U_j(\nu, z)$ всех полей (кроме отраженного $U_0(\nu, z)$ и прошедшего $U_{2N+1}(\nu, z)$):

$$U_{2n}(\nu, z) = e^{i\sigma_2(\nu)(n-1)D}\,\frac{F_{2n-1}(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)D} - F_{2n}(\nu)e^{i\sigma_2(\nu)d_1}}{2i\sin\sigma_2(\nu)d_2}\,e^{i\sigma_2(\nu)z} +$$

$$+ e^{-i\sigma_2(\nu)(n-1)D}\,\frac{F_{2n}(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)d_1} - F_{2n-1}(\nu)e^{-i\sigma_2(\nu)D}}{2i\sin\sigma_2(\nu)d_2}\,e^{-i\sigma_2(\nu)z};$$

$$U_{2n-1}(\nu, z) = e^{i\sigma_1(\nu)(n-1)D}\,\frac{F_{2n-2}(\nu)e^{i\sigma_1(\nu)d_1} - F_{2n-1}(\nu)}{2i\sin\sigma_1(\nu)d_1}\,e^{i\sigma_1(\nu)z} +$$

$$+ e^{-i\sigma_1(\nu)(n-1)D}\,\frac{F_{2n-1}(\nu) - F_{2n-2}(\nu)e^{-i\sigma_1(\nu)d_1}}{2i\sin\sigma_1(\nu)d_1}\,e^{-i\sigma_1(\nu)z},$$

$$n = 1, \ldots, N.$$

Систему уравнений для определения неизвестных $F_j(\nu)$ получим, используя вторую половину краевых условий на границах слоев. Приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений, из которых неоднородно только первое:

$$\left[i\frac{\sigma_0(\nu)}{\varepsilon_0}\sin\sigma_1(\nu)\,d_1 - \frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1}\cos\delta_1(n)d_1\right]F_0(\nu) + \frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1}F_1(\nu) =$$

$$= i\frac{\sigma_0(\nu)}{\varepsilon_0}\sqrt{2\pi}\,\sin\sigma_1(\nu)\,d_1\delta(\nu + k_0\cos\alpha);$$

$$\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \sin\sigma_1(\nu)d_1} F_0(\nu) - [\left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \mathrm{tg}\,\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \mathrm{tg}\,\sigma_2(\nu)d_2}\right] F_1(\nu) +$$

$$+\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \sin\sigma_2(\nu)d_2} F_2(\nu) = 0;$$

$$\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \sin\sigma_2(\nu)d_2} F_1(\nu) - \left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \mathrm{tg}\,\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \mathrm{tg}\,\sigma_2(\nu)d_2}\right] F_2(\nu) +$$

$$+ \frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \sin\sigma_1(\nu)d_1} F_3(\nu) = 0;$$

$$\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \sin\sigma_1(\nu)d_1} F_2(\nu) - \left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \mathrm{tg}\,\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \mathrm{tg}\,\sigma_2(\nu)d_2}\right] F_3(\nu) + \qquad (7)$$

$$+\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \sin\sigma_2(\nu)d_2} F_4(\nu) = 0;$$

……

$$\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \sin\sigma_1(\nu)d_1} F_{2N-2}(\nu) - \left[\frac{\sigma_0(\nu)}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \mathrm{tg}\,\sigma_2(\nu)d_2}\right] F_{2N-1}(\nu) +$$

$$+\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \sin\sigma_2(\nu)d_2} F_{2N}(\nu) = 0;$$

$$\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \sin\sigma_2(\nu)d_2} F_{2N-1}(\nu) - \left[\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \mathrm{tg}\,\sigma_2(\nu)d_2} - i\frac{\sigma_0(\nu)}{\varepsilon_0}\right] F_{2N}(\nu) = 0.$$

Матрица системы (7) имеет почти регулярную структуру, за исключением первой и последней строки. Систему (7) можно переписать в более компактной форме, если поделить все уравнения на элементы главной диагонали. Введя обозначение

$$q(\nu) = \left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \mathrm{tg}\,\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \mathrm{tg}\,\sigma_2(\nu)d_2}\right],$$

получим

$$F_0(\nu) + \frac{\sigma_1(\nu)}{i\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1} F_1(\nu) =$$

$$= \frac{i\sigma_0(\nu)\sqrt{2\pi}\sin\sigma_1(\nu)d_1\,\delta(\nu + k_0\cos\alpha)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1}; \qquad (8)$$

$$\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1}F_0(\nu)+F_1(\nu)+\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2}F_2(\nu)=0;$$

$$\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2}F_1(\nu)+F_2(\nu)+\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1}F_3(\nu)=0;$$

$$\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1}F_2(\nu)+F_3(\nu)+\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2}F_4(\nu)=0;$$

$$\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1}F_{2N-2}(\nu)+F_{2N-1}(\nu)+ \tag{8}$$

$$+\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2}F_{2N}(\nu)=0;$$

$$\frac{\sigma_2(\nu)}{\left[i\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\sigma_0(\nu)-\frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2}\right]\sin\sigma_2(\nu)d_2}F_{2N-1}(\nu)+F_{2N}(\nu)=0.$$

В еще более компактной форме систему (8) можно записать, если ввести дополнительные обозначения:

$$A_0=\frac{i\sigma_0(\nu)\sqrt{2\pi}\sin\sigma_1(\nu)d_1\,\delta(\nu+k_0\cos\alpha)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1};$$

$$p_1=\frac{\sigma_1(\nu)}{i\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1-\sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1};$$

$$p_2=\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1};$$

$$p_3=\frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2};$$

$$p_4=\frac{\sigma_2(\nu)}{\left[i\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\sigma_0(\nu)-\frac{\sigma_2(\nu)}{tg\sigma_2(\nu)d_2}\right]\sin\sigma_2(\nu)d_2};$$

$$F_0(\nu)+p_1F_1(\nu)=A_0;$$

$$p_2 F_0(\nu) + F_1(\nu) + p_3 F_2(\nu) = 0;$$
$$p_3 F_1(\nu) + F_2(\nu) + p_2 F_3(\nu) = 0;$$
$$p_2 F_2(\nu) + F_3(\nu) + p_3 F_4(\nu) = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_2 F_{2N-2}(\nu) + F_{2N-1}(\nu) + p_3 F_{2N}(\nu) = 0;$$
$$p_4 F_{2N-1}(\nu) + F_{2N}(\nu) = 0.$$

