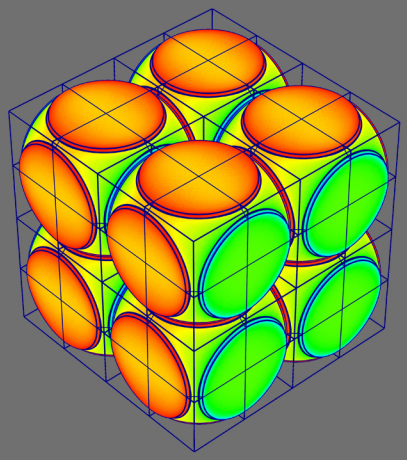
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Федонюк Н. Н. Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных конструкций с дефектами. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №3 (11), с. 3-23

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/105/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.175
30.10.2026 22:55:22

УДК 539.3

Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных конструкций с дефектами

© Ю.И. Димитриенко[1], Ю.В. Юрин[1], Н.Н. Федонюк[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, 196158, Россия

Разработана многоуровневая модель для многомасштабного деформирования трехслойных (сэндвичевых) конструкций из полимерных композиционных материалов типа пластин с заполнителем на основе пенопласта, учитывающая микромеханические процессы деформирования и повреждаемости матрицы, армирующего наполнителя и пенопласта, а также макроскопические дефекты типа непропитки композитных обшивок. Проведено конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния, повреждаемости и разрушения трехслойных пластин с обшивками из гибридных композитов из углепластика, с различными размерами дефекта типа непропитки, при изгибе равномерным давлением. Установлены особенности процесса деформирования и повреждаемости данного типа композитных конструкций. Разработанная методика может быть применена для расчета деформирования, повреждаемости и разрушения трехслойных пластин из полимерных композиционных материалов, применяемых в различных отраслях промышленности: судостроении, авиастроении, ракетостроении.

Ключевые слова: *трехслойные конструкции, полимерные композиционные материалы, многомасштабное моделирование, дефекты, метод конечного элемента, слоисто-волокнистые композиты, моноволокна, повреждаемость.*

Введение. Трехслойные (сэндвичевы) конструкции, состоящие из жестких и прочных несущих слоев (обшивок) и легкого низкопрочного заполнителя, обычно пенопласта, активно применяют в различных областях промышленности благодаря их высокой изгибной жесткости и малой плотности [1–4]. Применение в качестве обшивок полимерных композиционных материалов (ПКМ) существенно повышает эффективность таких конструкций.

Одной из проблем создания сэндвичевых конструкций из ПКМ является наличие значительных технологических дефектов типа расслоений или непропитки, обусловленных особенностями технологии изготовления [5–12]. Весьма актуальной данная проблема является для судовых сэндвичевых конструкций из ПКМ, активно применяемых в последнее время в судостроении и характеризующихся значительными размерами и толщинами. Исследованию влияния дефектов в прочностные характеристики композитных конструкций посвящено значительное количество работ [6–10], однако общепринятых моделей и методов для расчета этих конструкций пока не существует.

В настоящей работе предложено использовать многомасштабную модель для расчета прочности сэндвичевых конструкций из ПКМ с дефектами, хорошо зарекомендовавшую себя при анализе прочности композитных конструкций при наличии дефектов микроскопического масштаба [13–18]. Кроме того предлагается развитие этой модели за счет совместного учета макроскопических дефектов типа обрыва отдельных моноволокон в композитах, микротрещин между моноволокнами и макроскопических дефектов типа непроклея слоев обшивок.

Многомасштабная модель иерархической структуры трехслойной конструкции из ПКМ. Для расчета прочности элементов конструкций из ПКМ, например судовых панелей типа «сэндвич» с пенозаполнителем и обшивками из угле- и стеклопластика, при статических нагружениях применим многомасштабную модель многоуровневой иерархической структуры (рис. 1).

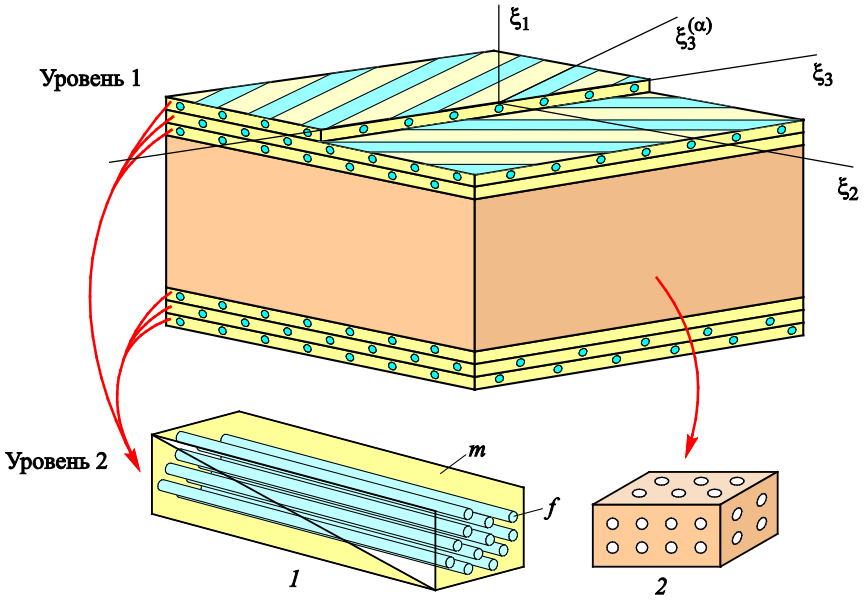


Рис. 1. Математическая модель многоуровневой иерархической структуры трехслойной конструкции на основе СВК и пенозаполнителя:
1 — ЯП2.1 (1D-материал); *2* — ЯП2.2 (пенопласт)

Модель имеет два иерархических уровня. На первом, верхнем уровне находится сама трехслойная конструкция, состоящая их двух обшивок (нижней и верхней) и заполнителя. Обшивки представляют собой слоисто-волокнистый композит (СВК) на основе углеродных или стеклянных волокон. Каждый слой СВК (второй уровень) — это однонаправленный материал (1D-материал), волокна которого ориентированы в определенном направлении $O\xi_3^{(\alpha)}$ под углом φ_α

в плоскости, ортогональной к оси $O\xi_1$. Этот 1D-материал можно представить состоящим из большого числа ячеек периодичности ЯП2.1, представляющих собой моноволокна, соединенные между собой полимерной матрицей.

В качестве заполнителя чаще всего используют пенопласт (пенозаполнитель), имеющий структуру, близкую к периодической. Его ячейка периодичности ЯП2.2 включает в себя две компоненты: непосредственно материал пенозаполнителя и пустоты, окружающие его.

В трехслойной (сэндвичевой) конструкции слои будем нумеровать следующим образом: $\alpha = 1,...,n_1$ — номера слоев СВК нижней обшивки; $\alpha = n_1 + 1$ — слой заполнителя (пенопласта); $\alpha = n_1 + 2,...,$ $n_1 + 1 + n_2$ — слои СВК верхней несущей обшивки; $N = n_1 + 1 + n_2$ — общее число слоев конструкции.

