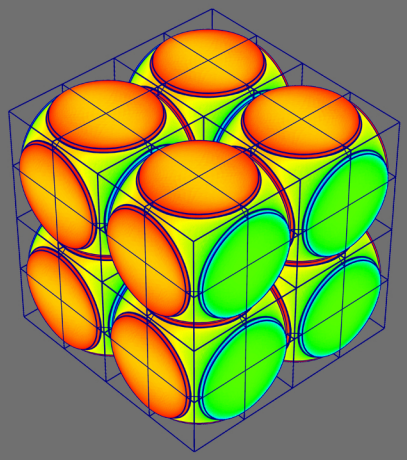
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Котенев В. П., Сысенко В. А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых затупленных тел вращения произвольного очертания. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №1 (1), с. 68-81

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/10/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.60
21.02.2026 19:32:17

УДК 533.6.011.31.5:532.582.33

Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых затупленных тел вращения произвольного очертания

© В.П. Котенев[1], В.А. Сысенко[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2] ВПК «НПО машиностроения», г. Реутов, Московская область, 143966, Россия

Разработаны аналитические формулы для быстрого и точного расчета давления на участке поверхности тел вращения произвольного очертания, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Рассмотрены примеры применения метода для пространственных течений газа.

Ключевые слова: *сверхзвуковой поток, трехмерные течения газа, звуковая точка.*

Введение. При применении численных алгоритмов, основанных на методе установления по времени или других итерационных подходах [1–4], успех решения задачи во многом зависит от близости начальных данных к стационарному решению. В настоящее время существует определенный разрыв между возможностями численных методов и точностью приближенных решений, что значительно увеличивает время счета или делает невозможным численное интегрирование уравнений газовой динамики. Так, использование формулы Ньютона [5] для начального распределения давления на участках, где угол встречи потока с поверхностью тела мал, часто приводит к срыву решения.

Между тем простые аналитические подходы имеют и большое самостоятельное значение [6].

В данной статье, являющейся развитием работ [7–9], получены аналитические зависимости для практически точного определения давления на выпуклых затупленных телах вращения произвольного очертания. Предложен также подход к применению этих зависимостей в трехмерных течениях.

Получение аналитической зависимости для определения давления. Рассмотрим вывод простой аналитической зависимости, дающей практически точное распределение давления на затупленных телах вращения произвольного очертания при их сверхзвуковом обтекании.

1. *Обезразмеривание.* Будем использовать безразмерные параметры. Давление P отнесем к давлению в точке торможения P_0', которое определяется по известной формуле Рэлея:

$$P_0' = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \mathrm{M}_\infty^2 \left[\gamma - \frac{\gamma-1}{2\mathrm{M}_\infty^2}\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} P_\infty,$$

где γ — показатель адиабаты (для совершенного газа γ = 1,4); M_∞ — число Маха набегающего потока; P_∞ — давление газа в набегающем потоке.

2. *Определение положения звуковой точки на сфере*. Для чисел Маха в набегающем потоке более 2,5 положение звуковой точки, расчет которой приводится в [10], является функцией от отношения плотностей κ на прямом скачке уплотнения:

$$\sigma_{**} = 90 - (34 + 40\kappa), \tag{1}$$

$$\kappa = \gamma - \frac{1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)\mathrm{M}_\infty^2},$$

где σ_{**} — угол в градусах между осью тела и вектором скорости в звуковой точке.

Для умеренных сверхзвуковых чисел Маха хороший результат для определения положения звуковой точки на сфере дает использование классической формулы Ньютона:

$$\sigma_{**} = \arcsin\sqrt{\frac{p_* - \dfrac{1}{1+\gamma\mathrm{M}_\infty^2}}{1 - \dfrac{1}{1+\gamma\mathrm{M}_\infty^2}}}, \tag{2}$$

где $p_* = \left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$ — давление в звуковой точке, отнесенное к давлению в точке торможения.

