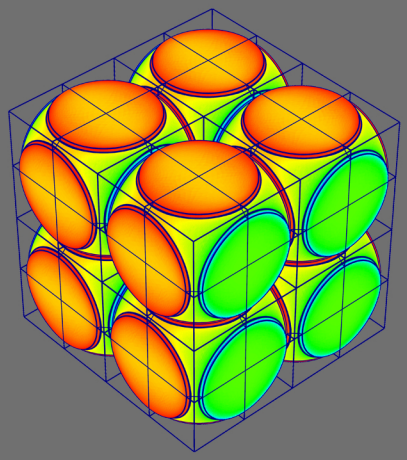
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Kotenev V., Bulgakov V., Ozhgibisova Y. Modification of Pohlhausen method for calculating heat transfer on blunt bodies. Mathematical Modeling and Computational Methods, 2016, №3 (11), pp. 33-52

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/107/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 08:01:52

УДК 533.6.011.5

Модификация метода Польгаузена для расчета тепловых потоков на затупленных телах

© В.П. Котенев, В.Н. Булгаков, Ю.С. Ожгибисова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработана модификация метода Польгаузена, позволяющая быстро и эффективно получить распределение теплового потока по поверхности затупленных тел. Проведены расчеты, их результаты приведены в сравнении с численным решением задачи в рамках уравнений Навье — Стокса.

Ключевые слова: *сверхзвуковой поток, пограничный слой, метод Польгаузена.*

Введение. При проектировании современных и перспективных летательных аппаратов, предназначенных для сверх- и гиперзвуковых режимов полета, необходимо своевременно и точно определять характерные параметры режимов обтекания.

Сведения об аэродинамических характеристиках и тепловых потоках, полученные в результате дорогостоящих экспериментов, не всегда соответствуют условиям реального полета. По этой причине получение необходимой информации может быть осуществлено посредством разработки эффективных приближенных и аналитических методов, обладающих достаточной точностью [1, 2]. Такие методы полезны для интерпретации результатов численного моделирования [3–6] и экспериментальных данных, а также могут применяться в расчетах при варьировании параметров обтекания и формы тела.

Одной из основных математических моделей, применяемой на практике, является модель пограничного слоя Л. Прандтля [7–13], согласно которой возмущенная область между телом и ударной волной разбивается на тонкий пограничный слой и внешнее невязкое течение.

В статье рассмотрена модификация, представленного в работе [13] и имеющего развитие в работах [14–19], метода Польгаузена, которая оказывается достаточно эффективной при решении поставленной задачи. Аналитические выражения для распределения теплового потока, отнесенного к его значению в точке торможения, были получены для осесимметричного обтекания затупленных тел различного удлинения. Все полученные аналитические решения сравниваются с численным решением уравнений Навье — Стокса [1, 2].

Система уравнений ламинарного пограничного слоя. Запишем систему уравнений двумерного ламинарного пограничного слоя при установившемся течении сжимаемого газа в координатах, связанных с поверхностью тела (координаты x, y — направлены вдоль образующей тела и по нормали к телу, соответственно):

- уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

- уравнения движения, записанные для x и y компонент соответственно:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{2}$$

$$\frac{dP}{dy} = 0; \tag{3}$$

- уравнение энергии:

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y} \right).$$

Здесь ρ — плотность; u, v — проекции вектора скорости на координаты x и y; r — цилиндрический радиус образующей тела; P — давление; μ — динамическая вязкость; h — энтальпия, Pr — число Прандтля.

В качестве определяющего соотношения запишем уравнение состояния Клапейрона — Менделеева, устанавливающее зависимость плотности от давления и температуры в сжимаемых средах:

$$P = \rho R T,$$

где R — газовая постоянная.

Для дальнейшего описания будем приписывать индекс «0» параметрам потока на стенке, а индекс «1» — параметрам на границе пограничного слоя.

Теперь сформулируем граничные условия. Для непроницаемой стенки скорость должна удовлетворять условию прилипания $u_0 = v_0 = 0$ при $y = 0$.

На границе пограничного слоя при $y = \delta(x)$ для скорости u и энтальпии h задают значения соответствующих параметров внешнего потока, т. е. $u = u_1$ и $h = h_1$.

Для дальнейших преобразований вместо x, y введем следующие координаты:

$$\xi = x, \quad \eta = \left(\int_0^y \frac{\mu_1(x)}{\mu(x, y)} dy \right) / \delta_1,$$

где η — безразмерное приведенное расстояние; $\delta_1 = \int\limits_0^{\delta(x)} \frac{\mu_1}{\mu} dy$ — приведенная толщина пограничного слоя, $\delta(x)$ — есть то конечное расстояние от стенки, на котором пограничный слой смыкается с внешним течением. Значению $\eta = 0$ соответствует поверхность стенки, а $\eta = 1$ — граница пограничного слоя.

Поскольку в новых координатах справедливы следующие соотношения: $\eta(x,\, 0) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(x,\, 0) \equiv 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial P}{\partial \eta}$, то уравнения (1)–(3) примут вид:

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho u r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

$$\rho u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \rho v \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\mu_1^2}{\mu\delta_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0.$$

Уравнение энергии запишем следующим образом:

$$\rho u\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \rho v \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial h}{\partial \eta} = u\frac{dP}{dx} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\mu_1^2}{\mu\delta_1^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu\delta_1^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2. \qquad (5)$$

На границе пограничного слоя напряжение трения равно нулю, следовательно $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_1 = 0$. Поскольку первая производная от скорости по нормальной координате равна нулю, то после подстановки в уравнение движения находим, что $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_1 = 0$.