Расчет упругих характеристик 1D-материала с учетом повреждаемости. Для вычисления компонент тензоров модулей упругости 1D-материала $C_{ijkl}^{(\alpha)'}(z)$ воспользуемся приближенной моделью смесевого типа [19], в которой 1D-материал рассматривают как систему параллельно расположенных однонаправленных (1D) элементов цилиндрической формы. Тогда технические модули упругости 1D-материала вычисляем по смесевым формулам:

$$E_l = E'_f \varphi_f + E_m(1-\varphi_f),\ \ E_t = \left(\frac{\varphi_f}{E_f} + \frac{1-\varphi_f}{E_m} \right)^{-1},$$

$$\nu_l = \nu_f \varphi_f + \nu_m(1-\varphi_f),\ \ \nu_t = \nu_m, \qquad (1)$$

$$G_l = \left(\frac{2\varphi_f(1+\nu_f)}{E_f} + \frac{2(1-\varphi_f)(1+\nu_m)}{E_m} \right)^{-1}.$$

Здесь и далее: E_l — продольный модуль упругости 1D-материала в направлении ее укладки; φ_f — относительное объемное содержание моноволокон в нитях; E'_f, E_f — продольный и поперечный модули упругости моноволокон, которые полагаются трансверсально-изотропными; E_t — поперечный модуль упругости; ν_l — продольный коэффициент Пуассона; ν'_f, ν_f — продольный и поперечный коэффициенты Пуассона моноволокон; E_m и ν_m — модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы; ν_t — поперечный коэффициент Пуассона; G_l — продольный модуль сдвига; G'_f — продольный

модуль сдвига моноволокон; $G_t = \dfrac{E_t}{2(1+\nu_t)}$ — поперечный модуль сдвига.

По полученным значениям упругих констант вычисляются тензоры упругих податливостей $\Pi^{(\alpha)}_{ijkl}{}'$ 1D-материала в собственных системах координат $O\xi^{(\alpha)}_i$:

$$(\Pi^{(\alpha)}_{ijkl}{}') = \begin{bmatrix} \Pi^{(\alpha)}_{1111}{}' & \Pi^{(\alpha)}_{1122}{}' & \Pi^{(\alpha)}_{1133}{}' & 0 & 0 & 0 \\ & \Pi^{(\alpha)}_{2222}{}' & \Pi^{(\alpha)}_{2233}{}' & 0 & 0 & 0 \\ & & \Pi^{(\alpha)}_{3333}{}' & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\Pi^{(\alpha)}_{1313}{}' & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & 2\Pi^{(\alpha)}_{2323}{}' & 0 \\ & & & & & 2\Pi^{(\alpha)}_{1212}{}' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_l} & -\dfrac{\nu_l}{E_l} & -\dfrac{\nu_l}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_l}{E_l} & \dfrac{1}{E_t} & -\dfrac{\nu_t}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_l}{E_l} & -\dfrac{\nu_t}{E_t} & \dfrac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2G_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2G_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2G_l} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Тензор модулей упругости 1D-материала в собственной системе координат $O\xi^{(\alpha)}_i$ является обратным для тензора упругих податливостей, $C^{(\alpha)'}_{ijkl} = (\Pi^{(\alpha)}_{ijkl}{}')^{-1}$.

В модели полагаем, что 1D-материал может частично разрушаться, когда достигнет значения 1 некоторый параметр повреждаемости $z^{(\alpha)}_2$, при этом обнуляются все упругие модули, кроме $C^{(\alpha)'}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$. Такое частичное разрушение происходит из-за микрорастрескивания матрицы в составе 1D-материала без разрыва моноволокон. Если же па-

раметр повреждаемости $z_1^{(\alpha)}$ достигает значения 1, то происходит полное разрушение 1D-материала из-за разрушения моноволокон и матрицы (окружающей моноволокна). При полном разрушении нити обнуляются все упругие модули $C_{ijkl}^{(\alpha)}{}'$.

Кроме того, полагаем, что полное разрушение 1D-материала может произойти по еще одному сценарию, когда одновременно достигнут значения 1 параметры повреждаемости $z_2^{(\alpha)}$ и $z_3^{(\alpha)}$. Условие $z_3^{(\alpha)} = 1$ означает, что произошло отслоение данного 1D-материала от других слоев вследствие разрушения матрицы в тонком промежуточном слое между волокнами соседних слоев. В этом случае волокна в 1D-элементе не разрушаются, но происходит нарушение монолитности слоя. В результате 1D-элемент превращается в совокупность несоединенных отдельных волокон.

С учетом сказанного выражение для компонент тензора модулей упругости 1D-материала в собственной системе координат для всех этапов деформирования, вплоть до полного разрушения 1D-материала, можно записать так:

$$C_{ijkl}^{(\alpha)'} = ((1 - h(z_2^{(\alpha)} - 1))(\Pi_{ijkl}^{(\alpha)}{}')^{-1} + h(z_2^{(\alpha)} - 1)C'_{\alpha\alpha\alpha\alpha}\delta_{\alpha i}\delta_{\alpha j}\delta_{\alpha k}\delta_{\alpha l}))\times \\ \times (1 - h(z_1^{(\alpha)} - 1) - h(z_2^{(\alpha)} - 1)h(z_3^{(\alpha)} - 1)), \tag{3}$$

где $h(z_2^{(\alpha)} - 1)$ — функция Хевисайда, равная $h(z_2^{(\alpha)} - 1) = 0,$ если $z_2^{(\alpha)} < 1,$ и $h(z_2^{(\alpha)} - 1) = 1,$ если $z_2^{(\alpha)} \geq 1.$

Для СВК тензор модулей упругости $C_{ijkl}^{(\alpha)}$ α-го слоя в единой системе координат $O\xi_i$, у которой ось $O\xi_1$ ортогональна к плоскости всех слоев, вычисляется применением к его компонентам $C_{ijkl}^{(\alpha)'}$ в собственной системе координат преобразования поворота [20]:

$$C_{ijkl}^{(\alpha)} = C_{mnpq}^{(\alpha)'} Q_{im}^{\alpha} Q_{jn}^{\alpha} Q_{kp}^{\alpha} Q_{lq}^{\alpha}. \tag{4}$$

Здесь Q_{ij}^{α} — элементы матрицы поворота слоя с номером $\alpha,$ на угол φ_α относительно оси $O\xi_1.$

Для расчета эффективных упругих характеристик пенопласта $C_{ijkl}^{(\alpha)},$ $\alpha = n_1 + 1,$ применяют метод асимптотического осреднения, основанный на решении 3D локальных задач на ячейке периодичности ЯП2.2. Этот метод позволяет вычислять $C_{ijkl}^{(\alpha)}$ пенопласта по упругим характеристикам полимерной основы пенопласта с учетом его пори-

стости. Методика, использованная для расчета характеристик пенопласта, изложена в работе [14].

Расчет упругих характеристик трехслойной сэндвичевой конструкции с учетом дефектов в единой системе координат. Для рассматриваемой тонкостенной сэндвичевой конструкции типа пластины, состоящей из слоев СВК и пенопластового заполнителя, вычисляем мембранные, смешанные и изгибные жесткости конструкции $\overline{C}_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$:

$$\overline{C}_{\gamma\beta} = \sum_{\alpha=1}^{N} C^{(\alpha)}_{\gamma\gamma\beta\beta} h_\alpha d_\alpha,\ \overline{C}_{55} = \sum_{\alpha=1}^{N} C^{(\alpha)}_{2323} h_\alpha d_\alpha,\ \overline{C}_{44} = \sum_{\alpha=1}^{N} C^{(\alpha)}_{1313} h_\alpha d_\alpha,$$
$$\overline{C}_{66} = \sum_{\alpha=1}^{N} C^{(\alpha)}_{1212} h_\alpha d_\alpha,\ N_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} C^{(\alpha)}_{\gamma\gamma\beta\beta}(\xi^2_{1(\alpha)} - \xi^2_{1(\alpha-1)}) d_\alpha, \quad (5)$$

$$N_{55} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} C^{(\alpha)}_{2323}(\xi^2_{1(\alpha)} - \xi^2_{1(\alpha-1)}) d_\alpha, \quad (6)$$

$$D_{\gamma\beta} = \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{N} C^{(\alpha)}_{\gamma\gamma\beta\beta}(\xi^3_{1(\alpha)} - \xi^3_{1(\alpha-1)}) d_\alpha,\ D_{55} = \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{N} C^{(\alpha)}_{2323}(\xi^3_{1(\alpha)} - \xi^3_{1(\alpha-1)}) d_\alpha. \quad (7)$$

Здесь h_α — толщина α-го слоя в составе конструкции; $\xi_{1(\alpha)}$ — значение координаты ξ_1 для поверхностей слоев раздела: $\xi_{1(\alpha)} = \xi_{1(\alpha-1)} + h_\alpha$, $\alpha = 1,...,N$, $\xi_{1(0)} = -h/2$, $h = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha$, а h — толщина всей конструкции. В этих формулах учтено наличие возможного дефекта конструкции типа непроклея, где d_α — коэффициент снижения упругих свойств из-за наличия непроклея на всю толщину α-го слоя, значения d_α лежат в диапазоне: $0 < d_\alpha \le 1$ и зависят от продольных координат конструкции ξ_2, ξ_3.