Таким образом, матрица системы (8) является трехдиагональной, порядка $2N + 1$ и имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & & \ldots & 0 \\ p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & p_3 & 1 & p_2 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1 & p_3 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 & p_2 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & & & & \\ 0 & & \ldots & & p_2 & 1 & & p_3 \\ 0 & & \ldots & & 0 & p_4 & & 1 \end{matrix} \qquad (9)$$

Структура матрицы (9) нерегулярна только из-за наличия в первой строке элемента p_1, а в последней строке — элемента p_4 . Детерминант D_{2N+1} этой матрицы можно разложить по паре элементов первой и затем последней строки. Введем обозначения $D_{2N-1}^{(p_3,\, p_2)}$, $D_{2N-2}^{(p_3,\, p_3)}$, $D_{2N-2}^{(p_2,\, p_2)}$, $D_{2N-3}^{(p_2,\, p_3)}$ для регулярных детерминантов соответствующих порядков, у которых боковые диагонали начинаются с элементов p_3 (p_2) и заканчиваются элементом p_2 (p_3). Тогда

$$D_{2N+1} = D_{2N-1}^{(p_3,\, p_2)} - p_4 p_3\, D_{2N-2}^{(p_3,\, p_3)} - p_1 p_2\, D_{2N-2}^{(p_2,\, p_2)} +$$
$$+ p_1 p_2 p_3 p_4 D_{2N-3}^{(p_2,\, p_3)}. \qquad (10)$$

Прошедшее поле. Из последнего равенства (3) следует выражение $U_{2N+1}(\nu, z) = B_{2N+1}(\nu) e^{-i\sigma_0(\nu) z}$ для образа Фурье прошедшего поля, а с учетом последнего равенства (6) имеем $U_{2N+1}(\nu, z) = F_{2N}(\nu) e^{-i\sigma_0(\nu)(z+ND)}$. При этом $F_{2N}(\nu)$ как решение алгебраической системы (8) принимает вид

$$F_{2N}(\nu) =$$

$$= D_{2N+1}^{-1}(\nu)\begin{vmatrix} 1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_0 \\ p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_3 & 1 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 & p_2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & & & p_2 & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & & & 0 & p_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если раскрыть определитель в числителе по элементам последнего столбца, то оставшийся определитель порядка $2N$ станет определителем треугольной матрицы и легко вычисляется в виде $(p_2\, p_3)^{N-1}\, p_2\, p_4$. Следовательно, $F_{2N}(\nu) = A_0\; D_{2N+1}^{-1}(\nu)(p_2\; p_3)^{N-1} p_2\; p_4$. В свою очередь,

$$U_{2N+1}(\nu, z) = A_0(\nu)\, D_{2N+1}^{-1}(\nu)(p_3)^{N-1}(p_2)^{N} p_4\; e^{-i\sigma_0(\nu)(z+ND)}. \quad (11)$$

Само прошедшее поле $u_{2N+1}(y, z)$ выписывается через обратное преобразование Фурье в виде

$$u_{2N+1}(y, z) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_0(\nu) p_2^N(\nu) p_3^{N-1}(\nu) p_4(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} e^{-i\sigma_0(\nu)(z+ND)} e^{i\nu y}\, d\nu, \quad (12)$$

и так как $A_0 =$ $A_0 = \dfrac{i\sigma_0(\nu)\sqrt{2\pi}\sin\sigma_1(\nu)d_1\,\delta(\nu + k_0\cos\alpha)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1}$ содержит δ-функцию, окончательное выражение для прошедшего поля примет вид

$$u_{2N+1}(y, z) =$$

$$= \frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 p_2^N(\alpha) p_3^{N-1}(\alpha) p_4(\alpha) e^{-ik_0(y\cos\alpha + (z+ND)\sin\alpha)}}{D_{2N+1}(\alpha)\left[ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\alpha)\cos\sigma_1(\alpha) d_1\right]}. \quad (13)$$

Здесь $p_2 = \dfrac{\sigma_1(\alpha)}{\varepsilon_1 q(\alpha)\sin\sigma_1(\alpha)d_1}$; $p_3 = \dfrac{\sigma_2(\alpha)}{\varepsilon_2 q(\alpha)\sin\sigma_2(\alpha)d_2}$, т. е. прежние выражения для этих величин, в которых ν заменяется на $-k_0\cos\alpha$ в соответствии с аргументом δ-функции.

Воспользуемся теперь выражением (10) для детерминанта $D_{2N+1}(\alpha)$ и вынесем из каждой строки каждого из детерминантов правой части фактор $\dfrac{1}{q(\alpha)}$, учитывая, что они содержат лишь члены p_2 или p_3, а также то, что этот фактор не содержат сомножители p_1, p_4, входящие в (10). Получим вместо (10) равенство

$$D_{2N+1}(\alpha) = \frac{1}{q^{2N-1}(\alpha)}\tilde{D}_{2N-1}^{(p_3,\,p_2)}(\alpha) - \frac{p_4\tilde{p}_3}{q^{2N-1}(\alpha)}\tilde{D}_{2N-2}^{(p_3,\,p_3)}(\alpha) -$$

$$- \frac{p_1\tilde{p}_2}{q^{2N-1}(\alpha)}\tilde{D}_{2N-2}^{(p_2,\,p_2)}(\alpha) + \frac{p_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3 p_4}{q^{2N-1}(\alpha)}\tilde{D}_{2N-3}^{(p_2,\,p_3)}(\alpha). \qquad (14)$$