С учетом граничного условия на стенке система принимает вид:

$$\left(\frac{\partial \rho u r}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \rho v r}{\partial \eta}\right)_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\mu_1^2}{\mu_0\delta_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_0, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_0^2 = 0. \qquad (8)$$

Из соотношения (6) следует, что при $r \neq 0$ производная

$$\left(\frac{\partial \rho v}{\partial \eta}\right)_0 = 0. \tag{9}$$

Динамическую вязкость μ можно определить, воспользовавшись формулой Сазерленда или степенной зависимостью [9], которые широко применяют на практике.

Формула Сазерленда имеет вид:

$$\frac{\mu}{\mu_a} = \frac{T_{00} + T_a}{T_{00} + T}\left(\frac{T}{T_a}\right)^{3/2}. \tag{10}$$

Здесь T — температура в рассматриваемой точке на поверхности тела. Входящие в эту формулу характерные величины имеют следующие значения [9]: $T_{00} = 110$ K, $T_a = 273$ K, $\mu_a = 1,72 \cdot 10^{-5}$ кг/м·с.

Степенная зависимость имеет вид:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\omega}, \tag{11}$$

где $\omega \sim 0,7$.

Будем рассматривать случаи, когда динамическую вязкость на теле определяют формулы (10) или (11), а внутри и на границе пограничного слоя — выражение (11). Формула (10) полезна для того, чтобы связать между собой число Маха набегающего потока M_∞, число Рейнольдса Re_∞ и высоту полета с использованием таблиц стандартной атмосферы.

Краткие сведения о методе Польгаузена. Согласно методу Польгаузена, скорость в пограничном слое представляется полиномом четвертой степени:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1(x)} = a(x)\eta + b(x)\eta^2 + c(x)\eta^3 + d(x)\eta^4, \tag{12}$$

где $\bar{u}$ — безразмерная скорость; $u_1(x)$ — скорость на границе пограничного слоя.

Далее введем безразмерный параметр:

$$\Lambda(x) = -\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\right)_0 = -\frac{\mu_0 \delta_1^2}{\mu_1^2}\frac{1}{u_1}\frac{dP}{dx}, \tag{13}$$

причем P зависит только от x, т. е. $P = P(x)$.

Используя граничные условия на стенке (условие прилипания) и на границе пограничного слоя для скорости, а также для равенства нулю первой и второй производной от скорости по нормальной координате для определения коэффициентов полинома (12), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2b = \Lambda, \\ a + b + c + d = 1, \\ a + 2b + 3c + 4d = 0, \\ 2b + 6c + 12d = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решение системы (14) дает коэффициенты a, b, c и d. Подставив найденные коэффициенты в формулу (12), найдем классический полином Польгаузена:

$$\overline{u} = \frac{u}{u_1} = \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right)\eta - \frac{\Lambda}{2}\eta^2 + \left(-2 + \frac{\Lambda}{2}\right)\eta^3 + \left(1 - \frac{\Lambda}{6}\right)\eta^4.$$

Причем, согласно [13], для параметра Λ вводят оценку $-12 \le \Lambda \le 12$.

Далее в методе Польгаузена вводят понятия толщина вытеснения и толщина потери импульса, находят связи для отношения этих величин к толщине пограничного слоя и выводят дифференциальное уравнение для определения функции $\Lambda(x)$, через которую определяют остальные характеристики пограничного слоя. Отметим, что при этом для неадиабатической стенки необходимо вводить некоторые гипотезы для отношения упомянутых толщин.

Уточненная оценка для параметра Λ(*x*). Рассмотрим важный для практики случай, когда стенка является относительно холодной. Уточним эту оценку в практически важном случае, когда тепловой поток:

$$Q = \frac{\mu_0}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\mu_0}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} > 0.$$

Продифференцировав уравнение движения с учетом того, что на стенке

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

и выполнив преобразования, получим:

$$\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right)_0 \Big/ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_0 = \frac{6c}{2b}. \tag{15}$$

Как было сказано ранее, динамическая вязкость μ на теле определяется формулой Сазерленда или степенной зависимостью. Продифференцируем формулы (10) и (11) по η.

Учитывая, что $h = c_P T$, для формулы (10) имеем:

$$\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_0 = \left(-\frac{\bar{h}_0}{T_{00}/T_0' + \bar{h}_0} + \frac{3}{2}\right)\frac{1}{h_0}\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta}\right)_0. \qquad (16)$$

Здесь $T_0' = T_\infty\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{M}_\infty^2\right)$ — температура в точке торможения; M_∞ — число Маха набегающего потока, T_∞ — температура набегающего потока (определяется с помощью стандартной атмосферы по заданным числам Рейнольдса Re_∞ и Маха M_∞, число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_\infty}$, R_0 — значение радиуса кривизны в точке торможения).

Для степенной зависимости (11) с учетом $\mu = \mathrm{const} \cdot h^\omega$, получим:

$$\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_0 = \frac{\omega}{h_0}\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0. \qquad (17)$$

Поскольку рассматриваем случай, когда тепловой поток $Q > 0$, то $\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0 > 0$. Из формулы (16) или (17) с учетом (15), получим:

$$-\frac{6\left(-2 + \Lambda/2\right)}{\Lambda} > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что при $Q > 0$ оценка параметра Польгаузена будет $0 < \Lambda < 4$.