Макрозадача механики трехслойной конструкции. Для расчета деформирования трехслойной конструкции с дефектами применим модифицированную теорию тонких пластин Тимошенко. Система уравнений равновесия тонкой пластины состоит из двух уравнений для усилий $T_{\alpha\alpha}$, $T_{\alpha\beta}$, уравнения для перерезывающих сил Q_1, Q_2, и двух уравнений для моментов $M_{\alpha\alpha}$, $M_{\alpha\beta}$ [16–18]:

$$\frac{\partial T_{\alpha\alpha}}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\beta} = 0,\quad \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_2} - \Delta p = 0,\quad \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\beta} - Q_\alpha = 0,$$

$$\alpha, \beta = 2, 3 \text{ и } \alpha \neq \beta. \tag{8}$$

Здесь $\Delta p = p_{e1} - p_{e2}$ — перепад давления, действующий на пластину, где $p_{e1} = p_e(\frac{h}{2})$; $p_{e2} = p_e(-\frac{h}{2})$ — значения давления на поверхностях пластины.

Определяющие соотношения для трехслойной пластины записываем в виде соотношений между усилиями $T_{\alpha\alpha}$, T_{23}, моментами $M_{\alpha\alpha}$, M_{23} и перерезывающими силами Q_2, Q_3 с одной стороны и деформациями $e_{\beta\beta}$, e_{23} и кривизнами $\kappa_{\beta\beta}$, κ_{23} срединной поверхности — с другой [21]:

$$T_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta=2}^{3} (\bar{C}_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} + N_{\alpha\beta} \kappa_{\beta\beta}), \; T_{23} = 2(\bar{C}_{55} e_{23} + N_{55} \kappa_{23}),$$

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta=2}^{3} (N_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} + D_{\alpha\beta} \kappa_{\beta\beta}), \; M_{23} = 2(N_{55} e_{23} + D_{55} \kappa_{23}), \tag{9}$$

$$\alpha, \beta = 2, 3 \text{ и } \alpha \neq \beta, \; Q_2 = \bar{C}_{66} e_{12}, \; Q_3 = \bar{C}_{44} e_{13}.$$

Деформации и искривления срединной поверхности вычисляются по следующим кинематическим формулам [20, 21] $(\alpha = 2, 3)$:

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{\partial U_\alpha}{\partial \xi_\alpha}, \; 2e_{23} = \frac{\partial U_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial U_3}{\partial \xi_2}, \; 2e_{1\alpha} = \frac{\partial W}{\partial \xi_\alpha} + \gamma_\alpha,$$
$$\kappa_{\alpha\alpha} = \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \xi_\alpha}, \; 2\kappa_{23} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial \xi_2}. \tag{10}$$

Система уравнений равновесия (8), в которые подставлены определяющие соотношения (9) и кинематические соотношения (10), образует замкнутую систему пяти уравнений относительно пяти неизвестных функций U_α, γ_α, W.

В качестве граничных условий на части $\partial\Sigma_1$ контура $\partial\Sigma$, ограничивающего срединную поверхность пластины Σ_0, к этой системе следует присоединить заданные значения усилий, моментов и перерезывающих сил:

$$T_{22} n_2 + T_{23} n_3 = T_2^0, \; T_{23} n_2 + T_{33} n_3 = T_3^0, \; Q_2 n_2 + Q_3 n_3 = Q^0,$$
$$M_{22} n_2 + M_{23} n_3 = M_2^0, \; M_{23} n_2 + M_{33} n_3 = M_3^0. \tag{11}$$

На части $\partial\Sigma_2$ контура задаем значения перемещений, прогиба и углов поворота $(\alpha = 2, 3)$:

$$U_\alpha = U_\alpha^0,\ W = W^0,\ \gamma_\alpha = \gamma_\alpha^0. \tag{12}$$

Отсюда при нулевых значениях $U_\alpha^0,\ W^0,\ \gamma_\alpha^0$ получаем условия жесткой заделки контура $\partial\Sigma_2$ пластины.

На части $\partial\Sigma_3$ контура задаем смешанные граничные условия:

$$U_\alpha = U_\alpha^0,\ W = W^0,\ M_{22}n_2 + M_{23}n_3 = M_2^0,\ M_{23}n_2 + M_{33}n_3 = M_3^0. \tag{13}$$

В частности, при нулевых значениях $U_\alpha^0,\ W^0,\ M_\alpha^0$ получаем условия шарнирного закрепления. Выполняется условие согласования: $\partial\Sigma_1 + \partial\Sigma_2 + \partial\Sigma_3 = \partial\Sigma$. Запишем для задачи (8)–(13) вариационный принцип Хеллингера — Рейсснера [21], который можно представить в виде двух вариационных уравнений:

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Sigma} \{e\}^T [G][L]\delta\{u\}\, d\Sigma - \iint\limits_{\Sigma_0} \{P\}\delta\{u\}^T d\Sigma - \int\limits_{\partial\Sigma_1+\partial\Sigma_3} \left\{S^0\right\}\delta\{u\}^T dl = 0, \\ \iint\limits_{\Sigma} \delta\{e\}^T [G](\{[L]\{u\} - \{e\})d\Sigma = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь обозначены $\underset{8}{\{e\}}$ — столбец обобщенных деформаций; $\underset{5}{\{P\}}$ — столбец обобщенных нагрузок, заданных на срединной поверхности; $\underset{5}{\{u\}}$ — столбец обобщенных перемещений; $\underset{5}{\left\{S^0\right\}}$ — столбец обобщенных нагрузок, заданных на граничном контуре:

$$\underset{8}{\{e\}} = (e_{22},\ e_{33},\ e_{23},\ \kappa_{22},\ \kappa_{33},\ \kappa_{23},\ e_{12},\ e_{13})^T, \tag{15}$$

$$\underset{5}{\{u\}} = (U_2,\ U_3,\ W,\ \gamma_2,\ \gamma_3)^T,\ \underset{5}{\left\{S^0\right\}} = \left(T_2^0,\ T_3^0,\ M_2^0,\ M_3^0,\ Q^0\right)^T,$$

$$\underset{5}{\{P\}} = \left(0,\ 0,\ \Delta p,\ 0,\ 0\right)^T.$$

Здесь также использована матричная форма кинематических соотношений (10) между обобщенными деформациями и перемещениями $\underset{8}{\{e\}} = \underset{8\times5}{[L]}\underset{5}{\{u\}}$, где $\underset{8\times5}{[L]}$ — матрица дифференциального оператора Коши; матричная форма определяющих соотношений (9) $\underset{8}{\{T\}} =$

$= \underset{8\times8}{[G]}\underset{8}{\{e\}}$, где $\underset{8\times8}{[G]}$ — обобщенная матрица упругости. Она имеет следующий вид:

$$\underset{8\times8}{[G]} = \begin{pmatrix} \underset{3\times3}{[\bar{C}]} & \underset{3\times3}{[N]} & 0 \\ \underset{3\times3}{[N]} & \underset{3\times3}{[D]} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{2\times2}{[\bar{\bar{C}}]} \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times3}{[\bar{C}]} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 \\ \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{55} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\underset{3\times3}{[N]} = \begin{pmatrix} N_{22} & N_{23} & 0 \\ N_{23} & N_{33} & 0 \\ 0 & 0 & N_{55} \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times3}{[D]} = \begin{pmatrix} D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{23} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & D_{55} \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times2}{[\bar{\bar{C}}]} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{66} \end{pmatrix},$$

$\underset{8}{\{T\}} = \left(T_{22}, T_{33}, T_{23}, M_{22}, M_{33}, M_{23}, Q_2, Q_3 \right)^T$, где $\underset{8}{\{T\}}$ — столбец обобщенных усилий.