3. *Вычисление давления на поверхности сферы.* Рассмотрим функцию τ, характеризующую термодинамическое состояние газа и представляющую собой отношение температуры движущегося газа к температуре изоэнтропически заторможенного потока. Величина $p = \tau^{\gamma/(\gamma-1)}$ есть отношение статического давления к давлению торможения, т. е. искомая величина. Как известно, функция τ является вогнутой вниз плавно убывающей функцией от скорости, которая при движении газа вдоль сферы является, в свою очередь, монотонно возрастающей функцией от угла σ между вектором скорости набегающего потока и вектором скорости в любой точке ее поверхности сферы. Максимальное значение τ достигается в точке торможения и равно единице. Поэтому

будем считать, что $\tau = \cos\left(\mu\left(\sigma\right)\right) = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\left(\mu/2\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\mu/2\right)}$. Найдем функцию $\tau\left(\sigma\right)$, используя известные значения $\tau = 1$ при $\sigma = \pi/2$ и $\tau = 2/(\gamma+1)$ при $\sigma = \sigma_{**}$:

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\mu(\pi/2)/2\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\mu(\pi/2)/2\right)} = 1, \tag{3}$$

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\mu(\sigma_{**})/2\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\mu(\sigma_{**})/2\right)} = \frac{2}{\gamma+1}. \tag{4}$$

Из выражений (3) и (4) следует, что $\mathrm{tg}\left(\mu(\pi/2)/2\right) = 0$ и $\mathrm{tg}\left(\mu(\sigma_{**})/2\right) = \sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+3}}$. Предположим, что $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\mu}{2}\right) = a\sigma + b$, тогда $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\mu}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+3}}\,\dfrac{\sigma-\pi/2}{\sigma_{**}-\pi/2}$ и

$$\tau = \frac{1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+3}\left(\dfrac{\sigma-\pi/2}{\sigma_{**}-\pi/2}\right)^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{\gamma+3}\left(\dfrac{\sigma-\pi/2}{\sigma_{**}-\pi/2}\right)^2} \tag{5}$$

или

$$\tau = \cos\left[2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+3}}\,\frac{\pi/2-\sigma}{\pi/2-\sigma_{**}}\right)\right]. \tag{6}$$

Формулы (5) или (6) наряду с (1), (2) позволяют найти давление $p\left(\sigma\right) = \tau\left(\sigma\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$. Входящие в них углы содержатся в числителе и знаменателе дроби, поэтому их можно брать как в радианах, так и в градусах.

4. *Определение положения звуковой точки для произвольного выпуклого тела вращения.* Для затупленного тела вращения определим положение звуковой точки σ_*, воспользовавшись методом работы [11], применение которого можно также найти в [12, 13].

5. *Расчет давления на поверхности затупленного тела вращения.* Распределение давления на поверхности затупленного тела вращения будем искать в виде

$$P=\left(\frac{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+3}\left(\frac{\sigma-\pi/2}{\sigma_*-\pi/2}\right)^2}{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+3}\left(\frac{\sigma-\pi/2}{\sigma_*-\pi/2}\right)^2}\right)^{\lambda(\sigma)\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \qquad (7)$$

Так как в звуковой точке должно выполняться равенство $p_*=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, то $\lambda(\sigma_*)=1$. Будем считать функцию $\lambda(\sigma)$ линейной. Пусть вторая точка x_0, через которую проходит прямая $\lambda(\sigma)$, лежит в небольшой окрестности σ_* и $\lambda(x_0)=\lambda_0$. Тогда $\lambda(\sigma)$ имеет вид

$$\lambda(\sigma)=1+\frac{1-\lambda_0}{\sigma_*-x_0}(\sigma-\sigma_*). \qquad (8)$$

Положение точки x_0 определим эмпирически в зависимости от положения звуковой точки на поверхности тела из условия:

если $\sigma_{**}>\sigma_*$, то $x_0=1{,}15\sigma_*$;

если $\sigma_{**}<\sigma_*$, то $x_0=0{,}85\sigma_*$.

В небольшой окрестности звуковой точки для расчета давления с высокой точностью можно воспользоваться модификацией формулы Ньютона:

если $\sigma\geq\sigma_*$, то $P=\sin^2\sigma+\frac{p_*-\sin^2\sigma_*}{\cos^2\sigma_*}\cos^2\sigma$; (9)

если $\sigma<\sigma_*$, то $P=(p_*-P_\infty)\frac{\sin^2\sigma}{\sin^2\sigma_*}+P_\infty$. (10)

Величину λ_0 будем искать из равенства давления, рассчитываемого по формуле (7), давлению, рассчитываемому по формулам (9) или (10) в точке x_0. Таким образом, в любой точке тела можно вычислить значение $\lambda(\sigma)$, а значит, и давление по формуле (7).

