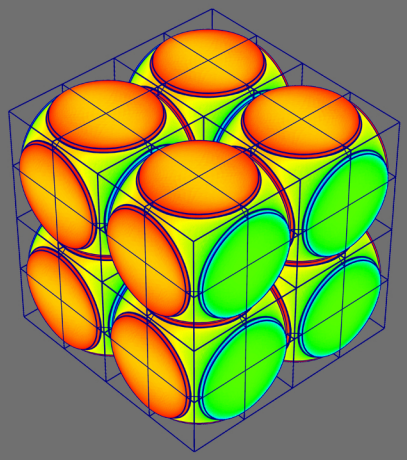
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Фролов А. В. Моделирование влияния оттока в залив Кара-Богаз-Гол на плотность распределения вероятности уровня Каспийского моря. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №3 (11), с. 79-92

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/109/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
24.11.2026 02:06:23

УДК 551.048

Моделирование влияния оттока в залив Кара-Богаз-Гол на плотность распределения вероятности уровня Каспийского моря

© А.В. Фролов

Институт водных проблем РАН, Москва, 119333, Россия

Рассмотрены многолетние колебания уровня Каспийского моря как выходного процесса нелинейной системы, обладающей положительной и отрицательными обратными связями. Предложена модель Каспийского моря, учитывающая отток морской воды в залив Кара-Богаз-Гол. Получена плотность распределения уровня моря в виде решения соответствующего уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Показано, что бимодальная плотность распределения вероятности уровня моря, отвечающая бессточному Каспию (при отсеченном заливе Кара-Богаз-Гол), переходит в одномодальную в случае одновременного действия зависимостей испарения и оттока морской воды в залив Кара-Богаз-Гол от уровня моря.

Ключевые слова: *уровень Каспийского моря, плотность распределения вероятности, уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова, нелинейная гидрологическая система, бимодальность.*

Введение. Изучению вероятностных закономерностей колебаний уровня Каспия, крупнейшего в мире озера, посвящено множество исследований, начиная с работы [1]. Расчет характеристик современного и будущего режима Каспия необходим для научного обеспечения проектов хозяйственного освоения моря и его побережий [2–4]. Для таких расчетов используют математическую модель колебаний уровня Каспийского моря (УКМ), которая по современным представлениям должна отражать нелинейную динамику колебаний УКМ [4–8].

Ключевым моментом в изучении многолетних колебаний УКМ как стохастического процесса является принятие типа и параметров плотности распределения вероятности (ПРВ) уровня. От этой функции в значительной степени зависит надежность и точность расчетов характеристик уровня Каспия в перспективе.

Каспий чаще всего называют бессточным морем, хотя представляется более обоснованным отнести его к «полубессточным» озерам (термин, использовавшийся В.В. Добровольским). Действительно, до 1980 г. происходил непрерывный отток воды из Каспия в залив, т. е. море было проточным. Во время существования дамбы в проливе, соединяющем море и залив (ноябрь 1980 – июль 1992 г.), море было практически бессточным. После разрушения дамбы отток в Кара-Богаз-Гол восстановился, море снова стало проточным.

Моделирование многолетних колебаний уровня Каспия проводят в рамках стационарного приближения, т. е. предполагается, что вы-

нуждающие процессы (например, суммарный речной приток в море) имеют стационарный характер, а морфометрические характеристики чаши моря и гидравлические условия оттока морской воды в залив Кара-Богаз-Гол полагаются неизменными.

В данной работе решается задача построения ПРВ УКМ для бессточного и проточного Каспия.

Основные черты механизма колебаний уровня Каспия. Моделирование многолетних колебаний УКМ представляет собой сложную задачу, для решения которой необходимо корректное описание процессов, формирующих основные компоненты водного баланса моря (суммарный речной и подземный приток, безвозвратные изъятия из притока, испарение и осадки по акватории, отток из моря). Приток, осадки и испарение определяются климатическими процессами [5–8]. Техногенное воздействие на уровенный режим моря осуществляется в основном посредством изъятия воды из речного притока на орошение, для промышленности, на коммунально-бытовые цели и т. п. Особо выделим отсечение залива Кара-Богаз-Гол дамбой и возобновление оттока из моря в залив после разрушение дамбы, что также приводило к существенным техногенным изменениям в водном балансе моря и залива [4].

Гидравлические условия оттока морской воды в Кара-Богаз-Гол в течение XX в. изменялись четырежды, что каждый раз влияло на режим колебаний уровня Каспия (рис. 1). До начала 1930-х гг. поперечное сечение пролива имело вид, обозначенный *1* на рис. 1, глубина пролива была относительно невелика, дно пролива не достигало скальной породы. В период резкого снижения уровня моря в 1930–1940 гг. происходило углубление пролива вследствие понижения базиса эрозии [9]. В проливе формировались новые гидравлические условия.