Для решения системы вариационных уравнений (14) используем метод конечных элементов, подробности численной реализации которого описаны в [21].

Расчет макронапряжений в трехслойной конструкции. После решения вариационных уравнений найдем значения обобщенных перемещений и деформаций $\{e\}$, $\{u\}$ в узлах каждого конечного элемента (КЭ). Деформации в произвольной точке по координате ξ_1 конструкции находим с помощью линейного закона, соответствующего теории Тимошенко:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \xi_1 \kappa_{\alpha\beta}, \ \alpha, \beta = 2, 3. \tag{17}$$

Тогда с помощью определяющих соотношений

$$\sigma_{IJ}^{(\alpha)} = C_{IJKL}^{(\alpha)} \varepsilon_{KL}, \ I, J, K, L = 2, 3, \ \alpha = 1, ..., N, \tag{18}$$

и модулей упругости (4) находим три напряжения $\sigma_{IJ}^{(\alpha)}$ в слоях сэндвичевой конструкции.

Три остальных напряжения: поперечное нормальное $\sigma_{11}^{(\alpha)}$ и сдвиговые $\sigma_{12}^{(\alpha)}$ и $\sigma_{13}^{(\alpha)}$ вычисляем согласно формулам асимптотической теории тонких пластин [16–18]:

$$\sigma_{11}^{(\alpha)} = -\left\{ \xi C_{IJKL}^{(0)(\alpha)} \right\}_{\xi} (e_{KL,J} + \omega \kappa_{KL,J}), \ I, J, K, L = 2, 3, \ \alpha = 1, ..., N, \tag{19}$$

$$\sigma_{11}^{(\alpha)} = \omega^2 \left\{ \left\{ \xi C_{IJKL}^{(0)(\alpha)} \right\}_\xi \right\}_\xi (e_{KL,JI} + \omega \kappa_{KL,JI}) - \omega^3 \left(p_- + \Delta p \left(\xi + 0,5 \right) \right). \quad (20)$$

Здесь $\xi = \dfrac{\xi_1}{h}$ — безразмерная поперечная координата; $\omega = \dfrac{h}{L}$ — геометрический параметр; L — длина конструкции. В выражениях (19)–(20) также участвуют операторы осреднения по толщине пластины

$$\left\{ f(\xi) \right\}_\xi = \int\limits_{-1/2}^{\xi} \left(f\left(\tilde{\xi}\right) - \left\langle f(\xi) \right\rangle \right) d\tilde{\xi}, \ \left\langle f(\xi) \right\rangle = \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(\xi) d\xi \quad (21)$$

и приведенные модули упругости слоев $C_{IJKL}^{(0)(\alpha)} = C_{IJKL}^{(\alpha)} - C_{IJk1}^{(\alpha)} C_{k1i1}^{(\alpha)-1} C_{i1KL}^{(\alpha)}$, $i, k = 1 \ldots 3$.

Напряжения $\sigma_{ij}^{(\alpha)\prime}$ в α-м слое СВК в собственной системе координат $O\xi_i^{(\alpha)}$ для каждого слоя вычисляют следующим образом:

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)\prime} = \sigma_{mn}^{(\alpha)} Q_{im}^{\alpha} Q_{in}^{\alpha}. \quad (22)$$

Соотношения для параметров повреждаемости 1D-материала. Разрушение 1D-материала вследствие разрыва моноволокон при продольном растяжении или потери устойчивости моноволокон при продольном сжатии описывает параметр повреждаемости $z_1^{(\alpha)}$, для которого принимаем следующее выражение [21]:

$$z_1^{(\alpha)} = \left(\frac{\left| \sigma_{33}^{(\alpha)\prime} \right| + \sigma_{33}^{(\alpha)\prime}}{2\sigma_T^{\ell}} \right)^2 + \left(\frac{\left| \sigma_{33}^{(\alpha)\prime} \right| - \sigma_{33}^{(\alpha)\prime}}{2\sigma_C^{\ell}} \right)^2. \quad (23)$$

Здесь σ_T^{ℓ} и σ_C^{ℓ} — пределы прочности материала при растяжении и сжатии вдоль волокон, для которых принимают следующие выражения [21]:

$$\sigma_T^{\ell} = \sigma_{fT} H_0 \frac{\varphi_f^{\ r_f}}{(1-\varphi_f)^{S_f}} \left(\frac{E_f}{2G_m} \right)^{S_f} \left(\frac{\sigma_{mS}}{\sigma_{fT}} \right)^{\omega_f}, \ \sigma_C^{\ell} = \sigma_{mS} h_C^{\ell}, \quad (24)$$

где

$$h_C^{\ell} = \begin{cases} s_C^{-1/2}, & B_{m2} > B_{m4} \\ s_T^{-1/2}, & B_{m2} < B_{m4} \end{cases}, \ s_{T,C} = (B_{m2} - B_{m4})^2 \left(\frac{\sigma_{mS}}{\sigma_{mT,C}} \right)^2 + B_{m2} B_{m4}, \quad (25)$$

$$B_{m1}=\frac{E_m}{E_f},\ B_{m2}=\frac{E_m}{E'_f},\ B_{m3}=\frac{G_m}{G'_f},\ B_{m4}=\operatorname{tg}\Phi_f.$$

Также обозначены $\omega_f,\ S_f,\ r_f,\ H_0$ — Вейбулловские параметры разброса прочности моноволокон; σ_{fT} — предел прочности пучка моноволокон; σ_{mS} — предел прочности матрицы при сдвиге; Φ_f — средний угол разориентации моноволокон в 1D-материале.