Анализ результатов. Для примера приведем результаты расчетов по предложенному методу для двух типов эллипсоидов с соотношением полуосей b/a = 1/2 (рис. 1) и b/a = 3/2 (рис. 2) и для параболоидов вида $r^2=2pz$ (где z — безразмерная величина, отнесенная к радиусу кривизны тела в критической точке) с параметрами p = 0,25 (рис. 3, *а*) и p = 1 (рис. 3, *б–г* и рис. 4, *а*, *б*) при различных значениях числа Маха. Как видно из сравнения расчетных данных с табличными [14, 15], применение формулы (7) позволяет получить результат с максимальной относительной погрешностью, не превышающей 5 % для всех вариантов. В то же время на некоторых режимах формула Ньютона имеет максимальную относительную погрешность до 100 %.

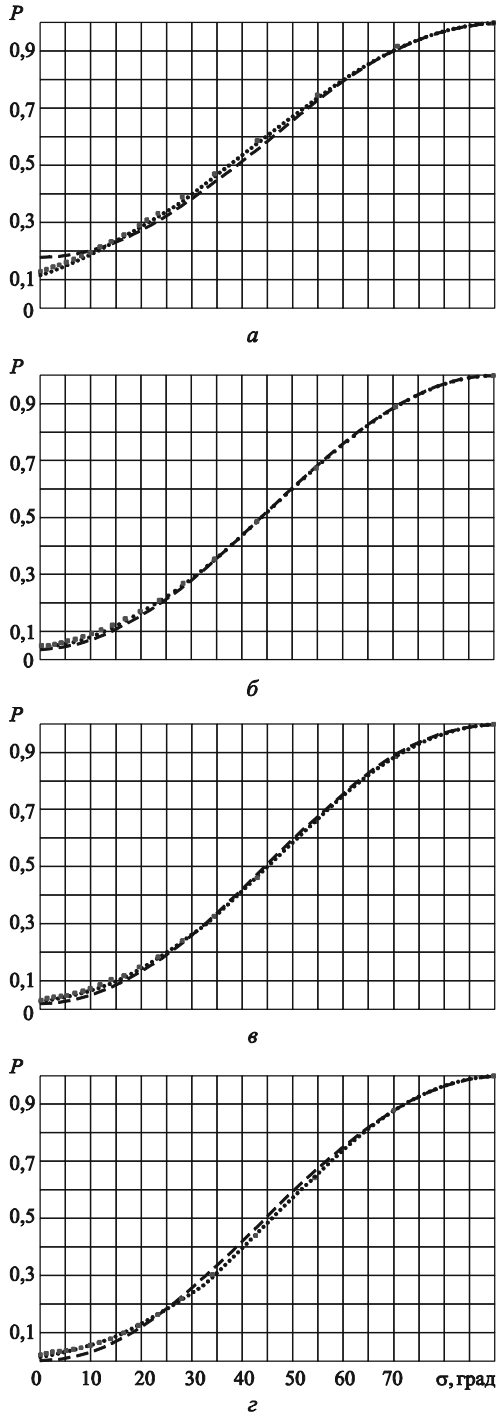


Рис. 1. Распределение давления P на эллипсоиде с соотношением полуосей b/a = 1/2 при числе Маха M = 2 (*а*), M = 4 (*б*), M = 6 (*в*) и M = 20 (*г*), полученное по формуле Ньютона (– – –), по формуле (7) (···), по табличным данным [14] (▪▪▪)