К концу 1940-х гг. установились новое поперечное сечение *2* и соответствующая зависимость оттока морской воды в залив от уровня воды в море, действовавшая до 1980 г., когда отток из моря был прекращен вследствие возведения дамбы в проливе. До 1992 г. отток воды в залив был практически прекращен. В июле 1992 г. плотина в проливе была разрушена, из моря в залив хлынул поток морской воды, размывший пролив до глубины залегания скальных пород (примерно –31,0 м в Балтийской системе высот, далее — БС), при этом площадь поперечного сечения пролива *3* существенно увеличилась по всей длине пролива.

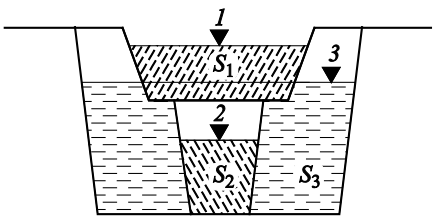


Рис. 1. Схема поперечных сечений *Si* (*i* = 1, 2, 3) пролива, соединяющего Каспий с заливом Кара-Богаз-Гол: *1* — до 1930 г., *2* — 1948–1980 г., *3* — после 1994 г. и до настоящего времени (в 1980–1992 гг. залив был отделен дамбой)

Каспийское море совместно с притоком и остальными составляющими водного баланса естественно рассматривать как некоторую гидрологическую систему с входными и выходными процессами. Приток в море представляет собой входной процесс. Колебания уровня воды в море и функционально зависящий в естественном режиме [4, 9] отток в залив Кара-Богаз-Гол рассматривают как выходные процессы. Испарение может состоять из двух компонент. Одна из них — стохастическая компонента — рассматривается как входной процесс, другая, детерминистическая, — как выходной процесс, будучи функцией уровня моря.

В общем случае в механизме формирования колебаний УКМ есть положительная и отрицательные обратные связи.

Действие отрицательных обратных связей направлено на демпфирование колебаний уровня Каспия, т. е. на возврат отклоненного уровня к равновесному состоянию. Отрицательные обратные связи обусловлены, во-первых, переменностью площади поверхности моря, во-вторых, оттоком морской воды в залив Кара-Богаз-Гол [4, 9–11]. Переменность площади поверхности моря действует во всем диапазоне колебаний уровня Каспия. Отток в залив Кара-Богаз-Гол значимо действует как отрицательная обратная связь только в относительно небольшом диапазоне колебаний уровня моря, примерно от 1,0 до 4,5 м (–30,0…–26,5 м БС).

Положительная обратная связь направлена на дестабилизацию уровня моря (т. е. на отклонение уровня от равновесного состояния) и формируется под влиянием зависимостей слоя испарения и площади акватории от уровня моря. Впервые необходимость учета зависимости испарения от уровня воды в Каспии была отмечена в работе [9].

Экспериментально зависимость испарения с поверхности Каспия от уровня моря была установлена Г.Н. Паниным [12]: в теплый период (апрель – август) испарение с мелководного Северного Каспия намного больше испарения со Среднего и Южного Каспия, причем в отдельные месяцы — в разы. Например, в мае слой испарения с Северного Каспия в два-три раза больше, чем соответствующая величина для Среднего и Южного Каспия (приблизительно 100, 35 и 42 мм/мес, соответственно) [12].

В работе [13] впервые была предложена модель колебаний уровней бессточных водоемов с учетом зависимости испарения от уровня моря.

Основные уравнения и соотношения. Многолетние колебания уровня Каспия описываются уравнением водного баланса моря:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{v^{+}(t)}{F(h)} - v^{-}(h) - e(t,h). \qquad (1)$$

Здесь h — уровень воды в Каспии; t — время (годы); $v^+(t) = \bar{v}^+ + \tilde{v}^+$ — суммарное поступление воды в море (речной и подземный приток; для краткости будем называть $v^+(t)$ просто притоком); $\bar{v}^+$ — среднее притока; $\tilde{v}^+$ — флуктуации притока относительно среднего; $F(h)$ — зависимость площади поверхности моря от уровня h; $v^-(h)$ — отток (слой) из Каспия в залив Кара-Богаз-Гол; $e(t,h)$ — эффективное испарение (испарение минус осадки; далее для краткости просто испарение) с поверхности моря, равное $e(t,h) = e_s(t) + e_{\text{det}}(h)$, где $e_s(t)$ — стохастическая компонента, а $e_{\text{det}}(h)$ — детерминистическая компонента. Уровень моря отсчитывается от отметки –31,0 м БС. Примерно на этой отметке находится дно пролива, соединяющего море и залив.