Для параметра повреждаемости $z_2^{(\alpha)}$ примем следующее выражение [21]:

$$z_2^{(\alpha)}=(Y_2^+)^2\left(\frac{1}{(\sigma_{mC})^2}-\frac{1}{3(\sigma_{mS})^2}\right)+(Y_2^-)^2\left(\frac{1}{(\sigma_{mT})^2}-\frac{1}{3(\sigma_{mS})^2}\right)+\\+\frac{1}{12(\sigma_{mS})^2}\left(Y_2^2+12K_YY_4^2+3Y_3^2\right). \tag{26}$$

Здесь $\sigma_{mT},\ \sigma_{mT}$ — пределы прочности матрицы на растяжение и сжатие. Также в формуле обозначены инварианты тензора напряжений:

$$Y_2=\frac{\sigma_{11}^{(\alpha)\prime}+\sigma_{22}^{(\alpha)\prime}}{2},\ \mathrm{Y}_2^{\pm}=\frac{\left|Y_2\right|\pm Y_2}{2},\\ Y_3=\left((\sigma_{11}^{(\alpha)\prime}-\sigma_{22}^{(\alpha)\prime})^2+4\sigma_{12}^{(\alpha)\prime}\right)^{1/2},\ Y_4^2=(\sigma_{13}^{(\alpha)\prime})^2+(\sigma_{23}^{(\alpha)\prime})^2,\ K_Y=\frac{B_{m3}}{B_{m1}}. \tag{27}$$

Для параметра повреждений $z_3^{(\alpha)}$, описывающего разрушение матрицы между слоями разных 1D-материалов, примем следующее выражение:

$$z_3^{(\alpha)}=B_2\sigma_2^2+B_+\sigma_+^2+B_-\sigma_-^2. \tag{28}$$

Здесь обозначены следующие комбинации пределов прочности матрицы на растяжение, сдвиг и сжатие:

$$B_+=\frac{1}{\sigma_{mT}^2}-\frac{1}{3\sigma_{mS}^2},\quad B_-=\frac{1}{\sigma_{mC}^2}-\frac{1}{3\sigma_{mS}^2},\quad B_2=\frac{1}{3\sigma_{mS}^2}, \tag{29}$$

а также обозначены инварианты тензора напряжений в матрице:

$$\sigma_-=\frac{\left|\sigma_{mkk}^{(\alpha)}\right|-\sigma_{mkk}^{(\alpha)}}{2},\qquad \sigma_+=\frac{\left|\sigma_{mkk}^{(\alpha)}\right|+\sigma_{mkk}^{(\alpha)}}{2},\qquad \sigma_{mkk}^{(\alpha)}=\sigma_{m11}^{(\alpha)}+\sigma_{m22}^{(\alpha)}+\sigma_{m33}^{(\alpha)},$$

$$\sigma_u=\sqrt{\left(\sigma_{m11}^{(\alpha)}-\sigma_{m22}^{(\alpha)\prime}\right)^2+\left(\sigma_{m11}^{(\alpha)}-\sigma_{m33}^{(\alpha)}\right)^2+\left(\sigma_{m22}^{(\alpha)}-\sigma_{m33}^{(\alpha)}\right)^2+6\left(\sigma_{m12}^{(\alpha)2}+\sigma_{m23}^{(\alpha)2}+\sigma_{m13}^{(\alpha)2}\right)}.$$

Напряжения в матрице $\sigma_{mij}^{(\alpha)}$ связаны с напряжениями $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ в слоях 1D-материала следующими соотношениями $z_3^{(\alpha)}$:

$$\sigma_{mIJ}^{(\alpha)} = B_{m3}^{(\alpha)}\sigma_{IJ}^{(\alpha)},\ I,\ J = 2,\ 3,\ \ \sigma_{m1j}^{(\alpha)} = B_{m1}^{(\alpha)}\sigma_{1j}^{(\alpha)},\ \ j = 1,\ 2,\ 3. \qquad (30)$$

Результаты численного моделирования. С помощью разработанной модели были проведены численные расчеты напряженно-деформированного состояния и разрушения сэндвичевой конструкции типа пластины при изгибе равномерным давлением. Закрепление торцов пластины было шарнирным. Пластина содержала дефект типа непропитки одной из обшивок. Форма дефекта — круговая. Величина площади дефекта варьировалась от 2 до 10 % от площади срединной поверхности пластины. Длина L пластины 2,4 м; толщина пластины $h = 0,03639$ м (толщина обшивок $h_1 = 0,003195$ м, толщина заполнителя $h_2 = 0,03$ м). На боковых торцах по направлению ξ_2 было задано нулевое значение угла поворота нормали пластины γ_2, на торцах по направлению ξ_3 — нулевой прогиб, нулевое значение продольного перемещения U_3 и нулевое значение угла поворота нормали γ_2.

В качестве СВК обшивок сэндвичевой конструкции были выбраны материалы холдинговой компании «Композит», состоявшие из чередования двух слоев ровинговой углеткани саржевого плетения Ст-12026 со структурой армирования (0°/90°) и одного слоя биаксиальной диагональной углеткани См-42010 со структурой армирования (+45°/–45°). Характеристики углеродных моноволокон в составе ровинговой и биаксиальной углетканей были подобраны из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных данных по 1D-материалу. Были получены следующие значения упругих и прочностных характеристик моноволокон: $E'_f = 200$ ГПа, $E_f = 20$ ГПа, $\sigma_{fT} = 2,2$ ГПа, $\nu_f = 0,25$, $\omega_f = 0,33$, $s_f = 0,07$, $r_f = 0,25$, $H_0 = 3$, $\Phi_f = 1°$.

Матрица в составе композита — Dion, упругие и прочностные характеристики матрицы, использовавшиеся в расчетах: $E_m = 3$ ГПа; $\nu_m = 0,35$; $\sigma_{mT} = 35$ МПа; $\sigma_{mC} = 43$ МПа; $\sigma_{mS} = 27$ МПа.

На рис. 2–6 представлены некоторые результаты решения макрозадачи для сэндвичевой конструкции с дефектом типа непропитки площадью 10 %, расположенным в центре пластины.

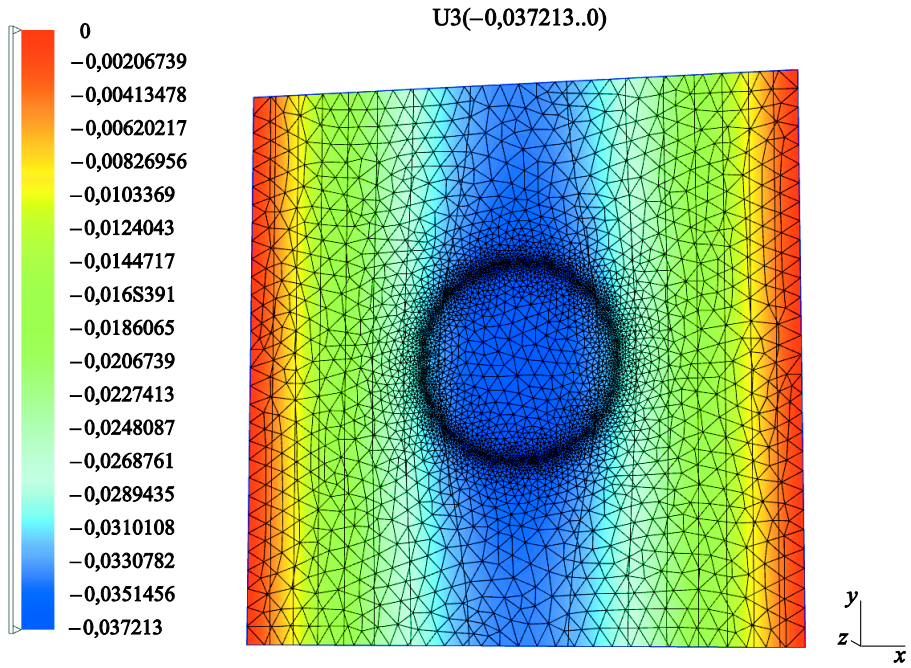


Рис. 2. Распределение прогиба W (м) в трехслойной пластине с дефектом типа непропитки при изгибе давлением