Здесь $\tilde{p}_3 = \dfrac{\sigma_2(\alpha)}{\varepsilon_2\sin\sigma_2(\alpha)d_2}$; $\tilde{p}_2 = \dfrac{\sigma_1(\alpha)}{\varepsilon_1\sin\sigma_1(\alpha)d_1}$, а $\tilde{D}$ означает, что у каждого такого детерминанта на боковых диагоналях присутствуют лишь члены вида $\tilde{p}_2$, $\tilde{p}_3$ (без $q(\alpha)$ в знаменателе), а на главной диагонали $q(\alpha)$ (вместо 1). Вынося еще $\dfrac{1}{q^{2N-1}(\alpha)}$ из произведения $(p_3)^{N-1}(p_2)^N$ в числителе выражения (13) и заменяя его на $(\tilde{p}_3)^{N-1}(\tilde{p}_2)^N$, после сокращения получим равенство

$$u_{2N+1}(y, z) =$$

$$= \frac{ik_0\sin\alpha\sin\sigma_1(\alpha)d_1\tilde{p}_2^N(\alpha)\tilde{p}_3^{N-1}(\alpha)p_4(\alpha)e^{-ik_0(y\cos\alpha+(z+ND)\sin\alpha)}}{\tilde{D}_{2N+1}(\alpha)\left[ik_0\sin\alpha\sin\sigma_1(\alpha)d_1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\alpha)\cos\sigma_1(\alpha)d_1\right]} \qquad (15)$$

вместо (13) и равенство

$$\tilde{D}_{2N+1}(\alpha) = \tilde{D}_{2N-1}^{(p_3,\,p_2)}(\alpha) - p_4\tilde{p}_3\tilde{D}_{2N-2}^{(p_3,\,p_3)}(\alpha) -$$

$$- p_1\tilde{p}_2\tilde{D}_{2N-2}^{(p_2,\,p_2)}(\alpha) + p_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3 p_4\tilde{D}_{2N-3}^{(p_2,\,p_3)}(\alpha) \qquad (16)$$

вместо (10).

Детерминант $\tilde{D}_{2N+1}(\alpha)$ можно вычислить в замкнутой форме лишь при диагональных элементах, равных нулю. Это означает, что параметры структуры должны быть выбраны так, чтобы $q(\alpha) = 0$, т. е. должно быть выполнено равенство

$$\left[\frac{\sigma_1(\nu)}{\varepsilon_1 \mathrm{tg}\sigma_1(\nu) d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\varepsilon_2 \mathrm{tg}\sigma_2(\nu) d_2}\right] = 0. \qquad (17)$$

Здесь $\sigma_1(\alpha) = \sqrt{k_1^2 - k_0^2 \cos^2\alpha}$; $\sigma_2(\alpha) = \sqrt{k_2^2 - k_0^2 \cos^2\alpha}$. Тогда для детерминанта имеем

$$(\alpha) = \tilde{D}_{2N-1}^{(p_3,\, p_2)}(\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{p}_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{p}_3 & 0 & \tilde{p}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{p}_2 & 0 & \tilde{p}_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & 0 & \tilde{p}_3 & 0 & \tilde{p}_2 \\ & & & 0 & 0 & \tilde{p}_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\tilde{p}_3^2\, \tilde{D}_{2N-3}^{(p_3,\, p_2)} = \tilde{p}_3^4\, \tilde{D}_{2N-5}^{(p_3,\, p_2)} = -\tilde{p}_3^6\, \tilde{D}_{2N-7}^{(p_3,\, p_2)} = \dots (-1)^k\, \tilde{p}_3^{2k}\, \tilde{D}_{2N-(2k+1)}^{(p_3,\, p_2)},$$

причем

$$\tilde{D}_3^{(p_3,\, p_2)} = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{p}_3 & 0 \\ \tilde{p}_3 & 0 & \tilde{p}_2 \\ 0 & \tilde{p}_2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $\tilde{D}_{2N-1}^{(p_3,\, p_2)}(\alpha) = 0$. То же самое справедливо и для $\tilde{D}_{2N-3}^{(p_2,\, p_3)}(\alpha)$. Следовательно, формула (16) сокращается до

$$\tilde{D}_{2N+1}(\alpha) = -\, p_4\, \tilde{p}_3\, \tilde{D}_{2N-2}^{(p_3,\, p_3)}(\alpha) - p_1\, \tilde{p}_2\, \tilde{D}_{2N-2}^{(p_2,\, p_2)}(\alpha), \qquad (18)$$

для двух оставшихся детерминантов получим по индукции

$$\tilde{D}_{2N-2}^{(p_3,\, p_3)}(\alpha) = -\, \tilde{p}_3^2\, \tilde{D}_{2N-4}^{(p_3,\, p_3)} = \tilde{p}_3^4\, \tilde{D}_{2N-6}^{(p_3,\, p_3)} = -\, \tilde{p}_3^6\, \tilde{D}_{2N-8}^{(p_3,\, p_3)} =$$

$$= \dots = (-1)^k\, \tilde{p}_3^{2k}\, \tilde{D}_{2N-2(k+1)}^{(p_3,\, p_3)} = \dots = (-1)^{N-1}\, \tilde{p}_3^{2(N-1)}(\alpha),$$

так как $\tilde{D}_2^{(p_3,\,p_3)} = -\tilde{p}_3^2$. Совершенно аналогично $\tilde{D}_{2N-2}^{(p_2,\,p_2)}(\alpha)$ = $= (-1)^{N-1}\,\tilde{p}_2^{2(N-1)}(\alpha)$. Окончательно из равенства (18) следует

$$\tilde{D}_{2N+1}(\alpha) = (-1)^N \left[p_4 \tilde{p}_3^{2N-1} + p_1 \tilde{p}_2^{2N-1} \right]. \qquad (19)$$