В качестве моделей $\tilde{v}^+(t)$ и $e_s(t)$ используем (см., например, [3, 4]) авторегрессионные процессы:

$$\frac{d\tilde{v}^+(t)}{dt} = -\gamma_v \tilde{v}^+(t) + w_1(t), \tag{2}$$

$$\frac{de_s(t)}{dt} = -\gamma_e e_s(t) + w_2(t). \tag{3}$$

Здесь $\gamma_v = -lnr_v$, $\gamma_e = -ln\gamma_e$, r_v и r_e — коэффициенты автокорреляции процессов $v^+(t)$ и $e_s(t)$, соответственно; $w_{(i)}(i = 1,2)$ — белые шумы с известными математическими ожиданиями $< w_{(i)} >$ и ковариационными функциями $R_{(i)}(\tau) = D_2^{(i)}\delta(\tau)$, $i = 1,2$, где $D_2^{(i)}$ — коэффициенты интенсивности соответствующих белых шумов $w_{(i)}$, а $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

Для реального диапазона вариаций УКМ $F(h)$ близка к линейной [3, 4, 11]:

$$F(h) = a + bh, \tag{4}$$

где $a = 350 \cdot 10^9$ м^2; $b = 14 \cdot 10^9$ м.

Для режима оттока в залив, установившегося после разрушения в 1992 г. дамбы в проливе, соединяющем море и залив, зависимость $v^-(h)$ между оттоком морской воды в залив Кара-Богаз-Гол от уровня Каспия принимаем в виде монотонно неубывающей функции:

$$v^{-}(h) = k \operatorname{arctg}\left[l(h-A)\right] + B, \tag{5}$$

где k, l, A и B — числовые коэффициенты.

Для детерминистической зависимости испарения с поверхности моря от уровня моря $e_{\text{det}}(h)$ используем нелинейную зависимость, аналогичную функции (5):

$$e_{\text{det}}(h) = m \operatorname{arctg}\left[n(h-C)\right] + D, \tag{6}$$

где m, n, C и D — числовые коэффициенты. Функция (6), в отличие от (5), монотонно неубывающая с увеличением h.

Суммарное расходование воды из моря $L(h)$ равно:

$$L(h) = E(h) + V^{-}(h), \tag{7}$$

где $E(h) = e(h)F(h)$ и $V^{-}(h) = v^{-}(h)F(h)$ — объемы испарения и оттока в залив Кара-Богаз-Гол, соответственно.

Уравнение (1) перепишем в виде:

$$\frac{dh(t)}{dt} = f(h) + g(h)\tilde{v}^{+}, \tag{8}$$

где с учетом уравнений (4)–(6):

$$f(h) = \frac{\overline{v}^{+}}{F(h)} - e(h) - v^{-}(h), \;\; g(h) = 1/F(h). \tag{9}$$

В данной статье рассмотрен идеальный случай, когда испарение не имеет стохастической компоненты, $e_s(t) \equiv 0$. Случай, когда детерминистическая компонента $e_{\text{det}}(t) \equiv 0$, подробно исследован в классической работе С.В. Музылева [3].

Таким образом, колебания УКМ описывает нелинейная стохастическая система. Исследованию свойств динамики таких систем в настоящее время уделяют большое внимание (см. например [14–20]).

Заменим модель притока в море в виде марковского процесса (2) на гауссовский белый шум с коэффициентом интенсивности [21]:

$$N_0 = 4\int_0^{\infty} k(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

где $k(\tau)$ — ковариационная функция процесса (2).

С учетом формулы (10) применительно к стохастическому уравнению (8), коэффициенты сноса $s(h,t)$ и диффузии $k(h,t)$ равны [21]:

$$s(h,t) = f(h,t) + \frac{N_0}{4} g(h,t) \frac{\partial g(h,t)}{\partial h}, \tag{11}$$

$$k(h,t) = \frac{N_0}{2} g^2(h,t), \tag{12}$$

где $f(h)$ и $g(h)$ определены формулами (9).

Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова для плотности вероятности $p(h)$, отвечающее динамическому уравнению (8), для стационарного режима и при граничных условиях нулевого потока вероятности имеет вид:

$$\frac{d}{dh}\left[k(h)\,p(h)\right] - 2s(h)\,p(h) = 0, \tag{13}$$

где $s(h)$ и $k(h)$ имеют вид (11) и (12), соответственно.

Решение уравнения (13) дается выражением:

$$p(h) = \frac{C}{g(h)} \exp\left[\frac{2}{N_0} \int_{h'}^{h} \frac{f(x)}{g^2(x)} dx\right], \tag{14}$$

где C — нормировочный коэффициент, определяемый из условия $\int_0^{+\infty} p(h)\,dh = 1$.