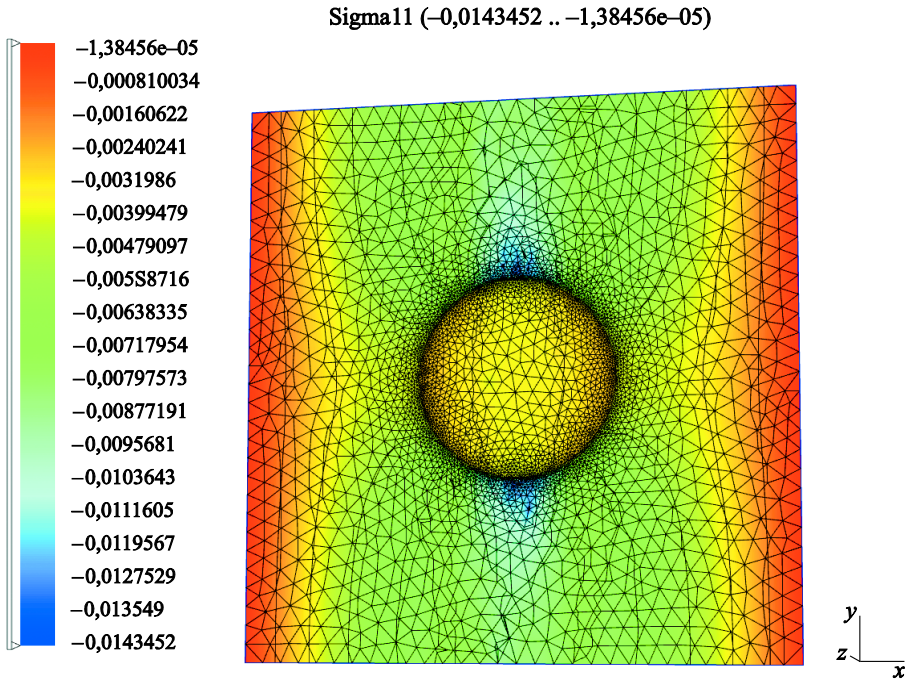


Рис. 3. Распределение изгибного напряжения σ_{33} (ГПа) на внешней поверхности трехслойной пластины с дефектом типа непропитки

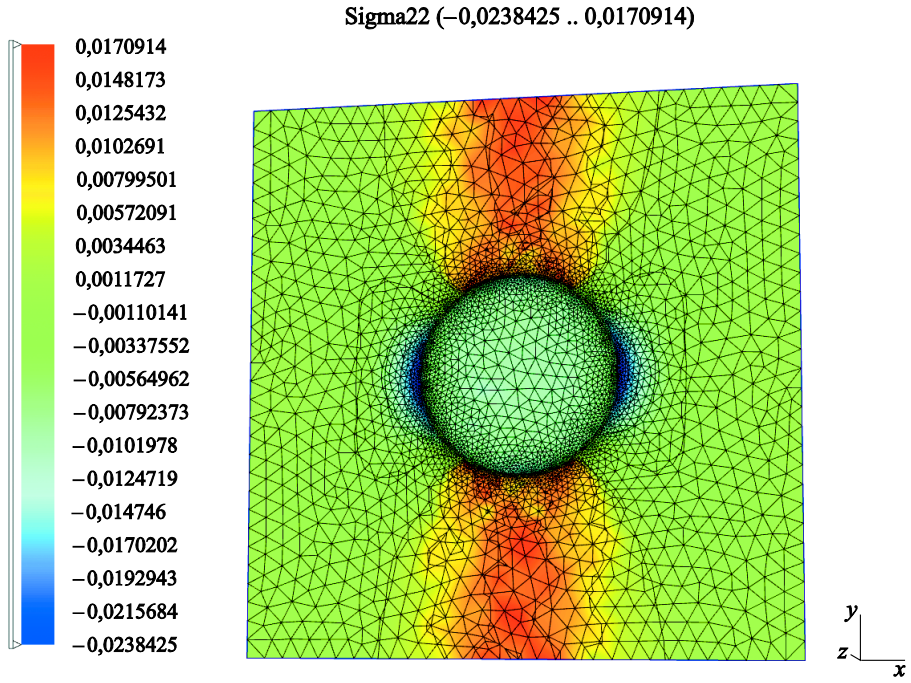


Рис. 4. Распределение напряжения σ_{22} (ГПа) на внешней поверхности трехслойной пластины с дефектом типа непропитки

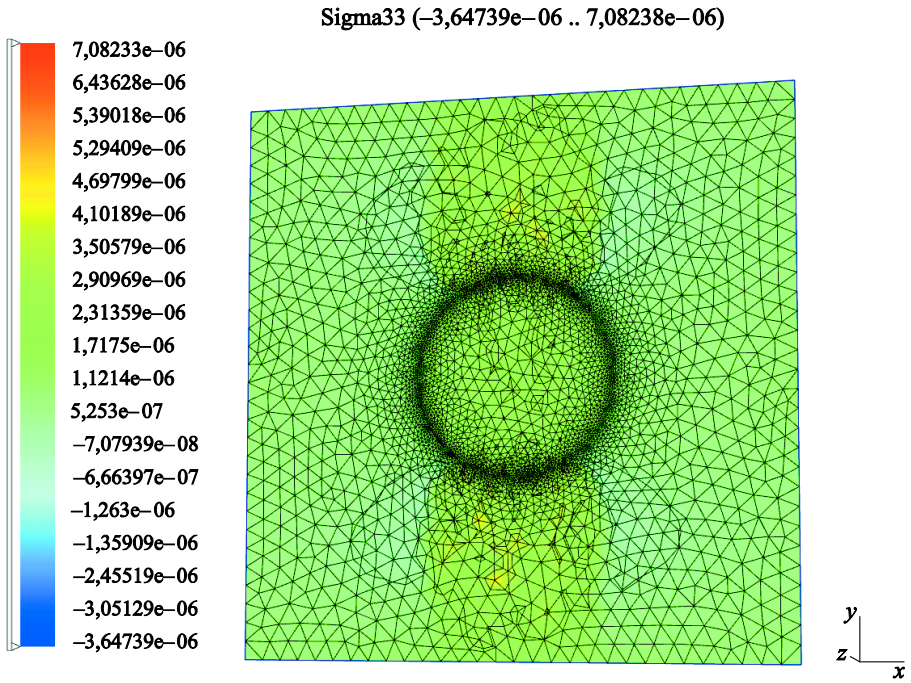


Рис. 5. Распределение поперечного напряжения σ_{11} (ГПа) на срединной поверхности трехслойной пластины с дефектом типа непропитки

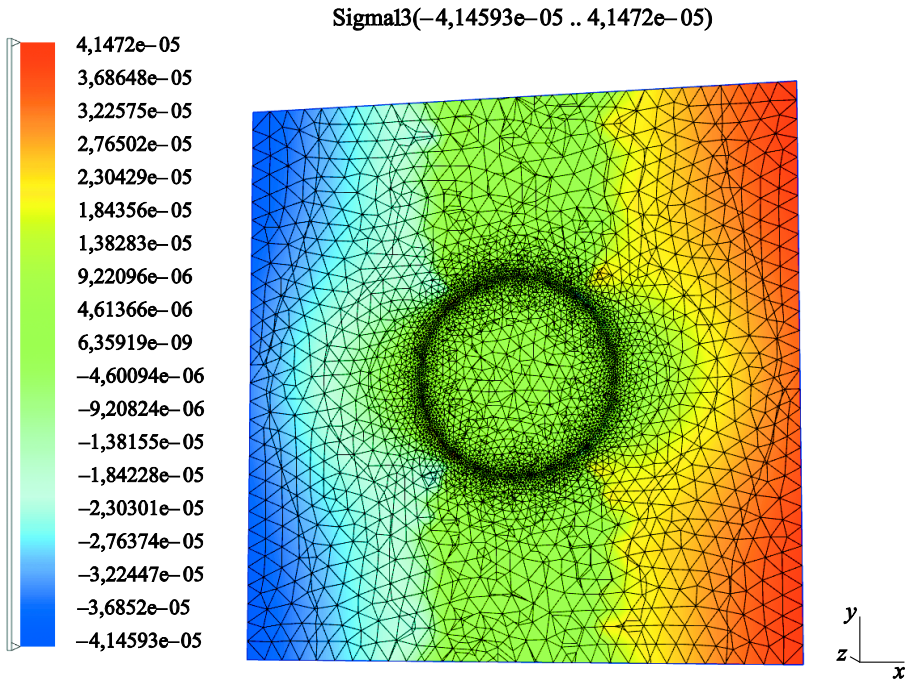


Рис. 6. Распределение сдвигового напряжения σ_{13} (ГПа) на срединной поверхности трехслойной пластины с дефектом типа непропитки

На данных рисунках продемонстрировано распределение прогиба W и макронапряжений σ_{ij} при нагрузке (перепаде давления Δp), соответствующей примерно 0,5 от предельного значения, при котором происходит полное разрушение. На рис. 7 показано распределение в сэндвичевой пластине комплексного параметра повреждаемости $\pi = \max\{z_1^{(\alpha)},\ \min\{z_2^{(\alpha)}, z_3^{(\alpha)}\}\}$.