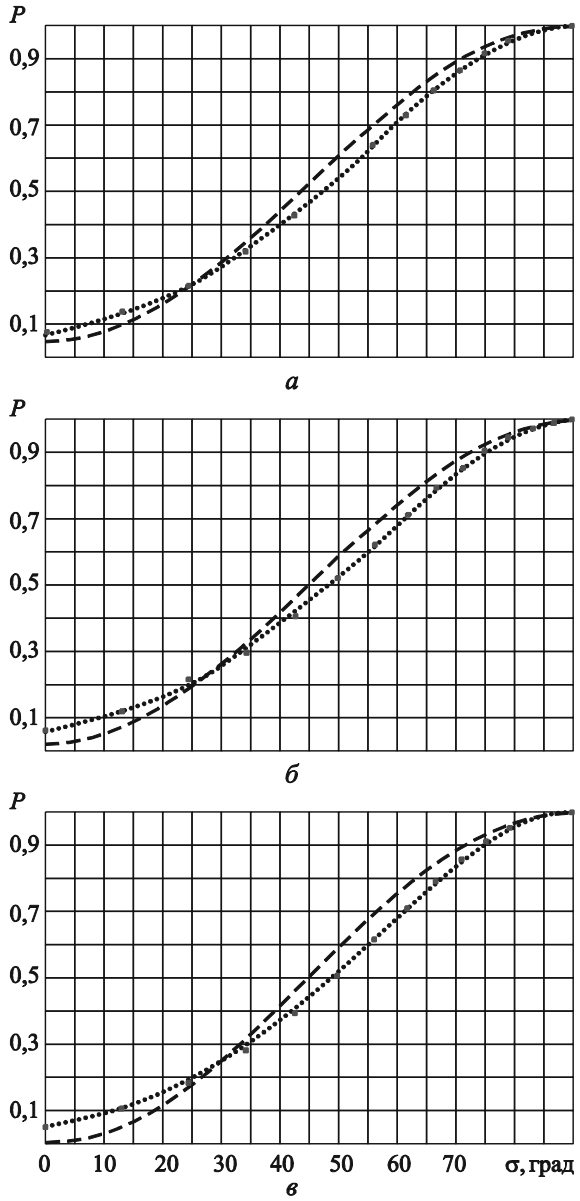


Рис. 2. Распределение давления *P* на эллипсоиде с соотношением полуосей *b*/*a* = 3/2 при числе Маха M = 4 (*а*), M = 6 (*б*), M = 20 (*в*), полученное по формуле Ньютона (– – –), по формуле (7) (···), по табличным данным [14] (▪▪▪)

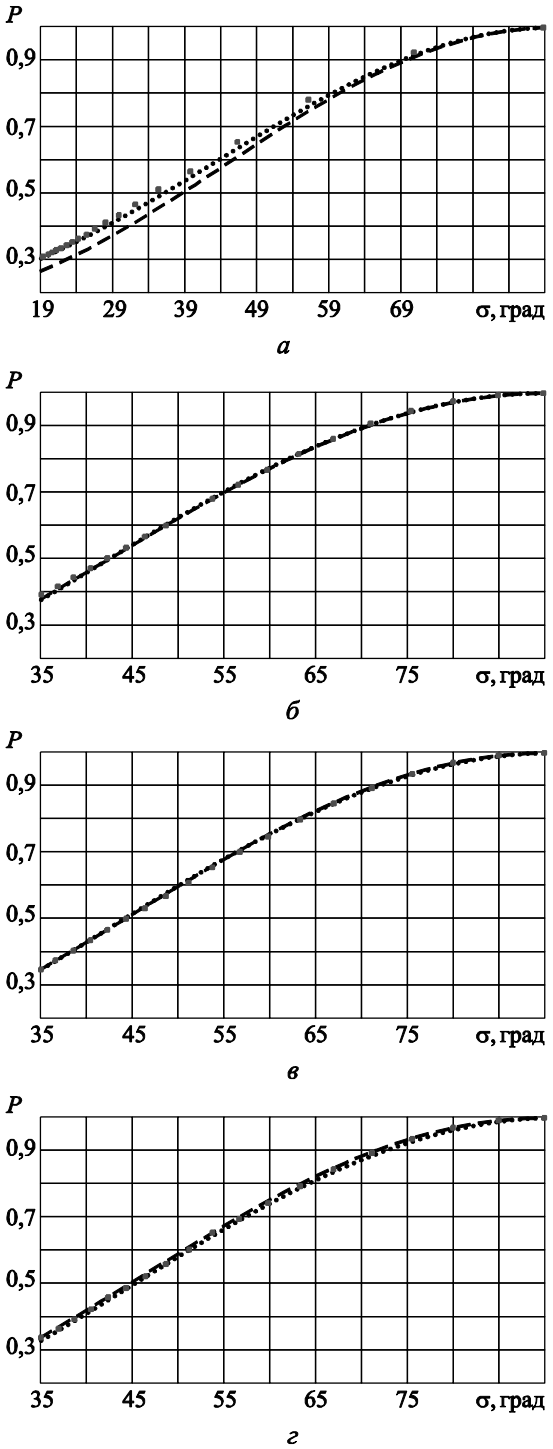


Рис. 3. Распределение давления *P* на параболоидах с параметром *p* = 0,25 при числе Маха M = 2 (*а*) и с параметром *p* = 1 при числе Маха M = 4 (*б*), M = 6 (*в*), M = 8 (*г*), полученное по формуле Ньютона (– – –), по формуле (7) (···), по табличным данным [14] (▪▪▪)