Решение стационарного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (13) можно также записать в виде [22]:

$$p(h) = C \exp\left[-\frac{2\Phi(h)}{N_0}\right], \tag{15}$$

где $\Phi(h)$ — вероятностный потенциал, который находят по формуле:

$$\Phi(h) = -\left[\int_{h'}^{h} \frac{f(x)}{g(x)^2} dx - \frac{N_0}{2} \ln\left[g(h)\right]\right]. \tag{16}$$

Интеграл в формуле (16) берется аналитически, однако из-за экономии места здесь не приводится.

Применение теории к уровню Каспийского моря. Расчеты ПРВ УКМ были выполнены для среднего притока в море, равного 275 км^3/год, дисперсия притока принималась равной 2500 (км^3/год)^2 в соответствии с данными, приведенными в работе [3].

Графики зависимостей (5)–(7) приведены на рис. 2, 3 для коэффициентов $k = -0,03$ м/год, l =1,98 м$^{-1}$, $A = 3,75$ м, $B = 0,72$ м/год, $m = 0,02$ м/год, $n = 0,03$ м$^{-1}$, $C = 7,5$ м и $D = 0,03$ м/год.

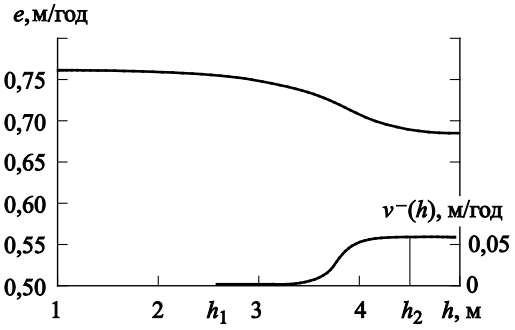


Рис. 2. Зависимость слоев испарения e и оттока в Кара-Богаз-Гол v^- от уровня Каспия h

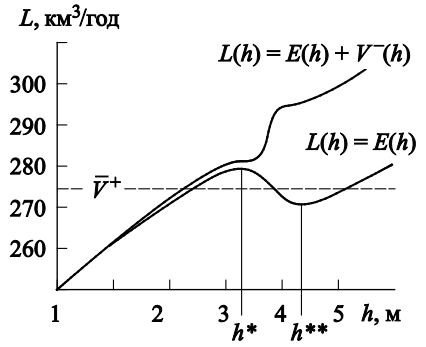


Рис. 3. Зависимость объемов потерь воды L:
$L(h) = E(h)$ — на испарение; $L(h) = E(h) + V^-(h)$ — суммарно на испарение и отток в Кара-Богаз-Гол; пунктирная линия — объем среднего притока в Каспий $\overline{V}^+$

Зависимость оттока в залив Кара-Богаз-Гол от УКМ (см. рис. 1) получена с учетом образования новых гидравлических условий в проливе, соединяющем море и залив, после разрушения дамбы в 1992 г.

Зависимость слоя испарения от УКМ соответствует имеющимся натурным данным.

Отрицательная обратная связь, обусловленная оттоком в залив Кара-Богаз-Гол, действует на интервале (h_1, h_2) (рис. 2). С подъемом уровня моря отток в залив монотонно возрастает до максимальной величины, определяемой испаряющей способностью залива, примерно 18–22 км^3/год.

Действие положительной обратной связи ограничено интервалом отметок уровня (h^*, h^{**}), на котором:

$$\frac{d}{dh}\left[(a+bh)e(h)\right] < 0, \tag{17}$$

где h^* и h^{**} — точки локального максимума и минимума зависимости $E(h)$, соответственно (рис. 3). Неравенство (17) означает, что при подъеме уровня моря от h^* до h^{**} объем испаряемой с поверхности моря воды $E(h) = F(h)e(h) = (a+bh)e(h)$ уменьшается. Увеличение глубины моря приводит к уменьшению слоя испарения $e(h)$ таким образом, что увеличение площади поверхности моря $F(h)$ оказывается недостаточным для увеличения объема $E(h)$ испаряемой воды. Вне интервала (h^*, h^{**}) зависимость $E(h)$ действует как отрицательная обратная связь, т. е. с подъемом уровня объем испаряемой воды возрастает:

$$\frac{d}{dh}\left[\left(a+bh\right)e\left(h\right)\right]>0 \quad \forall h\in(0,h^{*})\cap(h^{**},\infty). \tag{18}$$

Положительная обратная связь в данном случае имеет локальный характер, так как действует не во всем диапазоне колебаний уровня, но только на интервале (h^{*}, h^{**}).

Действия положительной и отрицательных обратных связей существенно влияют на вид плотности распределения вероятности УКМ.

Плотность распределения вероятности УКМ может принципиально различаться для двух состояний моря: а) бессточного, т. е. в условиях отсечения залива Кара-Богаз-Гол, при отсутствии оттока морской воды в залив, $v^{-}\left(t\right)\equiv 0$; б) проточного, т. е. с оттоком морской воды в залив в соответствии с формулой (5).