Результаты расчетов показывают, что прогиб W и углы поворота нормали γ_2, γ_3 малочувствительны к появлению дефекта в пластине: их значения практически не изменяются по сравнению со случаем отсутствия дефекта. Причина заключается в том, что перемещения и углы поворота являются интегральными характеристиками пластины и мало изменяются при малом вкладе дефекта в общую площадь.

Напряжение изгиба σ_{33} и боковое напряжение σ_{22} существенно изменяют свое распределение по пластине при появлении дефекта. В окрестности дефекта возникает концентрация напряжений, приводящая к повышению значений этих напряжений: максимальные значения σ_{33} в верхнем слое пластины увеличиваются с 9,7 до 14,34 МПа; боковое напряжение σ_{22} увеличивает свое значение в центре пластины, в окрестности дефекта, от 7,2 до 23,8 МПа максимальное значение.

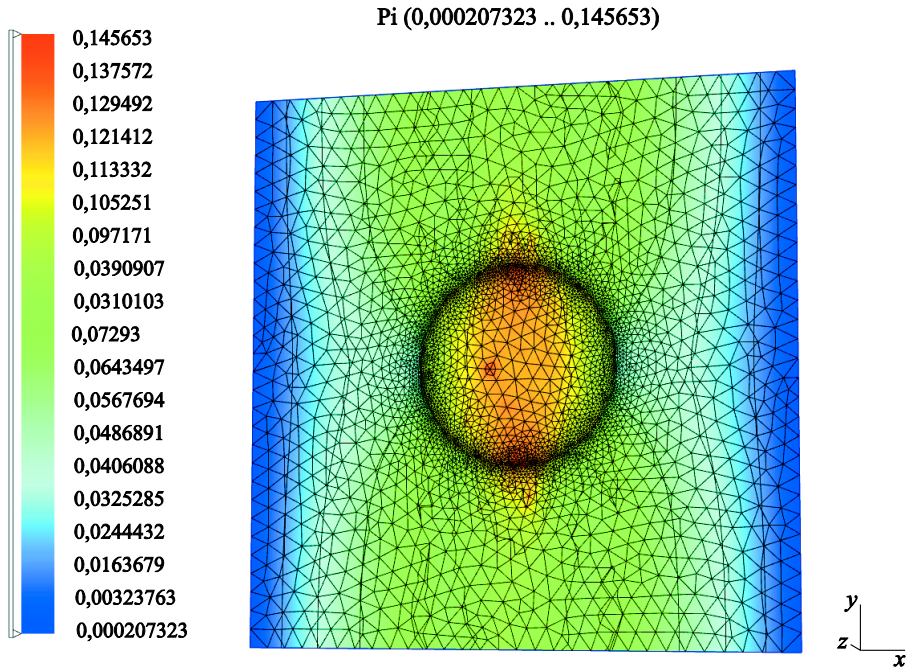


Рис. 7. Распределение комплексного параметра повреждаемости π на внешней поверхности трехслойной пластины с дефектом типа непропитки

Поперечное напряжение σ_{11} на срединной поверхности имеет максимум в окрестности дефекта и при наличии дефекта увеличивает свое максимальное значение от 0,0006 до 0,007 МПа. Сдвиговые напряжения σ_{23} в плоскости пластины при наличии дефекта имеют поле концентрации в окрестности дефекта: возрастая с 0,053 до 2,27 МПа. Напряжения межслойного сдвига σ_{13} имеют максимум на торцах пластины, их значения при наличии дефекта возрастают с 0,00222 до 0,041 МПа. Комплексный параметр повреждаемости π имеет ярко выраженный максимум только в зоне дефекта и составляет 0,14.

На рис. 8 показана расчетная диаграмма деформирования сэндвичевой пластины в виде зависимости давления Δp от максимального прогиба W пластины при различных значениях площади дефекта и при 30 %-ном снижении свойств материала обшивок в этой зоне. При значении давления 85 % от предельного для всех вариантов расчетов происходит частичное разрушение слоев обшивок с углом армирования 90° вследствие выполнения критерия $z_2^{(\alpha)} = 1$.

При дальнейшем увеличении значения давления Δp происходит разрушение пенозаполнителя (рис. 8, *2–5*) вначале в зоне стыка с обшивками, а затем — по всей толщине пластины (рис. 8, *6–9*).

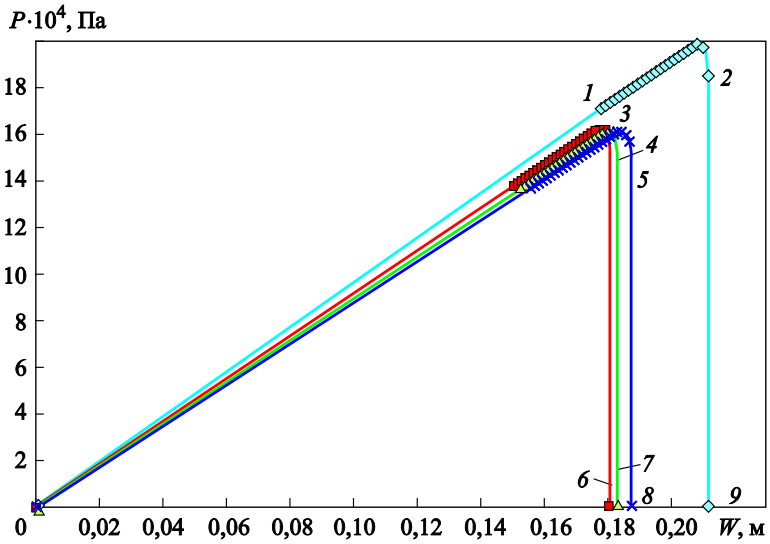


Рис. 8. Диаграммы деформирования (перепад давления — прогиб) трехслойной конструкции без дефекта и с дефектами различной площади:

1 — частичное разрушение в слоях с углом 90°; *2–5* — частичное разрушением в пенозаполнителе; *6–9* — полное разрушение пенозаполнителя; — без дефекта; — площадь 5 %; — площадь 7 %; — площадь 10 %

Полное разрушение пенозаполнителя влечет за собой резкое изменение диаграммы деформирования, означающее исчерпание несущей способности сэндвичевой пластины, хотя полного разрушения обшивок при котором происходил бы разрыв моноволокон в слоях при этом не происходит. Наличие дефекта приводит к снижению предельного значения давления, которое выдерживает пластина, примерно на 17 %, причем это снижение практически одинаково для пластин со значением площади дефекта 2–10 %.

Заключение. Разработана многоуровневая модель для многомасштабного деформирования трехслойных конструкций из ПКМ типа пластин с заполнителем на основе пенопласта, учитывающая микромеханические процессы деформирования и повреждаемости матрицы, армирующего наполнителя и пенопласта, а также макроскопические дефекты типа непропитки композитных обшивок.