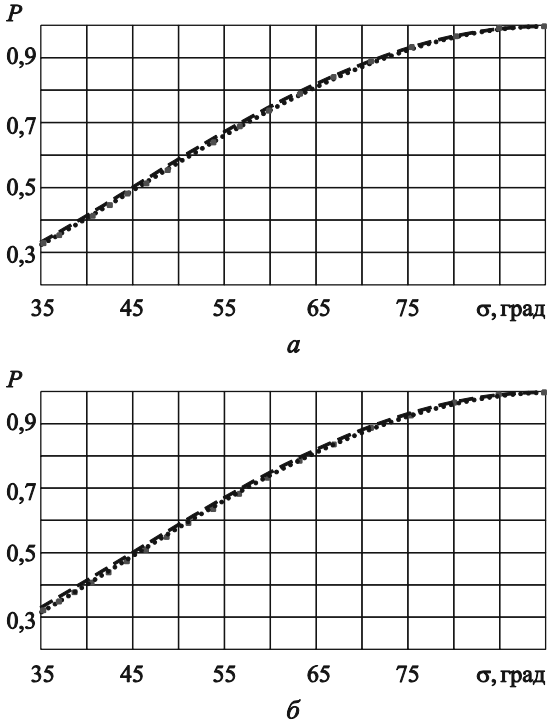


Рис. 4. Распределение давления P на параболоидах с параметром p = 1 при числе Маха M = 10 (*а*) и M = 20 (*б*), полученное по формуле Ньютона (– – –), по формуле (7) (...), по табличным данным [14] (▪▪▪)

Эти формулы можно применять и в трехмерных течениях, используя *правило* «*местного тела*», когда давление считается одинаковым в точках с одинаковыми углами встречи потока с поверхностью. Опробуем этот метод для расчета давления в различных сечениях параболоида вращения $z = 1{,}125r^2$ (рис. 5), обтекаемого сверхзвуковым потоком идеального газа под ненулевым углом атаки. В соответствии с правилом «местных тел» давление на параболоиде в трехмерном течении определяется по формуле

$$P = \left(\frac{1 - \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 3} \left(\dfrac{\arccos\left(\vec{V}_\infty / V_\infty, \vec{n}\right) - \pi}{\sigma_* - \pi/2} \right)^2}{1 + \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 3} \left(\dfrac{\arccos\left(\vec{V}_\infty / V_\infty, \vec{n}\right) - \pi}{\sigma_* - \pi/2} \right)^2} \right)^{\lambda(\sigma)\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \qquad (11)$$

где $\vec{V}_\infty$ — вектор скорости набегающего потока; $\vec{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности параболоида. Угол σ_* описывает положение звуковой точки на параболоиде в осесимметричном течении.

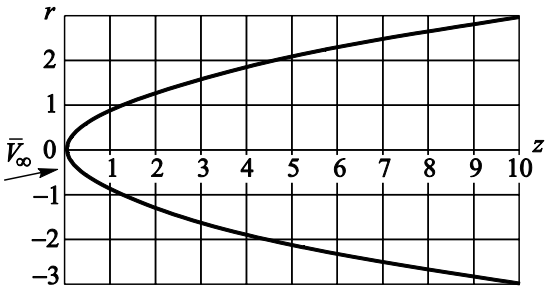


Рис. 5. Параболоид вращения вида $z = 1{,}125\ r^2$

Результаты расчета давления на указанном параболоиде, обтекаемого под углами атаки $\alpha = 5°$ и $\alpha = 10°$, в различных сечениях $z = \text{const}$, а также табличные данные [14] в зависимости от центрального угла ϑ представлены на рис. 6 $(\alpha = 5°)$ и на рис. 7 $(\alpha = 10°)$. На графиках видно, что в сечениях $z < 5$ метод «местных тел» позволяет более точно рассчитать давление по сравнению с формулой Ньютона. Метод Ньютона дает максимальную относительную погрешность в указанных сечениях 20 %, а формула «местных тел» — 12 % для $\alpha = 10°$, $z = 4$ (см. рис. 7, *в*), в остальных сечениях — не более 7 %.