Модификация метода Польгаузена. Пользуясь зависимостями для распределения давления на затупленных телах [14–16], проведем модификацию этого метода, чтобы упростить процедуру и отказаться от решения дифференциального уравнения.

Аналогично скорости представим в виде полинома четвертой степени следующую функцию:

$$h + \alpha(x)\frac{u^2}{2} = h_0 + p(x)\eta + q(x)\eta^2 + s(x)\eta^3 + t(x)\eta^4, \qquad (18)$$

где $\alpha(x)$ — безразмерный «кинетический» параметр, подлежащий определению. При $\alpha = 1$ соотношение (18) дает полную энтальпию единицы массы газа.

Найдем коэффициенты p, q, s разложения. Для этого запишем первые три производных соотношения (18):

$$\frac{\partial h}{\partial \eta}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial \eta}=p+2q\eta+3s\eta^2+4t\eta^3, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+\alpha u\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=2q+6s\eta+12t\eta^2, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3}+3\alpha\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\alpha u\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}=6s+24t\eta. \tag{21}$$

Учитывая то, что на стенке при $\eta=0$ для скорости выполняется $u_0=0,$ производные (19)–(21) примут вид:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0=p, \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right)_0+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_0^2=2q, \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3}\right)_0+3\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_0=6s. \tag{24}$$

Из (19)–(24) получим:

$$\left(\frac{\partial^2\left(h+\alpha(u^2/2)\right)}{\partial \eta^2}\right)_0=(\alpha-\mathrm{Pr})\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_0^2.$$

Будем рассматривать наиболее часто встречающийся в практике расчетов режим, когда энтальпия h_0 (или температура) на стенке постоянна. Тогда продифференцировав уравнение (5) с учетом (7)–(9) и $\frac{\partial \eta}{\partial x}(x,\,0)=0,$ получим:

$$3\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_0+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3}\right)_0=0,$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial^3\left(h+\alpha(u^2/2)\right)}{\partial \eta^3}\right)_0=3(\alpha-\mathrm{Pr})\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_0.$$

Таким образом, формулы (22)–(24) можно привести к виду:

$$\left(\frac{\partial\left(h+\alpha(u^2/2)\right)}{\partial\eta}\right)_0=\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)_0=p, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\partial^2\left(h+\alpha(u^2/2)\right)}{\partial\eta^2}\right)_0=(\alpha-\mathrm{Pr})\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_0^2=2q,$$

$$\left(\frac{\partial^3\left(h+\alpha(u^2/2)\right)}{\partial\eta^3}\right)_0=3(\alpha-\mathrm{Pr})\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)_0=6s.$$

Вывод уравнения для определения Λ. Введем следующие обозначения: $\kappa=-\dfrac{\bar{h}_0}{h_0+(T_{00}/T_0')}+\dfrac{3}{2}$ — при использовании формулы Сазерленда на стенке, $\kappa=\omega$ — для случая степенной зависимости.

С учетом формул (15), (16) (или (17) для степенной зависимости на стенке) и (25) коэффициент p полинома (18) примет вид:

$$p=\frac{h_0}{\kappa}\frac{12-3\Lambda}{\Lambda}. \tag{26}$$

Приняв во внимание разложение скорости для коэффициентов q, s получим выражения:

$$q=(\alpha-\mathrm{Pr})\frac{u_1^2}{2}\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)^2, \tag{27}$$

$$s=-\frac{(\alpha-\mathrm{Pr})}{2}u_1^2\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)\Lambda. \tag{28}$$

Для дальнейших преобразований при выводе искомого уравнения для функции $\Lambda(x)$ получим выражение

$$\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)_1.$$

Продифференцируем формулу (4) с учетом того, что на границе пограничного слоя $\left(\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)_1=\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)_1=0$, а также $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\eta}(x,1)\right)=0$. Получим:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right)_1 = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\frac{dP}{dx}. \qquad (29)$$

Поскольку для совершенного газа $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$ ($\gamma = \frac{c_P}{c_V}$, где c_P — коэффициент теплоемкости при постоянном давлении; c_V — коэффициент теплоемкости при постоянном объеме), то $-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \eta}$. Следовательно, на границе пограничного слоя справедливо соотношение:

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 \frac{dP}{dx} = \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2}\left(\frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial \eta^3}\right)_1.$$

Учитывая (13) и (29), получим искомое выражение:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 = -\frac{\mu_1 h_1}{(\mu_1^2/\mu_0)\Lambda}\left(\frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial \eta^3}\right)_1. \qquad (30)$$

Из формулы (12) на границе имеем:

$$\left(\frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial \eta^3}\right)_1 = 6c + 24d = 12 - \Lambda.$$

Тогда выражение (30) преобразуем к виду:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 = -\frac{\mu_0}{\mu_1} h_1 \frac{12 - \Lambda}{\Lambda}. \qquad (31)$$

Согласно формуле (18) применительно к границе пограничного слоя имеем:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 = p + 2q + 3s + 4t.$$

Таким образом, на границе пограничного слоя, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 = p + 2q + 3s + 4t, \\ h_1 + \alpha\frac{u_1^2}{2} - h_0 = p + q + s + t, \end{cases} \qquad (32)$$

из которой следует уравнение:

$$3p + 2q + s = 4\left(h_1 + \alpha \frac{u_1^2}{2} - h_0 \right) - \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_1 . \tag{33}$$

На внешней границе пограничного слоя при установившемся течении справедлив интеграл Бернулли:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = H = \frac{V_{\max}^2}{2},$$

где H — полная энтальпия (энтальпия торможения); $V_{\max}$ — максимальное значение модуля скорости.