Проведено конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния, повреждаемости и разрушения трехслойных пластин с обшивками из гибридных композитов из углепластика с дефектом типа непропитки различных размеров при изгибе равномерным давлением. Установлены особенности процесса деформирования и повреждаемости данного типа композитных конструкций. Разработанная методика может быть применена для расчета деформирования, повреждаемости и разрушения трехслойных

пластин из ПКМ, применяемых в различных отраслях промышленности: судостроении, авиастроении и ракетостроении.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14- 19-00847).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Scott Burton W., Noor A.K. Assessment of computational models for sandwich panels and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, vol. 124, iss. 1–2, pp. 125–151.

[2] D'Ottavio M., Dozio L., Vescovini R., Polit O. Bending analysis of composite laminated and sandwich structures using sublaminate variable-kinematic Ritz models. *Composite Structures*, 2016, vol. 155, pp. 45–62.

[3] An H., Chen S., Huang H. Optimal design of composite sandwich structures by considering multiple structure cases. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 676–686.

[4] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.

[5] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование: электронное научно-техническое издание*, 2014, № 7. DOI 10.7463/0714.0717805

[6] Heslehurst R.B. *Defects and Damage in Composite Materials and Structures*. CRC Press, 2014, 154 p.

[7] Joffre T., Miettinen A., Wernersson E., Isaksson P., Gamstedt E. Effects of defects on the tensile strength of short-fibre composite materials. *Mechanics of Materials*, 2014, vol. 75, pp. 125–134. DOI 10.1016/j.mechmat.2014.04.003

[8] Lemanski S.L., Wang J., Sutcliffe M.P.F., Potter K.D., Wisnom M.R. Modelling failure of composite specimens with defects under compression loading. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. May 2013, vol. 48, pp. 26–36. http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.12.007

[9] Dong J., Huo N. A two-scale method for predicting the mechanical properties of 3D braided composites with internal defects. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 1–10.

[10] Shigang A., Daining F., Rujie H., Yongmao P. Effect of manufacturing defects on mechanical properties and failure features of 3D orthogonal woven C/C composites. *Composites Part B: Engineering*, 2015, vol. 71, pp. 113–121.

[11] Ribeiro F.M.F., Campilho R.D.S.G., Carbas R.J.C., da Silva L.F.M. Strength and damage growth in composite bonded joints with defects. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 100, pp. 91–100.

[12] Gowayed Y., Ojard G., Prevost E., Santhosh U., Jefferson G. Defects in ceramic matrix composites and their impact on elastic properties. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 167–175.

[13] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.

[14] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на ос-

нове метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[15] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д. Моделирование динамических процессов деформирования гибких тканевых композиционных материалов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 5 (29). DOI 10.18698/2308-6033-2014-5-1236

[16] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641

[17] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. DOI 10.18698/2308-6033-2013-7-899

[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–56.

[19] Кристенсен Р.М. *Введение в механику композитов.* Москва, Мир, 1982, 336 с.

[20] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[21] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of Composites Structures under High Temperatures. Springer*, 2015, 357 p.

Статья поступила в редакцию 09.09.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Федонюк Н.Н. Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных конструкций с дефектами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3 (11), с. 3–23.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «СИМПЛЕКС») МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Юрин Юрий Викторович — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvadmtr@gmail.com

Федонюк Николай Николаевич — канд. техн. наук, начальник лаборатории ФГУП «Крыловский государственный научный центр».

Numerical modeling of deformation and strength of sandwich composite structures with defects

© Yu.I. Dimitrienko[1], Yu.V. Yurin[1], N.N. Fedonyuk[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]Krylov State Research Centre, St. Petersburg, 196158, Russia

The purpose of this research was to develop a multilevel model for multiscale deformation of three-layer (sandwich) structures made of polymeric composite materials such

as plates with a foam based filler. We took into account the micromechanical processes of deformation and damageability in the matrix and reinforcing filler and foam, as well as macroscopic defects such as non-impregnation of the composite skins. First, we did a finite element modeling of stress-strain state, damageability and destruction of the sandwich plates with skins made of hybrid carbon fiber composites, with different types of defect such as non-impregnation, under the flexural uniform pressure. Then we found the characteristic features of the deformation and damageability process in this type of composite structures. Finally, we developed a method which can be used to calculate the deformation, damageability and destruction of sandwich plates made of polymer composite materials applied in various industries: shipbuilding, aviation, rocketry.

Keywords: *sandwich structures, polymer composite materials, multiscale modeling, defects, finite element method, layered fiber composites, monofilaments, damageability.*

REFERENCES

[1] Scott Burton W., Noor A.K. Assessment of computational models for sandwich panels and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, vol. 124, no. 1–2, pp. 125–151.

[2] D'Ottavio M., Dozio L., Vescovini R., Polit O. Bending analysis of composite laminated and sandwich structures using sublaminate variable-kinematic Ritz models. *Composite Structures*, 2016, vol. 155, pp. 45–62.

[3] An H., Chen S., Huang H. Optimal design of composite sandwich structures by considering multiple structure cases. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 676–686.

[4] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonyuk N.N., Sborschikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigorev M.M., Prozorovskiy A.A. *Kompozity i nanostruktury — Composites and nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.

[5] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Prozorovskiy A.A. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science & Education: scientific Journal*, 2014, no. 7. DOI 10.7463/0714.0717805

[6] Heslehurst R.B. *Defects and Damage in Composite Materials and Structures*. CRC Press, 2014, 154 p.

[7] Joffre T., Miettinen A., Wernersson E., Isaksson P., Gamstedt E. Effects of defects on the tensile strength of short-fibre composite materials. *Mechanics of Materials*, 2014, vol.75, pp. 125–134. DOI 10.1016/j.mechmat.2014.04.003

[8] Lemanski S.L., Wang J., Sutcliffe M.P.F., Potter K.D., Wisnom M.R. Modelling failure of composite specimens with defects under compression loading. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. May 2013, vol. 48, pp. 26–36. http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.12.007

[9] Dong J., Huo N. A two-scale method for predicting the mechanical properties of 3D braided composites with internal defects. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 1–10.

[10] Shigang A., Daining F., Rujie H., Yongmao P. Effect of manufacturing defects on mechanical properties and failure features of 3D orthogonal woven C/C composites. *Composites Part B: Engineering*, 2015, vol. 71, pp. 113–121.

[11] Ribeiro F.M.F., Campilho R.D.S.G., Carbas R.J.C., da Silva L.F.M. Strength and damage growth in composite bonded joints with defects. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 100, pp. 91–100.

[12] Gowayed Y., Ojard G., Prevost E., Santhosh U., Jefferson G. Defects in ceramic matrix composites and their impact on elastic properties. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 167–175.

[13] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical Universiry. Series Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.

[14] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.

[15] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 5 (29). DOI 10.18698/2308-6033-2014-5-1236

[16] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641

[17] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 12. DOI 10.18698/2308-6033-2013-7-899

[18] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–56.

[19] Kristensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to the mechanics of composites]. Moscow, Mir Publ., 1982, 336 p.

[20] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred.* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[21] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of Composites Structures under High Temperatures. Springer*, 2015, 357 p.

DimitrienkoYu.I., Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Director of Research and Education Centre Supercomputer engineering modeling and development of software systems (SEC SIMPLEX) Bauman Moscow State Technical University, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, BMSTU.
e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Yurin Yu.V., post-graduate student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: yvadmtr@gmail.com

Fedonyuk N.N., Cand. Sci. (Eng.), Head of the Laboratory, Krylov State Research Centre.