Соответствующее явное выражение для прошедшего поля имеет вид

$$u_{2N+1}(y,\,z) = (-1)^N \times$$

$$\times \frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 \tilde{p}_2^N(\alpha) \tilde{p}_3^{N-1}(\alpha) p_4(\alpha) e^{-ik_0(y\cos\alpha + (z+ND)\sin\alpha)}}{\left[p_4 \tilde{p}_3^{2N-1} + p_1 \tilde{p}_2^{2N-1} \right] \left[ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sigma_1(\alpha) \cos\sigma_1(\alpha) d_1 \right]}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $((\tilde{p}_3)^N (\tilde{p}_2)^N$, приведем это равенство к виду

$$u_{2N+1}(y,\,z) = (-1)^N \times$$

$$\times \frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 \tilde{p}_2(\alpha) p_4(\alpha) e^{-ik_0(y\cos\alpha + (z+ND)\sin\alpha)}}{\left[\tilde{p}_2 p_4 \left(\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2} \right)^N + p_1 \tilde{p}_3 \left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \right)^N \right] \left[ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sigma_1(\alpha) \cos\sigma_1(\alpha) d_1 \right]}. \qquad (20)$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \right)^N = \left[\frac{\varepsilon_2 \sigma_1(\alpha) d_1}{\sin\sigma_1(\alpha) d_1} \; \frac{\sin\sigma_2(\alpha) d_2}{\varepsilon_1 \sigma_2(\alpha) d_2} \right]^N \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^N.$$

Поведение функции $\frac{\sin x}{x}$ на интервале [0, π] (монотонно убывает от 1 до 0) позволяет утверждать, что либо $\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2}$, либо $\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3}$ меньше 1. Следовательно, при $N \to \infty$ знаменатель в (20) стремится к ∞. Выражение (20) можно привести к более симметричному виду, если подставить явные выражения для $p_1(\alpha)\,\tilde{p}_3(\alpha)$ и для $p_4(\alpha)\,\tilde{p}_2(\alpha)$:

$$u_{2N+1}(y,\,z) = (-1)^N \times$$

$$\times\, ik_0 \sin\alpha\, e^{-ik_0\left(y\cos\alpha + (z+ND)\sin\alpha\right)} \times$$

$$\times \left[\frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\alpha)\cos\sigma_1(\alpha) d_1}{\sin\sigma_1(\alpha) d_1} \left(\frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2}\right)^N + \right.$$

$$\left. + \frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_2(\alpha) d_2 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma_2(\alpha)\cos\sigma_2(\alpha) d_2}{\sin\sigma_2(\alpha) d_2} \left(\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3}\right)^N \right]^{-1}.$$

Используя равенство (17) в виде

$$\varepsilon_2\, \sigma_1(\alpha)\mathrm{ctg}\sigma_1(\alpha) d_1 = -\varepsilon_1\, \sigma_2(\alpha)\mathrm{ctg}\,\sigma_2(\alpha) d_2,$$

приведем его к виду

$$u_{2N+1}(y, z) = (-1)^N \times$$

$$\times \frac{ik_0 \sin\alpha\, e^{-ik_0\left(y\cos\alpha + (z+ND)\sin\alpha\right)}}{ik_0 \sin\alpha \left[\left(\dfrac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3}\right)^N + \left(\dfrac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2}\right)^N\right] + \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\alpha)\mathrm{ctg}\sigma_1(\alpha) d_1 \left[\left(\dfrac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3}\right)^N - \left(\dfrac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2}\right)^N\right]}. \tag{21}$$

Отраженное поле. Из (3) и (5) следует, что

$$U_0(\nu, z) = A_0(\nu)\, e^{i\sigma_0(\nu) z} =$$

$$= F_0(\nu)\, e^{i\sigma_0(\nu) z} - \sqrt{2\pi}\, \delta(\nu + k_0 \cos\alpha)\; e^{i\sigma_0(\nu) z}.$$

Из системы (8) аналогично предыдущему получим

$$F_0(\nu) =$$

$$= \frac{A_0(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} \begin{vmatrix} 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & p_3 & 1 & p_2 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & p_2 & 1 & p_3 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & p_4 & 1 \end{vmatrix}_{(2N)} =$$

$$= \frac{A_0(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} \begin{vmatrix} 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & & \dots & & & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & p_3 & 1 & p_2 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & p_2 & 1 \end{vmatrix}_{(2N-1)} -$$

$$-\frac{A_0(\nu)p_4(\nu)p_3(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)} \begin{vmatrix} 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1 & p_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & & \dots & & & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & p_3 & 1 & p_2 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & p_2 & 1 & p_3 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 \end{vmatrix}_{(2N-2)}.$$

В более короткой записи

$$F_0(\nu) = \frac{A_0(\nu)D_{(2N-1)}^{(p_3,p_2)}(\nu) - A_0(\nu)p_4(\nu)p_3(\nu)D_{(2N-2)}^{(p_3,p_3)}(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)}, \qquad (22)$$

т. е.

$$U_0(\nu, z) = A_0(\nu)\frac{D_{(2N-1)}^{(p_3,p_2)}(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)}e^{i\sigma_0(\nu)z} -$$

$$-A_0(\nu)\frac{p_4(\nu)p_3(\nu)D_{(2N-2)}^{(p_3,p_3)}(\nu)}{D_{2N+1}(\nu)}e^{i\sigma_0(\nu)z} -$$

$$-\sqrt{2\pi}\,\delta(\nu + k_0\cos\alpha)e^{i\sigma_0(\nu)z}. \qquad (23)$$

Применив к (23) обратное преобразование Фурье и учитывая, что

$$A_0(\nu) = \frac{i\sigma_0(\nu)\sqrt{2\pi}\sin\sigma_1(\nu)d_1\,\delta(\nu + k_0\cos\alpha)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1},$$