На линии тока модуль скорости не может превышать максимального значения $u_1 \le V_{\max}$, причем:

$$V_{\max}^2 = 2H. \tag{34}$$

Перепишем интеграл Бернулли с учетом выражения (34):

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2}.$$

Здесь имеет место соотношение

$$\left(\frac{P}{P_0'} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \left(\frac{u_1}{V_{\max}} \right)^2 = 1,$$

где P_0' — давление в точке торможения (для совершенного газа $\gamma = 1,4$), поэтому:

$$\frac{u_1^2}{H} = 2\left(1 - \left(\frac{P}{P_0'} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right). \tag{35}$$

Введем безразмерные параметры следующим образом:

$$\overline{h_1} = \frac{h_1}{H} = \left(\frac{P}{P_0'} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}, \tag{36}$$

$$\overline{h_0} = \frac{h_0}{H}, \ \overline{h} = \frac{h}{H}. \tag{37}$$

Функция $\overline{h_1}$ имеет простую физическую интерпретацию, характеризует термодинамическое состояние газа и представляет собой

отношение температуры движущегося газа к температуре изоэнтропически заторможенного потока.

На границе пограничного слоя будем использовать степенную зависимость (11). Тогда производная (31) примет вид:

$$\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta}\right)_1 = -\overline{h_0}^{\omega}\,\overline{h_1}^{1-\omega}\,\frac{12-\Lambda}{\Lambda}. \tag{38}$$

Учитывая выражения (26)–(28) и (36)–(38), перепишем уравнение (33) для определения параметра Λ в конечном виде:

$$3\frac{\overline{h_0}}{\kappa}\frac{12-3\Lambda}{\Lambda} + 2(\alpha-\mathrm{Pr})\left(1-\overline{h_1}\right)\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)^2 - (\alpha-\mathrm{Pr})\left(1-\overline{h_1}\right)\Lambda\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right) = \tag{39}$$
$$= 4\left[1+(\alpha-1)(1-h_1)-\overline{h_0}\right] + \overline{h_0}^{\omega}\,\overline{h_1}^{1-\omega}\,\frac{12-\Lambda}{\Lambda}.$$

Выбор кинетического параметра. Выбор кинетического параметра $\alpha(x)$ осуществим таким образом, чтобы соотношение (39) для определения $\Lambda(x)$ свелось к квадратному уравнению. Этому требованию удовлетворяет следующее правило: если величина $\pm\frac{1}{\Lambda^2}+$ $+\mathrm{Pr}>0,$ то α полагается равным этой величине, а если $\pm\frac{1}{\Lambda^2}+\mathrm{Pr}\le 0$ или Λ является комплексным числом, то $\alpha=0.$

Непосредственными расчетами установлено, что $\alpha=\frac{1}{\Lambda^2}+\mathrm{Pr}$ дает хороший результат для тел малого удлинения, а $\alpha=-\frac{1}{\Lambda^2}+\mathrm{Pr}$ для тел большого удлинения. При подстановке данного параметра в формулу (39) в обоих случаях выражение принимает вид квадратного уравнения, причем его корень (знак перед радикалом в корне) выбирают с учетом $0<\Lambda<4,$ поскольку ищут решение для $Q>0.$

Расчет давления. Для использования соотношения (39) также необходимо знать распределение давления на всем участке между рассматриваемой точкой и точкой полного торможения. Определим давление, воспользовавшись методом, описанным в работах [14–16]:

$$P=\frac{P}{P_0'}=\overline{h_1}^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Согласно этому методу давление на поверхности произвольных затупленных тел можно определить с помощью аналитической формулы

$$\frac{P}{P_0'} = \left(\frac{1 - k\chi^2}{1 + k\chi^2} \right)^{\lambda(\sigma)(\gamma/(\gamma-1))}, \qquad (40)$$

где $k = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 3} \dfrac{1}{\left(\sigma_* - \pi/2\right)^2}$; $\chi = \sigma - \dfrac{\pi}{2}$; σ — угол между осью тела и вектором скорости набегающего потока в рассматриваемой точке, σ_* — положение звуковой точки.

Для затупленных тел, отличных от сферы, функцию $\lambda(\sigma)$ на участке $[\sigma_*, \pi/2]$ представим квадратичной:

$$\lambda(\sigma) = a\sigma^2 + b\sigma + c. \qquad (41)$$

На участке $[\sigma_{\min}, \sigma_*]$ функция $\lambda(\sigma)$, согласно данным [15], является линейной. Граница отрезка $\sigma_{\min} \geq -\pi/4$.

В звуковой точке квадратичная и линейная функции гладко сопрягаются, кроме того, в звуковой точке и в точке торможения $\lambda(\sigma_*) = \lambda(\pi/2) = 1$. С использованием этих условий для функции $\lambda(\sigma)$ определяются коэффициенты квадратичной зависимости (41).