Будем предполагать, что в обоих случаях испарение с поверхности моря удовлетворяет зависимости (6), причем стохастическая компонента испарения $e_s\left(t\right)\equiv 0$.

Последнее предположение отчасти обосновано малым коэффициентом вариации испарения (по сравнению с этим же коэффициентом для притока в море).

В соответствии с данными о водном балансе Каспия и зависимостями (4)–(6) были получены аналитические выражения для вероятностного потенциала и плотности вероятности $p(h)$ УКМ (рис. 4).

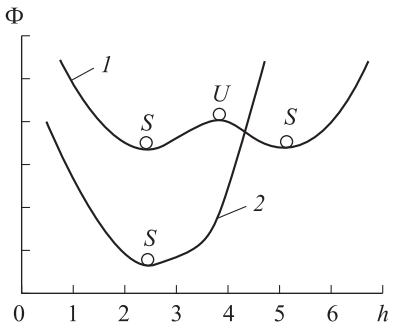


Рис. 4. Вероятностные потенциалы ПРВ уровня:
1 — для бессточного Каспия; *2* — для проточного Каспия; *U* — неустойчивый, *S* — устойчивые уровни

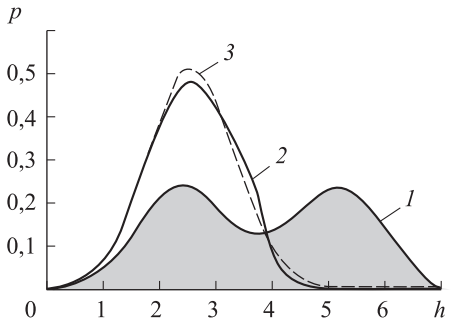


Рис. 5. Плотности распределения вероятности уровня Каспия:
1 — для бессточного Каспия; *2* — проточного Каспия; *3* — гауссовская ПРВ

С физической точки зрения максимумы плотности вероятности $p(h)$ уровня Каспия соответствуют отметкам уровня, в окрестностях которых уровень моря проводит относительно много времени. Используя аналогию с движением частицы по «горному ландшафту», за-

даваемому потенциалом (12), видим, что максимумы плотности вероятности $p(h)$ соответствуют «долинам потенциала» [22]. Минимумы $p(h)$ соответствуют «вершинам потенциала» — отметкам, окрестности которых уровень относительно быстро покидает.

В случае бессточного Каспия (т. е. в отсутствие оттока в залив Кара-Богаз-Гол) действие нелинейной зависимости объема испарения от уровня моря (6) приводит к «ландшафту», описываемому кривой *1* на рис. 4. Этот ландшафт имеет две долины и одну вершину. Соответствующая плотность распределения уровня $p(h)$ имеет два максимума и один минимум (кривая *1* на рис. 5).

Ландшафт, соответствующий проточному морю, изображен кривой *2* на рис. 4. Вероятностный потенциал ПРВ уровня проточного Каспия имеет только один минимум, следовательно, ПРВ УКМ оказывается одномодальной (одновершинной). Заметим, что в этом случае ПРВ УКМ может быть аппроксимирована гауссовым распределением (кривая *3* на рис. 5), подробнее эта тема рассмотрена в работе [23].

Таким образом, при одновременном действии отрицательной обратной связи, образованной оттоком морской воды в залив Кара-Богаз-Гол и положительной обратной связи — действием нелинейной зависимости испарения от уровня моря, ПРВ УКМ оказывается одномодальной и близкой к гауссовому распределению.

Полученные модельные аналитические результаты зависимости вида ПРВ УКМ от режима оттока морской воды в залив Кара-Богаз-Гол (наличие или отсутствия оттока — одномодальность или бимодальность ПРВ УКМ, соответственно) естественно проверить сопоставлением с данными наблюдений за уровнем Каспия. Для корректного сопоставления необходимо чтобы, во-первых, выполнялось условие неизменности гидравлических условий в проливе, соединяющем море и залив в течение всего периода наблюдений за уровнем. Как уже было отмечено выше, это условие неоднократно нарушалось. Другими словами, ряд наблюденных отметок уровня фактически нестационарен.

Во-вторых, даже если игнорировать эту нестационарность, ряд наблюдений за уровнем должен быть достаточно длинным для построения статистически достоверной гистограммы УКМ. Коэффициент автокорреляции УКМ $r \cong 0,98$, радиус корреляции УКМ равен $R = 1/(1-r) \cong 50$. Высокая автокоррелированность УКМ приводит к тому, что ряд зафиксированных отметок уровня эквивалентен N независимых наблюдений:

$$N = \frac{M}{R} = \frac{177}{50} \approx 3,5,$$

где M — число наблюдений за уровнем моря на посту в г. Махачкала (1837–2014 гг.). Столь малое число независимых наблюдений, как известно, недостаточно для построения статистически достоверной выборочной гистограммы.