получим

$$u_0(y,z) =$$

$$= \left\{ \frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 \left[D_{(2N-1)}^{(p_3,\, p_2)}(\alpha) - p_4(\alpha) p_3(\alpha) D_{(2N-2)}^{(p_3,\, p_3)}(\alpha) \right]}{[ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sigma_1(\alpha) \cos\sigma_1(\alpha) d_1] D_{2N+1}(\alpha)} - 1 \right\} \times$$

$$\times\, e^{-ik_0(y\cos\alpha - z\sin\alpha)}. \qquad (24)$$

Далее, как и прежде, выносим фактор $\dfrac{1}{q(\alpha)}$ из детерминантов и сомножителей числителя и знаменателя:

$$D_{2N+1}(\alpha) = \frac{1}{q^{2N-1}(\alpha)} \tilde{D}_{2N+1}(\alpha) \text{ (формула (14));}$$

$$D_{(2N-1)}^{(p_3,\, p_2)}(\alpha) = \frac{1}{q^{2N-1}(\alpha)} \tilde{D}_{(2N-1)}^{(p_3,\, p_2)}(\alpha);$$

$$D_{(2N-2)}^{(p_3,\, p_3)}(\alpha) = \frac{1}{q^{2N-2}(\alpha)} \tilde{D}_{(2N-2)}^{(p_3,\, p_3)}(\alpha);$$

$$p_3(\alpha) = \frac{1}{q(\alpha)} \tilde{p}_3(\alpha).$$

Тогда

$$u_0(y,z) =$$

$$= \left\{ \frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 \left[\tilde{D}_{(2N-1)}^{(p_3,\, p_2)}(\alpha) - p_4(\alpha) \tilde{p}_3(\alpha) \tilde{D}_{(2N-2)}^{(p_3,\, p_3)}(\alpha) \right]}{\left[ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sigma_1(\alpha) \cos\sigma_1(\alpha) d_1 \right] \tilde{D}_{2N+1}(\alpha)} - 1 \right\} \times$$

$$\times\, e^{-ik_0(y\cos\alpha - z\sin\alpha)}. \qquad (25)$$

Если $q(\alpha) \to 0$, то $\tilde{D}_{(2N-1)}^{(p_3,\, p_2)}(\alpha) \to 0$, а $\tilde{D}_{(2N-2)}^{(p_3,\, p_3)}(\alpha) \to$ $\to (-1)^{N-1} \tilde{p}_3^{2(N-1)}(\alpha)$. Вместо (25) получим

$$u_0(y,z) =$$

$$= \left\{ -\frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 \;\; p_4(\alpha) \tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha) (-1)^{N-1}}{\left[ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sigma_1(\alpha) \cos\sigma_1(\alpha) d_1 \right] \tilde{D}_{2N+1}(\alpha)} - 1 \right\} \times$$

$$\times e^{-ik_0(y\cos\alpha - z\sin\alpha)}. \qquad (26)$$

После подстановки $\tilde{D}_{2N+1}(\alpha)$ в знаменатель в виде (19) получим

$$u_0(y,z) =$$

$$= \left\{ \frac{ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1\, p_4(\alpha) \tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha)}{ab} - 1 \right\} \times$$

$$\times\, e^{-ik_0(y\cos\alpha - z\sin\alpha)}. \qquad (27)$$

где $a = ik_0 \sin\alpha \sin\sigma_1(\alpha) d_1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1(\alpha)\cos\sigma_1(\alpha) d_1$; $b = p_4(\alpha)\tilde{p}_3^{2N-1} \times$ $\times\,(\alpha) + p_1(\alpha)\tilde{p}_2^{2N-1}(\alpha)$.

Условия обращения в нуль фактора *q*(α). Фактор $q(\alpha)$, равенство которого нулю позволяет выписать прошедшее и отраженное поля в явном виде, можно представить следующим образом:

$$q(\alpha) = \frac{\sigma_1(\alpha)}{\varepsilon_1 \mathrm{tg}\sigma_1(\alpha) d_1} + \frac{\sigma_2(\alpha)}{\varepsilon_2 \mathrm{tg}\sigma_2(\alpha) d_2}. \qquad (28)$$

Обратить в ноль это выражение проще всего, потребовав выполнения равенства

$$\mathrm{tg}\, s_1(a) d_1 = \mathrm{tg}\, s_2(a) d_2 = \infty. \qquad (29)$$

Отсюда следует, что $\sigma_1(\alpha) d_1 = \pi\,(n + 1/2)$; $\sigma_2(\alpha) d_2 = \pi\,(m + 1/2)$. В более подробной записи:

$$\begin{aligned} &\omega\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \sin^2\alpha}\; d_1 = p\,(n + 1/2); \\ &\omega\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_0 \sin^2\alpha}\; d_2 = p\,(m + 1/2). \end{aligned} \qquad (30)$$

Отметим, что при $n = m$ $\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} = \frac{\varepsilon_2\sigma_1(\alpha)}{\varepsilon_1\sigma_2(\alpha)}$, также, в силу (30), $\frac{\varepsilon_2 d_2}{\varepsilon_1 d_1}$, т. е.

$$\frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} = \frac{\varepsilon_2\sigma_1(\alpha)}{\varepsilon_1\sigma_2(\alpha)} = \frac{\varepsilon_2 d_2}{\varepsilon_1 d_1}. \qquad (31)$$

С учетом этого равенства, а также соотношений (30) выражения для прошедшего и отраженного полей примут наиболее простой вид:

$$u_{2N+1}(y,z) = (-1)^N \frac{e^{-ik_0(y\cos\alpha + (z+ND)\sin\alpha)}}{\left[\left(\frac{\varepsilon_2 d_2}{\varepsilon_1 d_1}\right)^N + \left(\frac{\varepsilon_1 d_1}{\varepsilon_2 d_2}\right)^N\right]}; \qquad (32)$$

$$u_0(y,z) =$$
$$= \left\{ \frac{p_4(\alpha)\tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha)}{\left[p_4(\alpha)\tilde{p}_3^{2N-1}(\alpha) + p_1(\alpha)\tilde{p}_2^{2N-1}(\alpha) \right]} - 1 \right\} e^{-ik_0(y\cos\alpha - z\sin\alpha)}. \quad (32)$$