В качестве «эквивалентного тела» можно рассматривать сферу. Тогда формула для расчета давления упрощается. На некоторых из этих графиков приведено распределение давления на параболоиде, вычисленного по *методу* «*местных сфер*», когда давление на теле в точке, где угол $\arccos\left(-\vec{V}_\infty / V_\infty, \vec{n}\right)$ совпадает с углом $\frac{\pi}{2} - \sigma$ на сфере, полагалось равным давлению на сфере с данным углом встречи потока с поверхностью:

$$P = \left(\frac{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 3} \left(\frac{\arccos\left(\vec{V}_\infty / V_\infty, \vec{n}\right) - \pi}{\sigma_{**} - \pi/2} \right)^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 3} \left(\frac{\arccos\left(\vec{V}_\infty / V_\infty, \vec{n}\right) - \pi}{\sigma_{**} - \pi/2} \right)^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} . \qquad (12)$$

Анализ результатов показывает, что расчет давления по правилу «местных сфер» также дает более точные результаты по сравнению с формулой Ньютона, однако несколько уступает по точности $(\approx 5\ \%)$ расчетам по правилу «местных тел».

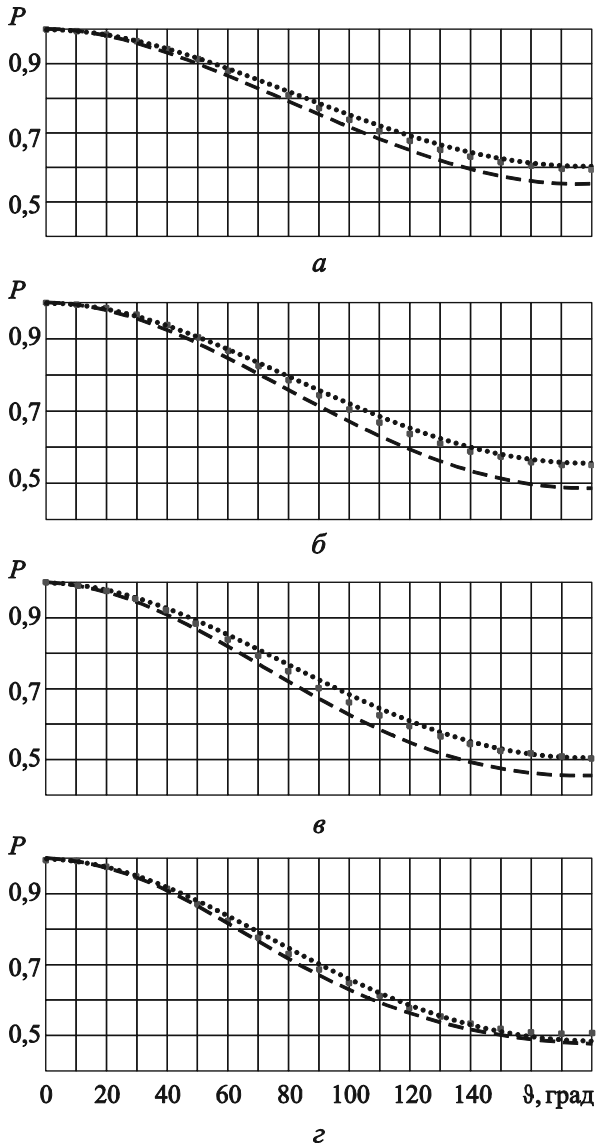


Рис. 6. Распределение давления *P* на параболоидах, обтекаемых под углом $\alpha = 5°$, в сечениях $z = 1$ (*а*), $z = 2$ (*б*), $z = 5$ (*в*), $z = 10$ (*г*) при числе Маха M = 4, полученное по формуле Ньютона (– – –), по формуле (11) (···), по табличным данным [14] (▪▪▪)