Учитывая вышесказанное, был применен метод численного (имитационного) моделирования колебаний УКМ. Для этого было использовано дискретное уравнение водного баланса:

$$h_t = h_{t-1} + \frac{v_t^+}{F\left(h_{t-1}\right)} - e_{\text{det}}\left(h_{t-1}\right) - v^-\left(h_{t-1}\right), \tag{19}$$

где функции $F\left(h_{t-1}\right)$, $e_{\text{det}}\left(h_{t-1}\right)$ и $v^-\left(h_{t-1}\right)$ определялись зависимостями (4), (5) и (6), соответственно, численные коэффициенты в этих зависимостях приведены в начале этого раздела; t — в этом случае дискретное время (годы), $t = 0,\ 1,\ldots,N$.

Суммарный приток в море моделировался марковской последовательностью:

$$v_t^+ = r_v v_{t-1}^+ + w_t, \tag{20}$$

где $r_v = 0{,}3$ — коэффициент автокорреляции притока; w_t — белый шум со средней величиной 192 км^3/год и дисперсией 2275 (км^3/год)^2. Белый шум был сгенерирован стандартным датчиком псевдослучайных гауссовых чисел. Начальные значения уровня и притока были заданы равными 2,5 м (над отметкой –31,0 БС) и 275 км^3/год, соответственно. Длина последовательности N годовых величин притока принималась равной 10^6, что обеспечивало необходимую точность при построении гистограмм уровня Каспия для двух режимов: без оттока морской воды в залив Кара-Богаз-Гол и при наличии такого оттока. Результаты отражены на рис. 6.

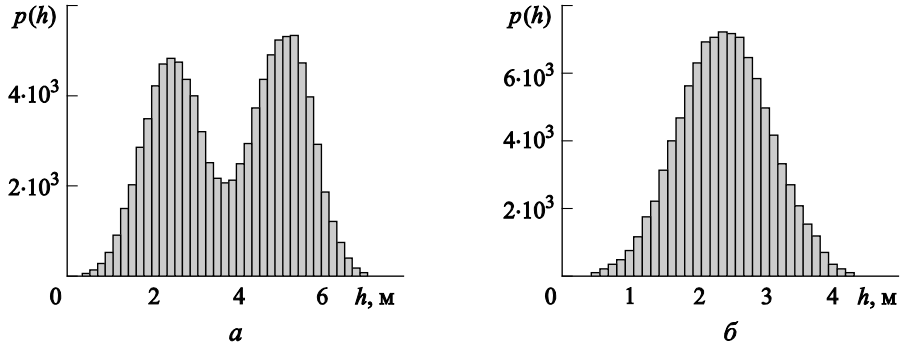


Рис. 6. Гистограммы УКМ по результатам численного моделирования:
а — для бессточного Каспия; *б* — для Каспия с оттоком в залив Кара-Богаз-Гол

Результаты численного моделирования подтверждают полученные на основе аналитической модели результаты. При отсутствии оттока из Каспия в залив Кара-Богаз-Гол ПРВ УКМ бимодальна, при наличии оттока — одномодальна.

Заключение. Вид плотности распределения вероятности уровня Каспия применительно к выбранному варианту водного баланса моря существенно зависит от режима оттока морской воды в залив Кара-Богаз-Гол. Прекращение оттока в залив приводит к режиму колебаний уровня, при котором стационарная плотность распределения уровня моря становится бимодальной. В режиме проточного водоема, при оттоке морской воды в залив Кара-Богаз-Гол, плотность распределения уровня Каспия оказывается одномодальной.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-05-06160) и РФФИ-РГО (проект № 13-05-41007).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. Некоторые положения статистической теории колебаний уровней естественных водоемов и их применение к исследованию режима Каспийского моря. *Труды Первого совещания по регулированию стока.* Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР, 1946, с. 76–93.

[2] Голицын Г.С., Раткович Д.Я., Фортус М.И., Фролов А.В. О современном подъеме уровня Каспийского моря. *Водные ресурсы*, 1998, т. 25, № 2, с. 133–139.

[3] Музылев С.В., Привальский В.Е., Раткович Д.Я. *Стохастические модели в инженерной гидрологии*. Москва, Наука, 1982, 184 с.

[4] Фролов А.В. *Моделирование многолетних колебаний уровня Каспийского моря: теория и приложения*. Москва, ГЕОС, 2003, 171 с.

[5] Semenov V.A., Nikitina N.G., Mokhov I.I. Atlantic Multidecadal Variability and Hydrological Cycle in the Caspian Sea Watershed. *Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modelling*, 2013, no. 43, pp. 16–17.