Расчет тепловых потоков. Тепловой поток определяют следующим соотношением:

$$Q = \frac{\mu_0}{\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_0 = \frac{\mu_0}{\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\overline{h_0}}{\kappa} \frac{\mu_1}{\delta_1} \frac{12 - 3\Lambda}{\Lambda}. \qquad (42)$$

Здесь

$$\frac{\mu_1}{\delta_1} = \sqrt{\frac{\rho_1 (du_1/dx)\mu_0}{\Lambda}}, \quad \kappa = -\frac{\overline{h_0}}{\overline{h_0} + T_{00}/T_0'} + \frac{3}{2}$$

для случая формулы Сазерленда на стенке, $\kappa = \omega$ для случая степенной зависимости.

Таким образом, для определения теплового потока на поверхности тела получаем отношение:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{(12 - 3\Lambda)/\Lambda^{3/2} \sqrt{\rho_1 (du_1/dx)}}{\left((12 - 3\Lambda)/\Lambda^{3/2} \sqrt{\rho_1 (du_1/dx)} \right)_{\sigma = \pi/2}}, \qquad (43)$$

где Q_0 — значение теплового потока в точке торможения.

В этом соотношении $\frac{du_1}{dx} = -\frac{1}{R(\sigma)}\frac{du_1}{d\sigma}$, $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{1/\gamma} = \overline{h}_1^{1/(\gamma-1)}$, где $R(\sigma)$ — радиус кривизны кривой, описывающей сечение тела; ρ_0 — плотность в точке торможения.

С учетом формул (35) и (36) производная под корнем в соотношении (43) примет вид:

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{1}{R(\sigma)}\frac{du_1}{d\sigma} = -\frac{1}{R(\sigma)}\sqrt{2H}\,\frac{d}{d\sigma}\sqrt{1-\overline{h}_1}. \tag{44}$$

Тогда имеем конечную формулу для определения теплового потока, отнесенного к тепловому потоку в точке торможения:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{(12-3\Lambda)/\Lambda^{3/2}\sqrt{(P^{1/\gamma}/R(\sigma))(d/d\sigma)\sqrt{1-\overline{h}_1}}}{\left((12-3\Lambda)/\Lambda^{3/2}\sqrt{(1/R(\sigma))(d/d\sigma)\sqrt{1-\overline{h}_1}}\right)_{\sigma=\pi/2}}. \tag{45}$$

Перепишем формулу (45) с учетом аналитического выражения для расчета давления (40). Производная формулы (44) имеет вид:

$$\frac{d\sqrt{1-\overline{h}_1}}{d\sigma} = -\frac{1}{2\sqrt{1-\overline{h}_1}}\left[\lambda\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)^{\lambda-1}\left(-\frac{4k\chi}{\left(1+k\chi^2\right)^2}\right)+ \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)\right]. \tag{46}$$

С учетом особенности в точке торможения при $\sigma = \pi/2$ и выражения (46), а также при том, что $\lambda(\pi/2) = 1$, формула для теплового потока принимает вид:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{12-3\Lambda}{\Lambda^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\tau^{1/(\gamma-1)}}{R(\sigma)}\frac{1}{\sqrt{1-\overline{h}_1}}\left[\lambda\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)^{\lambda-1}\left(-\frac{4k\chi}{\left(1+k\chi^2\right)^2}\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{1-k\chi^2}{1+k\chi^2}\right)\right]}:$$
$$:\frac{12-3\Lambda(\pi/2)}{\Lambda(\pi/2)^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{R(\pi/2)}\sqrt{2k}}. \tag{47}$$

В этой формуле производную $\partial\lambda/\partial\sigma$ на участке $[\sigma_*, \pi/2]$ берем от квадратичной функции (41), а на участке $[\sigma_{\min}, \sigma_*]$ от линейной, приведенной в работе [15].

Пересчет тепловых потоков. Формулу для теплового потока также можно записать с учетом коэффициента теплопередачи:

$$Q = \frac{A}{c_P}\left(\overline{h_e} - \overline{h_0}\right), \tag{48}$$

где A — коэффициент теплопередачи; $\overline{h_e}$ — энтальпия восстановления, которая в свою очередь имеет вид $\overline{h_e} = \sqrt{\mathrm{Pr}} + \left(1 - \sqrt{\mathrm{Pr}}\right)\overline{h_1}$.

В точке торможения энтальпия восстановления $\overline{h_e} = 1$, поэтому:

$$Q_0 = \left(A / c_P\right)_0 \left(1 - \overline{h_0}\right). \tag{49}$$

Отнесем (48) к (49) и получим формулу для определения теплового потока на поверхности тела с учетом теплопередачи:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\left(A / c_P\right)}{\left(A / c_P\right)_0} \frac{\overline{h_e} - \overline{h_0}}{1 - \overline{h_0}}.$$

Как известно из многочисленных расчетов, величина A / c_P слабо зависит от энтальпии $\overline{h_0}$, поэтому для пересчета с «холодной» стенки на «горячую» в случае необходимости будем использовать соотношение:

$$\frac{\left(Q / Q_0\right)_H}{\left(Q / Q_0\right)_C} = \frac{(\overline{h_e} - \overline{h_{0_H}}) / (1 - \overline{h_{0_H}})}{(\overline{h_e} - \overline{h_{0_C}}) / (1 - \overline{h_{0_C}})}, \tag{50}$$

где индекс H относится к горячей стенке, а индекс C — к холодной.