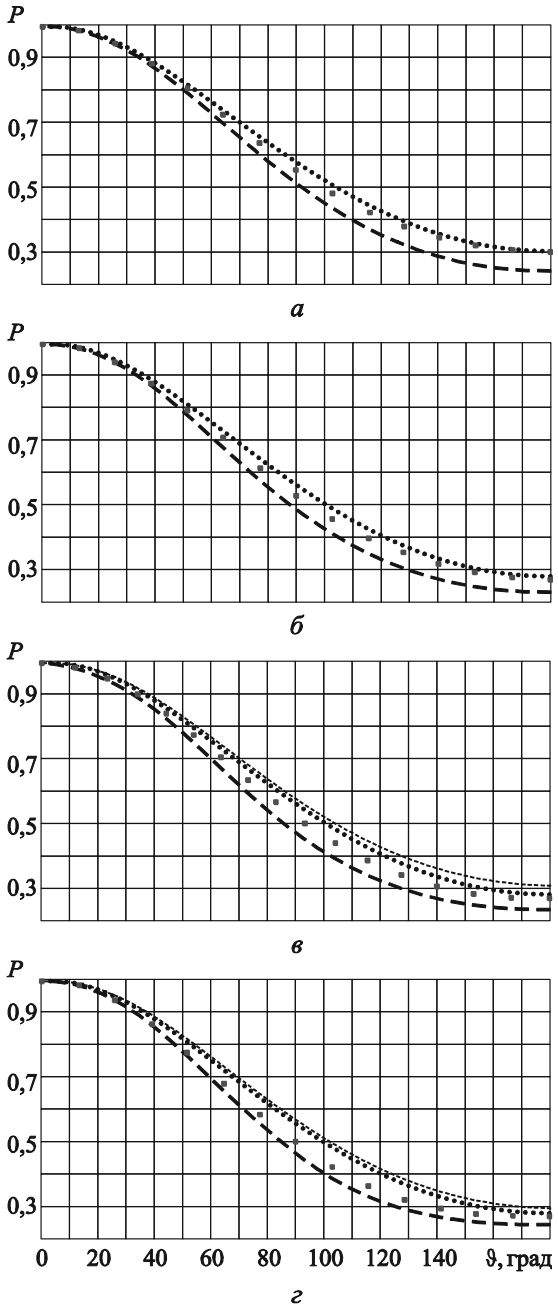


Рис. 7. Распределение давления P на параболоидах, обтекаемых под углом $\alpha = 10°$, в сечениях $z = 2$ (*а*), $z = 3$ (*б*), $z = 4$ (*в*), $z = 5$ (*г*) при числе Маха $M = 4$, полученное по формуле Ньютона (– – –), по формуле (11) (···), по формуле (12) (···), по табличным данным [14] (▪▪▪)

Вывод. Предложенные в данной работе формулы (7) и (11) в большинстве случаев дают лучшие результаты, чем метод Ньютона. Как и ожидалось, при наличии угла атаки с наветренной стороны формула Ньютона применима только тогда, когда угол встречи потока с поверхностью тела достаточно большой. Таким образом, данный метод может быть использован для получения начального распределения, а также для быстрой оценки давления на поверхности выпуклых затупленных тел вращения. В дальнейшем предполагается опробовать этот метод для более широкого класса поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ковалев В.А. *Гетерогенные каталитические процессы в аэротермодинамике*. Москва, Физматлит, 2002, 224 с.

[2] Белоцерковский О.М., Андрущенко В.А., Шевелев Ю.Д. *Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере*. Москва, ЯНУС-К, 2000, 456 с.

[3] Котенев В.П., Сахаров В.И., Тирский Г.А. О расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел химически неравновесным потоком газа. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1987, т. 27, № 6, с. 411–415.

[4] Gross A., Fasel H.F. High-Order-Accurate Numerical Method for Complex Flow. *AIAA Journal*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 204–214.

[5] Черный Г.Г. *Газовая динамика*. Москва, Наука, 1986, 424 с.

[6] Калугин В.Т. *Аэрогазодинамика органов управления полетом летательных аппаратов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 688 с.

[7] Котенев В.П. Уравнения двумерных течений газа в динамических переменных. *Информационные технологии*, 2007, № 1, с. 37–41.

[8] Котенев В.П. Приближенный метод расчета давления на поверхности затупленных тел. *Информационные технологии*, 2007, № 2, с. 76–80.

[9] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. *Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике*. Москва, Физматлит, 2011, 280 с.

[10] Лунев В.В. *Течение реальных газов с большими скоростями*. Москва, Физматлит, 2007, 760 с.

[11] Котенев В. П. Определение положения звуковой точки на поверхности выпуклого затупленного тела. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естествознание*, 2011, спец. вып. «Математическое моделирование», с. 150–153.

[12] Котенев В.П., Сысенко В.А. Уточненный метод быстрой оценки давления на поверхности гладких затупленных тел. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2012, № 3, с. 64–75.

[13] Котенев В.П., Сысенко В.А. Метод быстрой оценки параметров на поверхности затупленных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком, с учетом равновесных физико-химических превращений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/

[14] Любимов А.Н., Русанов В.В. *Течения газа около тупых тел*. Москва, Наука, 1970, 379 с.

[15] Белоцерковский О.М. *Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной: расчетные формулы и таблицы полей течений*. Москва, ВЦ АН СССР, 1961, 56 с.