Это равенство упрощается до следующего:

$$u_0(y,z) = \left\{ \frac{1}{\left[1 + \frac{p_1}{p_4}\left(\frac{\tilde{p}_2(\alpha)}{\tilde{p}_3(\alpha)} \right)^{2N-1} \right]} - 1 \right\} e^{-ik_0(y\cos\alpha - z\sin\alpha)}.$$

Так как при выполнении равенств (30), (31) и при $n = m$

$$p_4 = \frac{\varepsilon_0\sigma_2(\alpha)}{\varepsilon_2 ik_0 \sin\alpha\,(-1)^n};$$

$$p_1 = p_1 = \frac{\varepsilon_0\sigma_2(\alpha)}{\varepsilon_1 ik_0 \sin\alpha(-1)^n},$$

предыдущее равенство принимает вид

$$u_0(y,z) = \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_2 d_2}{\varepsilon_1 d_1} \right)^{2N}} - 1 \right\} e^{-ik_0(y\cos\alpha - z\sin\alpha)}. \quad (33)$$

Численные расчеты. Согласно условиям (30), при $m = n = 0$ диэлектрические проницаемости слоев должны составлять:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \sin^2\alpha + \frac{\pi^2}{4d_1^2\omega^2};$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \sin^2\alpha + \frac{\pi^2}{4d_2^2\omega^2}. \quad (34)$$

Тогда

$$\frac{\varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_2 d_2} = \frac{\pi^2 + 4\varepsilon_0\omega^2 d_1^2 \sin^2\alpha}{\pi^2 + 4\varepsilon_0\omega^2 d_2^2 \sin^2\alpha}\,\frac{d_2}{d_1}.$$

При численных расчетах будем рассматривать случай ортогонального падения плоской волны: $\alpha = \pi/2$. Кроме того, удобно задавать фактор $4\varepsilon_0\omega^2 d_1^2 \sin^2\alpha$, который обозначим через τ^2 (рис. 2, 3).

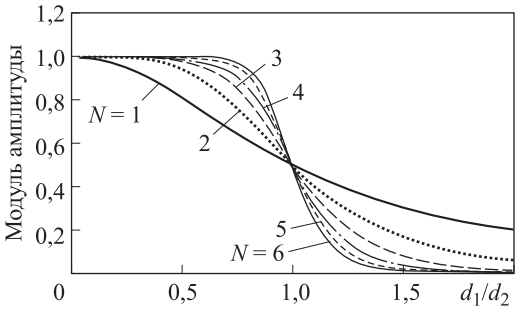


Рис. 2. Модуль амплитуды отраженной волны в зависимости от отношения d_1/d_2 при различном числе слоев для случая *E*-поляризации

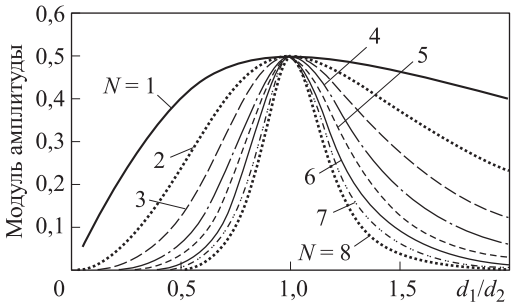


Рис. 3. Модуль амплитуды прошедшей волны в зависимости от отношения d_1/d_2 при различном числе слоев для случая *E*-поляризации

На графиках рис. 4– 15 представлены амплитуды отраженного и прошедшего полей для отношения d_1/d_2 = 0,5…2,0 при разных *N* для последовательных значений $\tau = 2\pi; \pi; \pi/2; \pi/4; \pi/8; \pi/16$. При этом в начале диапазона при $\tau = 2\pi$ (см. рис. 4, 5) для малых значений отношения d_1/d_2 амплитуды отраженного и прошедшего полей ведут себя так же как в случае *E*-поляризации (см. рис. 2, 3). Далее, при $\tau = \pi, \pi/2$ наблюдается переходный режим (см. рис. 6–9), когда область полного отражения относительно величины d_1/d_2 предельно сужается в сторону ее малых значений. При $\tau = \pi/4$ начинает формироваться режим, близкий к поведению волноведущей структуры, когда при малых d_1/d_2 практически отсутствует как прошедшее, так и отраженное поле (рис. 10–11). При последних значениях $\tau = \pi/8; \pi/16$; этот режим полностью устанавливается, причем графики амплитуды отраженного поля являются перевернутыми графиками случая *E*-поляризации, с осью симметрии на уровне 0,5 (см. рис. 12–15).