Анализ результатов. Приведем результаты расчета тепловых потоков по предложенному методу для сферы (рис. 1, *а*, *б*), эллипсоидов с различными соотношениями полуосей b / a (рис. 2, *а–в*) и параболоида (рис. 3). Результаты были получены для тех же режимов, что численное решение задачи в рамках уравнений Навье — Стокса [1].

Результаты для сферы приведены в зависимости от угла σ (град), а для эллипсоида и параболоида в зависимости от длины дуги вдоль образующей тела S.

При сравнении результатов видно, что метод дает практическое согласование с численным решением [1, 2], причем относительная погрешность в большинстве случаев не превышает 5 %. Отметим, что при относительно горячих температурах стенки (см. рис. 2, *б*) применение формулы (47) дает более высокую погрешность порядка 20 % с решением [1, 2]. По этой причине для «горячей» стенки будем использовать формулу (50).

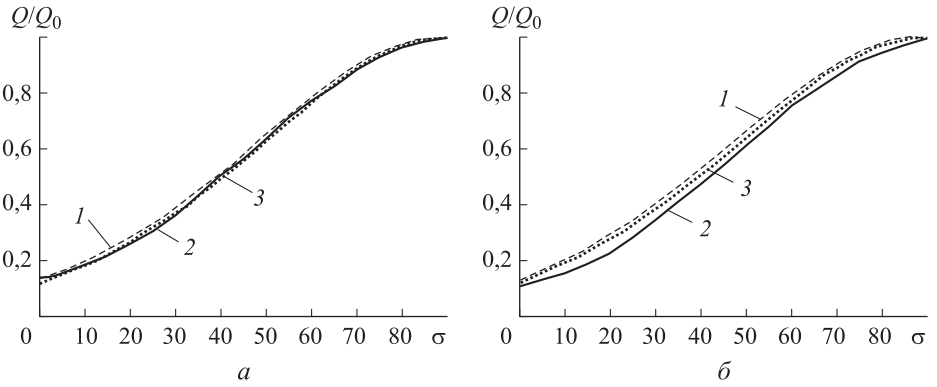


Рис. 1. Результаты расчета тепловых потоков для сферы:

а — $M_\infty = 10$, $\overline{h}_0 = 0,25$, $Re_\infty = 500$, $Pr = 0,72$; *б* — $M_\infty = 10$, $\overline{h}_0 = 0,35$, $Re_\infty = 3500$, $Pr = 0,72$; *1* — решение по формуле (47) с учетом формулы Сазерленда (10) на стенке; *2* — численное решение [1, 2] по модели в рамках полных уравнений Навье — Стокса; *3* — решение по формуле (47) с учетом степенной зависимости (11) на стенке

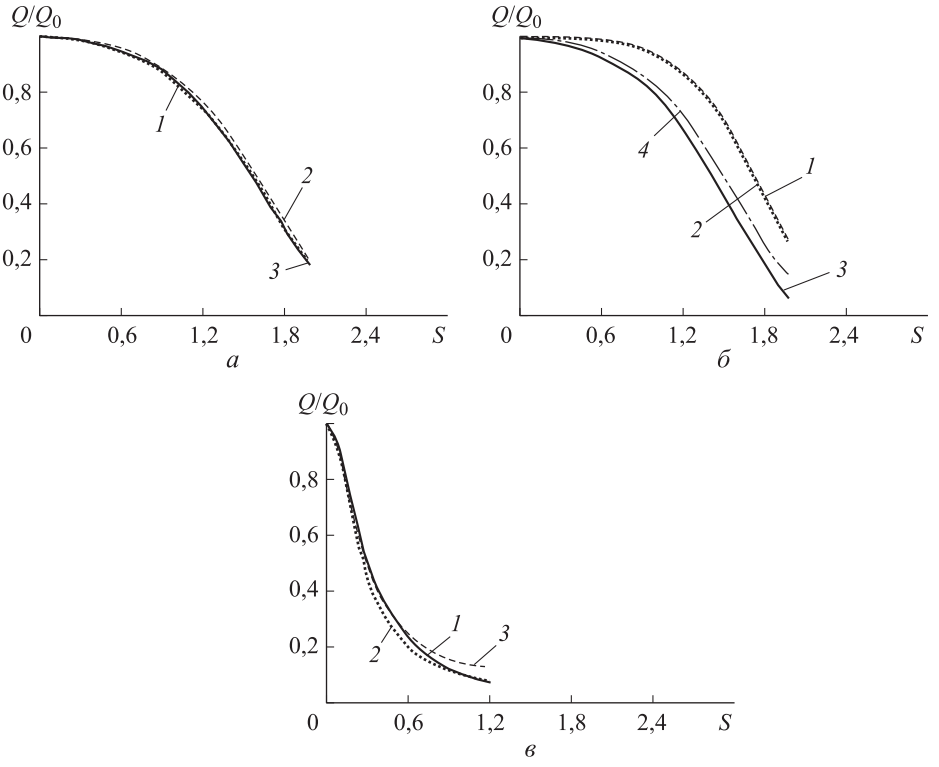


Рис. 2. Результаты расчета тепловых потоков для эллипсоида при $Re_\infty = 1000$, $Pr = 0,75$:

а — $b/a = 3/2$, $M_\infty = 10$, $\overline{h}_0 = 0,16$; *б* — $b/a = 3/2$, $M_\infty = 4$, $\overline{h}_0 = 0,8$; *в* — $b/a = 1/2$, $M_\infty = 10$, $\overline{h}_0 = 0,16$; *1* — решение по формуле (47) с учетом степенной зависимости (11) на стенке; *2* — решение по формуле (47) с учетом формулы Сазерленда (10) на стенке; *3* — численное решение [1, 2] по модели в рамках полных уравнений Навье — Стокса; *4* — пересчет теплового потока по формуле (50)

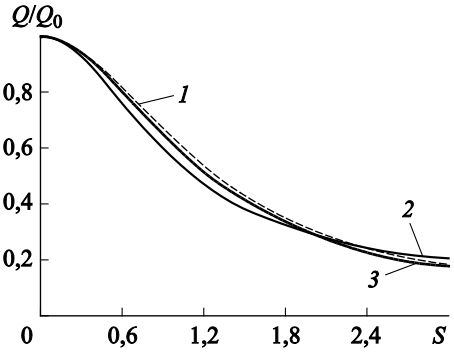


Рис. 3. Результаты расчета тепловых потоков для параболоида при $p = 1,604$, $M_\infty = 10$, $\overline{h}_0 = 0,16$, $Re_\infty = 1000$, $Pr = 0,75$:
1 — решение по формуле (47) с учетом формулы Сазерленда (10) на стенке; *2*— численное решение [1,2] по модели в рамках полных уравнений Навье — Стокса; *3* — решение по формуле (47) с учетом степенной зависимости (11) на стенке

По данным рис. 2, *б*, использование формулы (50) дает удовлетворительную погрешность для эллиптической поверхности при пересчете со стенки $\overline{h}_0 = 0,24$ на $\overline{h}_0 = 0,8$. Таким образом, если не удается прямо получить удовлетворительный результат по формуле (47), следует использовать формулу для пересчета тепловых потоков.

Вывод. На основе представленной модификации метода Польгаузена были произведены расчеты тепловых потоков на поверхности затупленных тел и проведено сравнение с данными, полученными в рамках модели уравнений Навье — Стокса [1].

Анализ результатов показал, что этот метод хорошо согласуется с численным решением, причем относительная погрешность не превышает в большинстве случаев 5 %. Лишь для относительно горячей стенки погрешность решения может достигать ~ 20 %. В этом случае следует использовать формулу для пересчета тепловых потоков, которая снижает искомую погрешность также до 5 %.

Рассмотренная модификация наряду с аналитической зависимостью для расчета давления позволяет быстро и эффективно оценить тепловые потоки на поверхности затупленных тел различного удлинения. При этом не надо решать задачу численно в рамках уравнений пограничного слоя или Навье — Стокса. В отличие от классического приближенного метода Польгаузена параметр $\Lambda(x)$ определяется аналитически без использования дифференциального уравнения относительно толщины вытеснения пограничного слоя или толщина потери импульса.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брыкина И.Г., Сахаров В.И. Сравнение приближенных аналитических и численных решений для тепловых потоков при сверхзвуковом обтекании тел вязким газом. *Известия Академии наук. Механика жидкости и газа*, 1996, № 1, с. 125–132.

[2] Брыкина И.Г. *Методы расчета теплопередачи и трения при пространственном гиперзвуковом ламинарном обтекании тел во всем диапазоне чисел Рейнольдса*. Дис. … д-ра. физ.-мат. наук. Москва, 2013, 320 с.

[3] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. Computational Modeling of Conjugated Aerodynamic and Thermomechanical Processes in Composite Structures of High-speed Aircraft. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, no. 98, vol. 9, pp. 4873–4880. http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.55405

[4] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 4 (8), с. 75–91.

[5] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. Application of Finite Difference TVD Methods in Hypersonic Aerodynamics. *Finite Difference Methods, Theory and Applications. Lecture Notes in Computer Science*, 2015, vol. 9045, pp. 161–168. DOI 10.1007/978-3-319-20239-6_15

[6] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К. Моделирование сопряженных процессов аэрогазодинамики и теплообмена на поверхности теплозащиты перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2014, № 3, с. 23–34.

[7] Романенко П.Н. *Гидродинамика и теплообмен в пограничном слое.* Москва, Энергия, 1974, 464 с.

[8] Orlik E., Fedioun I., Davidenko D. Boundary layer Transition on a Hypersonic Forebody. Experiments and Calculation. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011, № 4, vol. 48, pp. 545–555.

[9] Землянский Б.А. *Конвективный теплообмен летательных аппаратов.* Москва, Физматлит, 2014, 380 с.

[10] Авдуевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А., Кошкина В.К. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике.* Москва, Машиностроение, 1992, 528 с.

[11] Лунев В.В. *Течение реальных газов с большими скоростями.* Москва, Физматлит, 2007, 760 с.

[12] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. *Вычислительная гидромеханика и теплообмен*. Москва, Мир, 1990.

[13] Абрамович Г.Н. *Прикладная газовая динамика.* Москва, Наука, 1991.

[14] Котенев В.П. Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока. *Математическое моделирование*, 2014, т. 26, № 9, с. 141–148.

[15] Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых, затупленных тел вращения произвольного очертания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 68–81.

[16] Котенев В.П. Определение положения звуковой точки на поверхности выпуклого затупленного тела. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2011, спец. вып. «Математическое моделирование», с. 150–153.

[17] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. *Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике*. Москва, Физматлит, 2011, 280 с.