[6] Пархоменко В.П. Глобальная модель климата с описанием термохалинной циркуляции Мирового океана. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 1, с. 94–108.

[7] Arpe K., Bengtsson L., Golitsyn G.S., Mokhov I.I., Semenov V.A., Sporyshev P.V. Connection between Caspian Sea Level Variability and ENSO. *Geophysical Research Letters*, 2000, vol. 27, no. 17, pp. 2693–2696.

[8] Arpe K., Leroy S.A.G., Wetterhall F., Khan V., Hagemann S., Lahijani H. Prediction of the Caspian Sea Level Using ECMWF Seasonal Forecasts and Reanalysis. *Theoretical and Applied Climatology*, 2014, no. 117, pp. 41–60. DOI 10.1007/s00704-013-0937-6

[9] Крицкий С.Н., Коренистов Д.В., Раткович Д.Я. *Колебания уровня Каспийского моря*. Москва, Наука, 1975, 158 с.

[10] Giralt S., Julia R., Leroy S., Gasse F. Cyclic Water Level Oscillations of the Kara Bogaz Gol—Caspian Sea System. *Earth and Planetary Science Letters*, 2003, vol. 212, iss. 1–2, pp. 225–239.

[11] Музылев С.В. Теоретико-вероятностный анализ колебаний уровней бессточных водоемов. *Водные ресурсы*, 1980, № 5, с. 21–40.

[12] Панин Г.Н. *Испарение и теплообмен Каспийского моря*. Москва, Наука, 1987, 89 с.

[13] Хубларян М.Г., Найденов В.И. О тепловом механизме колебаний уровня водоемов. *ДАН СССР*, 1991, т. 319, № 6, с. 1438–1444.

[14] Голицын Г.С. *Статистика и динамика природных процессов и явлений: методы, инструментарий, результаты*. Москва, КРАСАНД, 2013, 398 с.
[15] Демченко П.Ф., Кислов А.В. *Стохастическая динамика природных объектов. Броуновское движение и геофизические примеры*. Москва, ГЕОС, 2010, 189 с.
[16] Долгоносов Б.М. *Нелинейная динамика экологических и гидрологических процессов*. Москва, ЛИБРОКОМ, 2009, 440 с.
[17] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 3–4.
[18] Малинецкий Г.Г., Фаллер Д.С. Анализ бифуркаций в двухмодовой аппроксимации системы Курамото — Цузуки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3 (3), с. 111–125.
[19] Laio F., Porporato A., Ridolfi L., Tamea S. Detecting Nonlinearity in Time Series Driven by non-Gaussian Noise: the Case of River Flows. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2004, vol. 11, pp. 463–470. DOI 10.5194/npg-11-463-2004
[20] Salas J.D., Kim H.S., Eykholt R., Burlando P., Green T.R. Aggregation and Sampling in Deterministic Chaos: Implications for Chaos Identification in Hydrological Processes. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2005, vol. 12, pp. 557–567.
[21] Тихонов В.И., Миронов М.А. *Марковские процессы*. Москва, Советское радио, 1977, 488 с.
[22] Хорстемке В., Лефевр Р. *Индуцированные шумом переходы*. Москва, Мир, 1987, 400 с.
[23] Frolov A.V. *The Caspian Sea as Stochastic Reservoir. Hydrological Models for Environmental Management.* Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publishers, 2002, pp. 91–108.

Статья поступила в редакцию 09.09.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Фролов А.В. Моделирование влияния оттока в залив Кара-Богаз-Гол на плотность распределения вероятности уровня Каспийского моря. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3 (11), с. 79–92.

Фролов Анатолий Васильевич окончил географический факультет (кафедру океанологии) МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р техн. наук, старший научный сотрудник Института водных проблем РАН. Автор более 50 работ в области гидрологии и водных ресурсов. e-mail: anatolyfrolov@yandex.ru

Modelling influence of outflow into the Kara-Bogaz-Gol Bay on probability density of the Caspian Sea level fluctuations

© A.V. Frolov

Water Problems Institute of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119333, Russia

The paper considers long-term fluctuations of the Caspian Sea level as a nonlinear system output with positive and negative feedbacks. The Caspian Sea model with due consideration of an outflow into the Kara-Bogaz-Gol Bay is designed. Density distribution of the sea level is obtained as a solution to the corresponding Fokker — Planck — Kolmo-

gorov equation. The bimodal probability density of the sea level distribution, which meets the endorheic Caspian Sea (if you cut off the Kara-Bogaz-Gol Bay), is shown to turn into the single-mode probability density in case of simultaneous influence of evaporation and seawater outflow into the Kara-Bogaz-Gol Bay on the sea level.

Keywords: *the Caspian Sea level, probability density distribution, Fokker — Planck — Kolmogorov equation, nonlinear hydrological system, bimodality*.