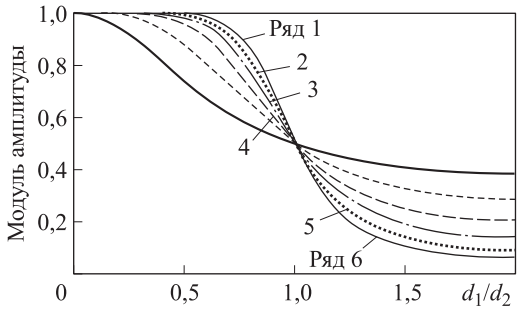


Рис. 4. Расчет при $\tau = 2\pi$ для отраженной волны

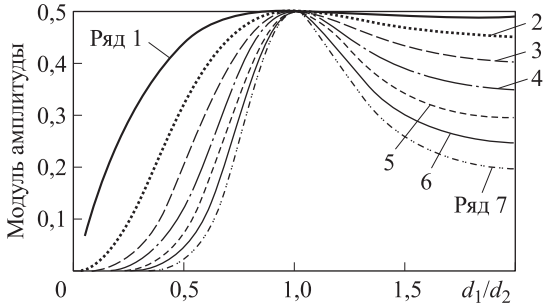


Рис. 5. Расчет при $\tau = 2\pi$ для прошедшей волны

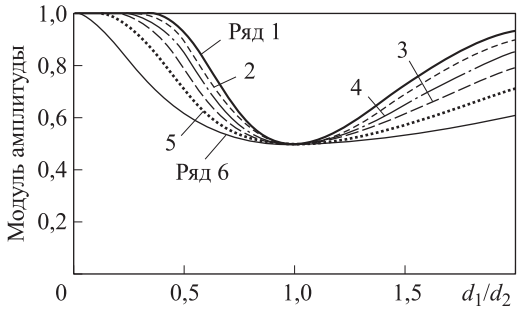


Рис. 6. Расчет при $\tau = \pi$ для отраженной волны

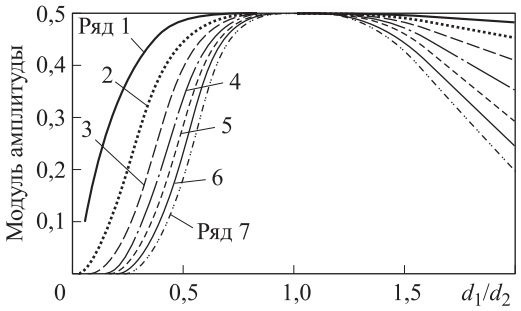


Рис. 7. Расчет при $\tau = \pi$ для прошедшей волны

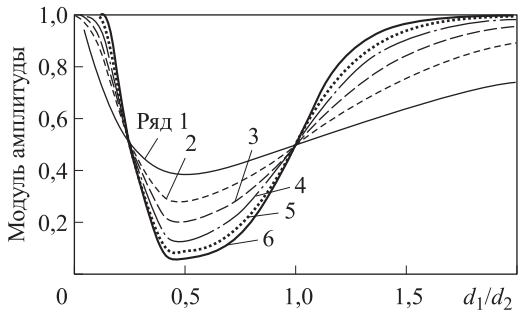


Рис. 8. Расчет при $\tau = \pi/2$ для отраженной волны

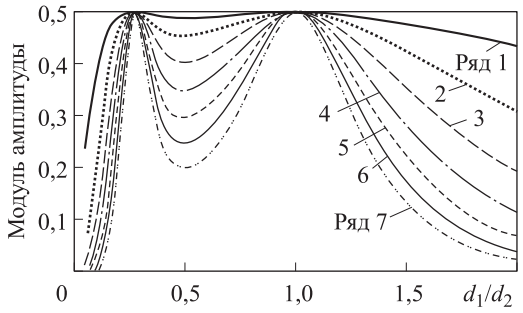


Рис. 9. Расчет при $\tau = \pi/2$ для прошедшей волны

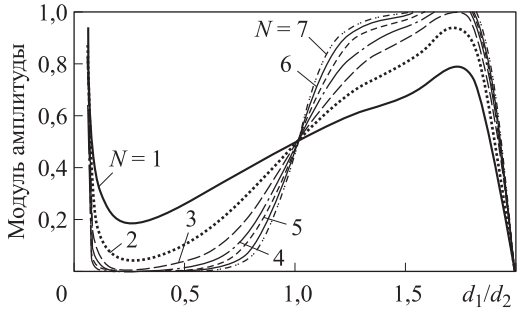


Рис. 10. Расчет при $\tau = \pi/4$ для отраженной волны

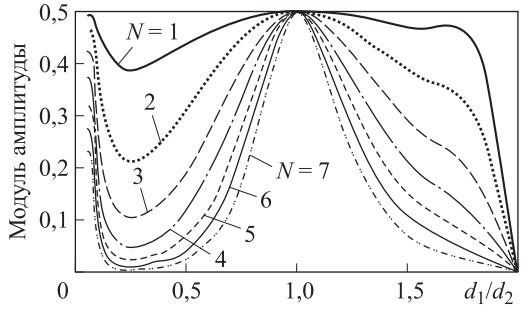


Рис. 11. Расчет при $\tau = \pi/4$ для прошедшей волны

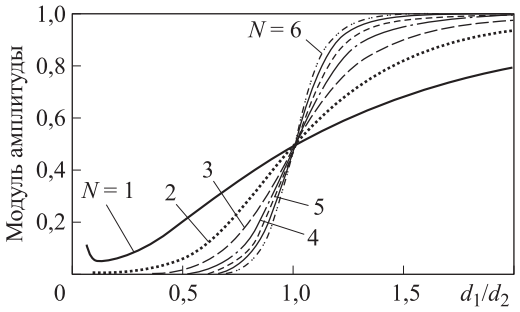


Рис. 12. Расчет при $\tau = \pi/8$ для отраженной волны

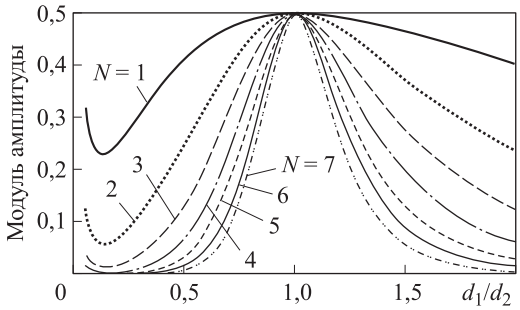


Рис. 13. Расчет при $\tau = \pi/8$ для прошедшей волны

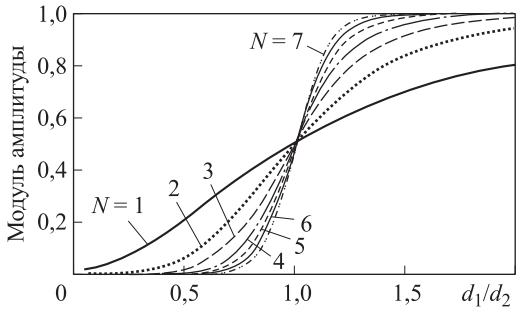


Рис. 14. Расчет при $\tau = \pi/16$ для отраженной волны

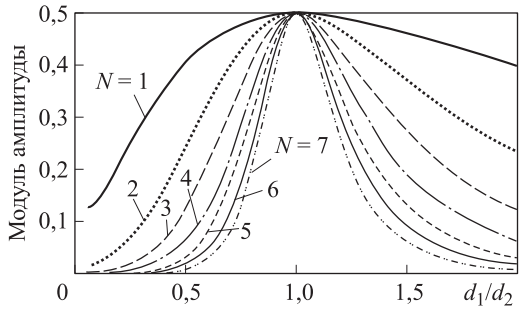


Рис. 15. Расчет при $\tau = \pi/16$ для прошедшей волны

Выводы. В результате проведенного исследования показано, что одномерный конечный фотонный кристалл (с конечным числом ячеек периодичности) в зависимости от отношения $\varepsilon_1 d_1 / (\varepsilon_2 d_2)$ толщин однородных слоев, в случае *H*-поляризованного возбуждения (или отношения d_1/d_2, в случае *E*-поляризованного) может вести себя либо как почти идеально отражающее зеркало, либо как волноведущая структура с ничтожными потерями. Кроме того, при выполнении соотношений (30), по мере роста величины $\tau = 2\sqrt{\varepsilon_0}\omega d_1 \sin\alpha$ (прежде всего за счет увеличения частоты поля) структура ведет себя как отражающая или волноведущая противоположно случаю *E*-поляризованного возбуждения. Следовательно, можно утверждать, что такая среда может, в частности, выполнять роль поляризатора электромагнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Апельцин В.Ф., Мозжорина Т.Ю. Одномерный фотонный кристалл как отражающая или волноведущая диэлектрическая структура. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 9.

[2] Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Маркевич М. Н. Моделирование диэлектрических характеристик композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения. *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*, 2013, № 1. doi: 10.7463/0113.0531682.

[3] Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Маркевич М. Н. Математическое моделирование диэлектрических свойств полимер-керамических композиционных материалов методом асимптотического осреднения. *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*, 2013, № 10. doi: 10.7463/1013.0623343.

[4] Joannopoulos J.D., Meade R.D., Winn J.N. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light.* Princeton Univ. Press, 1995.

[5] *Optical properties of photonic crystals.* Sakoda R., ed. Berlin, Springer-Verlag, 2001.

[6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[7] Боголюбов А.Н., Буткарев И.А., Дементьева Ю.С. Исследование распространения электромагнитных импульсов через фотонные кристаллические структуры. *Вестник Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия*, 2010, № 6, с. 3−8.

[8] Дементьева Ю.С. Синтез волноведущих систем на основе фотонных кристаллов. *Вычислительные методы и программирование*, 2011, т. 12, с. 375–378.

Статья поступила в редакцию 02.09.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Апельцин В.Ф., Мозжорина Т.Ю. Свойства одномерного фотонного кристалла как отражающей или волноведущей структуры в случае *H*-поляризованного возбуждения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 3–27.