[18] Ожгибисова Ю.С. Применение аналитических формул распределения давления для расчета тепловых потоков на поверхности затупленных тел. *Молодежный научно-технический вестник*, 2014, № 12.
URL: http://sntbul.bmstu.ru/doc/748076.html

[19] Ожгибисова Ю.С. Аналитическое решение уравнений пограничного слоя. *Молодежный научно-технический вестник*, 2015, № 4, 16 с. URL: http://sntbul.bmstu.ru/doc/777427.html

Статья поступила в редакцию 09.09.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Котенев В.П., Булгаков В.Н., Ожгибисова Ю.С. Модификация метода Польгаузена для расчета тепловых потоков на затупленных телах. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3 (11), с. 33–52.

Котенев Владимир Пантелеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, начальник отдела аэродинамики в АО «ВПК "НПО машиностроения"». Автор около 60 научных работ в области прикладной математики, численных и аналитических методов исследования течения газа при обтекании поверхности летательных аппаратов. e-mail: kotvp@mail.ru

Булгаков Владислав Николаевич — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: vlbulg.jr@gmail.com

Ожгибисова Юлия Сергеевна — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: juli1307@rambler.ru

Modification of Pohlhausen method for calculating heat transfer on blunt bodies

© V.P. Kotenev, V.N. Bulgakov, Yu.S. Ozhgibisova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Modification of Pohlhausen method is developed. It allows for quick and effective heat transfer distribution over the blunt body surfaces. Calculations were done. Their results are described in comparison with the numerical solution of a problem within the framework of Navier — Stokes equations.

Key words: *supersonic flow, boundary layer, Pohlhausen method.*

REFERENCES:

[1] Brykina I.G., Sakharov V.I. *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza — A Journal of Russian Academy of Sciences*. *Fluid Dynamics*, 1996, no. 1, pp. 125–132.

[2] Brykina I.G. *Metody rascheta teploperedachi i trenya pri prostranstvennom giperzvukovom laminarnom obtekanii tel vo vsem diapazone chisel Rejnolds.* Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [Calculation methods for heat transfer and friction in a spatial hypersonic laminar flow over bodies in the whole range of Reynolds numbers]. Moscow, 2013, 320 p.

[3] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, no. 98, vol. 9, pp. 4873–4880. http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.55405

[4] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 4 (8), pp. 75–91.
[5] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. Application of Finite Difference TVD Methods in Hypersonic Aerodynamics. *Finite Difference Methods, Theory and Applications. Lecture Notes in Computer Science*, 2015, vol. 9045, pp. 161–168. DOI 10.1007/978-3-319-20239-6_15
[6] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N., Syzdykov E.K. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceeding of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2014, no. 3, pp. 23–34.
[7] Romanenko P.N. *Gidrodinamika i teploobmen v pogranichnom sloe*. [Fluid Flow and Heat Transfer in the Boundary Layer]. Moscow, Energiya Publ., 1974, 464 p.
[8] Orlik E., Fedioun I., Davidenko D. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011, no. 4, vol. 48, p. 545–555.
[9] Zemlyanskiy B.A. *Konvektivnyy teploobmen letatelnykh apparatov* [Convective Heat Transfer Aircrafts]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 380 p.
[10] Avduevskiy V.S., Galitseyskiy B.M., Glebov G.A., Koshkina V.K. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoy i raketno-kosmicheskoy tekhnike* [Fundamentals of Heat Transfer in Aviation and Rocket-Space Technology]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 528 p.
[11] Lunev V.V. *Techenie realnykh gazov s bolshimi skorostyami* [Real Gases Transfer at High Speeds]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 760 p.
[12] Anderson D., Tannehill J., Pletcher R. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Hemisphere Publ. Corp., New York, 1987. [in Russ.: Anderson D., Tannehill J., Pletcher R. *Vychislitelnaya gidromehanika i teploobmen*. Moscow, Mir Publ., 1990].
[13] Abramovich G.N. *Prikladnaya gazovaya dinamika* [Applied Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1991.
[14] Kotenev V.P. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 9, pp. 141–148 [in Russ].
[15] Kotenev V.P., Sysenko V.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 68–82.
[16] Kotenev V.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2011, special issue “Math. modeling”, pp. 150–153.
[17] Dimitrienko Yu.I., Kotenev V.P., Zakharov A.A. *Metod lentochnykh adaptivnykh setok dlya chislennogo modelirovaniya v gazovoy dinamike* [The Method of Band-Adaptive Grids for Numerical Simulations in Gas Dynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 280 p.
[18] Ozhgibisova Yu.S. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskiy vestnik — Youth Scientific and Technical Bulletin*, 2014, no. 12. Available at: http://sntbul.bmstu.ru/doc/748076.html
[19] Ozhgibisova Yu.S. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskiy vestnik — Youth Scientific and Technical Bulletin*, 2015, no. 4. Available at: http://sntbul.bmstu.ru/doc/777427.html

Kotenev V.P. — Dr. Sci. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Head of the Aerodynamics Department in Joint Stock Company “Military and Industrial Corporation JSC “MIC “Mashinostroyenia”. Author of about 60 scientific publications on applied

mathematics, numerical and analytical methods for studying gas flow over the aircraft flow surface. e-mail: kotvp@mail.ru

Bulgakov V.N. — student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vlbulg.jr@gmail.com

Ozhgibisova Yu.S. — master student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: juli1307@rambler.ru