REFERENCES

[1] Kritsky S.N., Menkel M.F. Nekotorye polozheniya statisticheskoi teorii kolebanii urovnei estestvennykh vodoemov i ikh primenenie k issledovaniyu rezhima Kaspiiskogo morya [Some statistical theory problems of natural reservoir level fluctuations and their application in the research into the Caspian Sea regime]. *Trudy Pervogo soveschaniya po regulirovaniyu stoka* [Proceedings of the First meeting on flow regulation]. Moscow, Leningrad, USSR AS Publisher, 1946, pp. 76–93.

[2] Golitsyn G.S., Ratkovich D.Ya., Fortus M.I., Frolov A.V. *Vodnye resursy — Water resources*, 1998, vol. 25, no. 2, pp. 133–139.

[3] Muzylev S.V., Privalsky V.E., Ratkovich D.Ya. *Stokhasticheskie modeli v inzhenernoi gidrologii* [Stochastic models in engineering hydrology]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 184 p.

[4] Frolov A.V. *Modelirovanie mnogoletnikh kolebanii urovnya Kaspiiskogo morya: teoriya i prilozheniya* [Modeling long-term fluctuations of the Caspian Sea level: theory and applications]. Moscow, GEOS Publ., 2003, 171 p.

[5] Semenov V.A., Nikitina N.G., Mokhov I.I. *Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modelling*, 2013, no. 43, pp. 16–17.

[6] Parkhomenko V.P. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modelling and Computational Methods,* 2015, no. 1, pp. 94–108.

[7] Arpe K., Bengtsson L., Golitsyn G.S., Mokhov I.I., Semenov V.A., Sporyshev P.V. *Geophysical Research Letters*, 2000, vol. 27, no. 17, pp. 2693–2696.

[8] Arpe K., Leroy S.A.G., Wetterhall F., Khan V., Hagemann S., Lahijani H. *Theoretical and Applied Climatology*, 2014, no. 117, pp. 41–60. DOI 10.1007/s00704-013-0937-6

[9] Kritsky S.N., Korenistov D.V., Ratkovich D.Ya. *Kolebaniya urovnya Kaspiiskogo morya* [The Caspian Sea level fluctuations]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 158 p.

[10] Giralt S., Julia R., Leroy S., Gasse F. *Earth and Planetary Science Letters*, 2003, vol. 212, no. 1–2, pp. 225–239.

[11] Muzylev S.V. *Vodnye resursy — Water resources,* 1980, no. 5, pp. 21–40.

[12] Panin G.N. *Isparenie i teploobmen Kaspijskogo morya* [Evaporation and heat exchange of the Caspian Sea]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 89 p.

[13] Khublaryan M.G., Naidenov V.I. O teplovom mehanizme kolebaniy urovnya vodoemov [About the thermal mechanism of the reservoir level fluctuations]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1991, vol. 319, no. 6, pp. 1438–1444.

[14] Golitsyn G.S. *Statistika i dinamika prirodnyh processov i yavlenii: metody, instrumentarii, rezultaty* [Statistics and dynamics of natural processes and phenomena: methods, tools, results]. Moscow, KRASAND Publ., 2013, 398 p.

[15] Demchenko P.F., Kislov A.V. *Stokhasticheskaya dinamika prirodnykh obyektov. Brounovskoe dvizhenie i geofizicheskie primery* [Stochastic dynamics of natural objects. Brownian motion and geophysical examples]. Moscow, GEOS Publ., 2010, 189 p.

[16] Dolgonosov B.M. *Nelinejnaya dinamika ekologicheskikh i gidrologicheskikh protsessov* [Nonlinear dynamics of ecological and hydrological processes]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2009, 440 p.
[17] Aleksandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modelling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 3–4.
[18] Malinetskiy G.G., Faller D.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modelling and Computational Methods*, 2014, no. 3 (3), pp. 111–125.
[19] Laio F., Porporato A., Ridolfi L., Tamea S. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2004, vol. 11, pp. 463–470. DOI 10.5194/npg-11-463-2004.
[20] Salas J.D., Kim H.S., Eykholt R., Burlando P., Green T.R. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2005, vol. 12, pp. 557–567.
[21] Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy.* [Markov processes], Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1977, 488 p.
[22] Horsthemke V., Lefevr R. *Indutsirovannye shumom perekhody* [Noise-induced transitions]. Moscow, Mir Publ., 1987, 400 p.
[23] Frolov A.V. *The Caspian Sea as Stochastic Reservoir. Hydrological Models for Environmental Management*, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publishers, 2002, pp. 91–108.

Frolov A.V. graduated from Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geography, Department of Oceanology. Dr. Sci. (Eng.), Senior Research Fellow, Water Problems Institute of the Russian Academy of Sciences. Author of 50 research publications in the fields of hydrology and water resources. e-mail: anatolyfrolov@yandex.ru