Апельцин Виктор Филиппович родился в 1944 г., окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 80 научных работ в области численных и аналитических методов исследования краевых задач электродинамики. e-mail: vapeltsin@hotmail.com

Мозжорина Татьяна Юрьевна родилась в 1959 г., окончила МАИ в 1982 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ в области моделирования характеристик ГТД, моделирования полета пассажирских самолетов, оптимизации СУ в системе ЛА. e-mail: mozzhorina@mail.ru

Properties of one-dimensional photonic crystal as a reflective or wave guiding structure when excited by H-polarization

© V.F. Apeltsin, T.Yu. Mozzhorina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper considers two-dimensional boundary value problem of propagation of plane electromagnetic wave through a periodic stratified medium with one-dimensional photonic crystal structure. The structure contains a finite number of slabs. Each periodicity cell consists of two layers with different real values of constant dielectric permittivity and different thicknesses. We show that under certain additional condition, which connects the angle of incidence of the plane wave, thicknesses of the layers, frequencies and dielectric permittivity of the layers, we can solve the problem completely and explicitly, the solution leading to simple expressions for both the field reflected from the structure, and the field which has passed through it. Herewith in case of H-polarized field, unlike E-polarization, properties of this medium depend on the ratio of thickness of the layers multiplied by their dielectric permittivity (with E-polarization they depend on thickness ratio only). As a result, depending on the field frequency, photonic crystal can behave as perfectly reflecting structure, while with the same ratio of thicknesses of the layers in case of E-polarization, it becomes a wave guiding structure, and vice-versa. We have compared numerical computations with those for cases of E-polarization.

Keywords: *photonic crystal, slab, uniform dielectric, plane wave, perfect reflector, ideal waveguide.*

REFERENCES

[1] Apeltsin V.F., Mozzhorina T.Yu. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2013, no. 9. Available at: http://engjournal.ru/articles/966/966.pdf

[2] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Markevitch M.N. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal,* 2013, no. 1, doi: 10.7463/0113.0531682.

[3] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Markevitch M.N. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal,* 2013, no.10, doi: 10.7463/1013.0623343.

[4] Joannopoulos J.D., Meade R.D., Winn J.N. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light.* Princeton Univ. Press, 1995.

[5] Sakoda R., ed. *Optical properties of photonic crystals*. Berlin, Springer-Verlag, 2001.
[6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoie Modelirovanie i Chislennye Metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.
[7] Bogolyubov A.N., Butkarev I.A., Dementyeva Yu.S. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya — Moscow State University Bulletin. Series 3. Phisics. Astronomy,* 2010, no. 6, pp. 3–8.
[8] Dementyeva Yu.S. *Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie — Numerical Methods and Programming,* 2011, vol. 12, pp. 375–378.

Apeltsin V.F. (b. 1944) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1968. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of 80 publications in the field of numerical and analytical methods examining the boundary value problems of electrodynamics. e-mail: vapeltsin@hotmail.com

Mozzhorina T.Yu. (b. 1959) graduated from Moscow Aviation Institute in 1982. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. The author of 18 publications in the field of mathematical simulation of gas-turbine engine, mathematical simulations of a passenger aircraft flight, optimization of aircraft control system. e-mail: mozzhorina@mail.ru