Статья поступила в редакцию 06.03.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых затупленных тел вращения произвольного очертания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 68–81.

Котенев Владимир Пантелеевич родился в 1956 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1978 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики МГТУ им. Н.Э. Баумана, начальник отдела аэродинамики в ВПК «НПО машиностроения». Автор более 40 научных работ в области прикладной математики, численных и аналитических методов исследования течения газа при обтекании поверхности летательных аппаратов. e-mail: rotvp@mail.ru

Сысенко Валентина Алексеевна родилась в 1978 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2001 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник в отделе аэродинамики в ВПК «НПО машиностроения». Автор 12 научных работ в области прикладной математики. e-mail: dv-sys@yandex.ru

Analytical formula with improved accuracy for calculating pressure distribution on the surface of convex, blunt rotation bodies of arbitrary shape

© V.P. Kotenev[1], V.A. Sysenko[2]

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2] JSC MIC NPO Mashinostroyenia, Reutov, 143966, Russia

The authors developed the analytical formula for fast and accurate calculation of pressure on the surface of rotation bodies with arbitrary shape, which were flown by supersonic gas. The paper provides examples of applying the method for three-dimensional flows of gas.

Keywords: *supersonic gas flow, three-dimensional gas flows, sonic point.*

REFERENCES

[1] Kovalev V.A. *Geterogennye kataliticheskie protsessy v aerotermodinamike* [Heterogeneous catalytic processes in aerothermodynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 224 p.

[2] Belotserkovsky O.M., Andrushchenko V.A., Shevelev Yu.D. *Dinamika prostranstvennykh vikhrevykh techenii v neodnorodnoi atmosphere* [Dynamics of spatial vortex flows in an inhomogeneous atmosphere]. Moscow, YaNUS-K Publ., 2000, 456 p.

[3] Kotenev V.P., Sakharov V.I., Tirsky G.A. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki — J. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1987, vol. 27, no. 6, pp. 411–415.
[4] Gross A., Fasel H. F. *AIAA J.*, vol. 46, no. 1, January 2008, pp. 204–214.
[5] Chernyi G.G. *Gazovaya dinamika* [Gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 424 p.
[6] Kalugin V.T. *Aerogazodinamika organov upravleniya poletom letatel'nykh apparatov* [Aerogasdynamics of aircraft flight controls]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004, 688 p.
[7] Kotenev V.P. *Informatsionnye tekhnologii — Information technologies*, 2007, no. 1, pp. 37–41.
[8] Kotenev V.P. *Informatsionnye tekhnologii — Information technologies*, 2007, no. 2, pp. 76–80.
[9] Dimitrienko Yu.I., Kotenev V.P., Zakharov A.A. *Metod lentochnykh adaptivnykh setok dlya chislennogo modelirovaniya v gazovoi dinamike* [Adaptive mesh tape method for numerical simulation of gas dynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 280 p.
[10] Lunev V.V. *Techenie real'nykh gazov s bol'shimi skorostyami* [Real gases flow at high speeds]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 760 p.
[11] Kotenev V.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki. Spetsial'nyi vypusk «Matematicheskoe modelirovanie» — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Natural Science Series*, 2011, special issue “Mathematical Modeling”, pp. 150–153.
[12] Kotenev V.P., Sysenko V.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Series* , 2012, no. 3, pp. 64–75.
[13] Kotenev V.P., Sysenko V.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, issue 7. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/
[14] Lyubimov A.., Rusanov V.V. *Techeniya gaza okolo tupykh tel* [Gas flow around blunt bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 379 p.
[15] Belotserkovsky O.M. *Raschet obtekaniya osesimmetrichnykh tel s otoshedshei udarnoi volnoi. (Raschetnye formuly i tablitsy polei techeniya).* [Calculation of flow axial-symmetric bodies with detached shock wave. (Calculation formulas and tables of the flow fields)]. Moscow, CC AS USSR, 1961, 56 p.

Kotenev V.P. (b. 1956) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1978. Doctor of Science (Technical), head of research department of Scientific-Industrial Association mashinostroenie. Author of about 40 publication in the field of applied mathematics, numerical and analytical methods to investigate gas streams near by the surface of flying vehicles. e-mail: rotvp@mail.ru

Sysenko V.A. (b. 1978) graduated from Bauman Moscow State University in 2001. Candidate of Science (Technical), worker of Scientific-Industrial Association mashinostroenie. Author of 12 publication in the field of applied mathematics. e-mail: dv-sys@yandex.ru