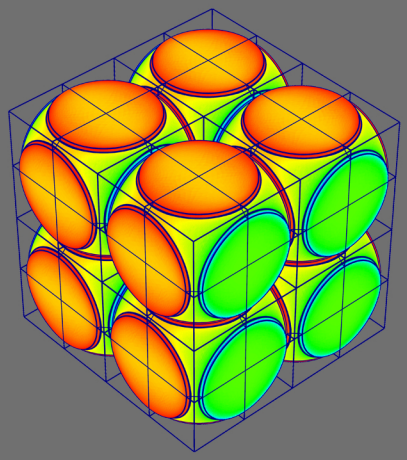
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №1 (1), с. 36-56

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/1/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.62
22.11.2026 21:16:39

УДК 539.3

# Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Предложена теория тонких конструктивно-ортотропных пластин, обладающих двухпериодической структурой, примером которых являются сотовые многослойные панели и подкрепленные пластины. Теория построена на основе уравнений общей трехмерной теории упругости путем с помощью асимптотических разложений по малому параметру, представляющему отношение толщины пластины к характерной длине, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Сформулированы локальные задачи для нахождения напряжений во всех конструктивных элементах пластины. Показано, что полученные глобальные (осредненные по определенным правилам) уравнения теории пластин близки к уравнениям теории пластин Кирхгофа – Лява, но отличаются от них наличием третьего порядка производных от продольных перемещений. Предложенный метод позволяет вычислить все шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига, для этого необходимо численно решить локальные задачи до третьего приближения включительно. Приведен пример конечно-элементного решения локальных задач нулевого приближения для сотовой конструкции, который показал, что разработанный метод расчета пластин и его численная реализация достаточно эффективны, они позволяют проводить расчеты для сложных конструктивно-ортотропных пластин с сильно различающимися значениями упругих характеристик.*

***Ключевые слова:*** *многослойные пластины, двухпериодические структуры, многослойные сотовые панели, асимптотические разложения, локальные задачи.*

**Введение.** Благодаря снижению размерности двумерные задачи теории упругих пластин и оболочек имеют определенные преимущества перед трехмерными задачами теории упругости в точной постановке: упрощение топологии и размерности конечно-элементных сеток, необходимых для численного решения задач, а также сокращение времени численного расчета. Однако платой за это сокращение является уменьшение точности получаемого решения, главным образом, для «слабых» напряжений — напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений. Для многих задач именно эти напряжения играют наиболее важную роль при проектировании тонкостенных конструкций. В частности, при расчете прочности тонкостенных конструкций из многослойных композиционных материалов, а также сотовых трехслойных конструкций, подкрепленных, сетчатых, обычно называемых *конструктивно-ортотропными конструкциями* (КОК), очень важно определить напряженное состояние в отдельных их компонентах, например напряжения отрыва обшивок от сотового заполнителя, сдвиговые напряжения в сотовом заполнителе и т. п. Расчет этих напряже-

ний в общей трехмерной постановке задачи теории упругости крайне затруднителен, поэтому существует потребность в разработке уточненных методов теории тонких конструктивно-ортотропных пластин и оболочек. Таких методов достаточно много; не претендуя на полноту списка, отметим лишь некоторые исследования в этой области [1–9].

Сравнительно недавно появились работы [2, 3], в которых предложены теории тонких пластин и оболочек с двумерной микроструктурой — сотовыми, сетчатыми конструкциями, основанные на использовании метода асимптотического осреднения (метода гомогенизации — МГ), хорошо зарекомендовавшего себя при осреднении композитов с трехмерной периодической структурой [10–19]. Применение МГ для двумерных структур вызывает определенные сложности: двумерная задача осреднения не является частным случаем общей трехмерной задачи, поскольку двумерные пластины и оболочки сохраняют «третью» координату, но не обладают по ней периодической структурой. В работах [2, 3] был предложен вариант МГ для тонких пластин, в котором использовалось допущение о линейном характере распределения по толщине пластины главных членов асимптотического ряда для перемещений, что позволило получить систему уравнений типа уравнений Кирхгофа – Лява. В статьях [20, 21] был разработан вариант МГ для тонких многослойных пластин, в котором не делалось предположение о линейности распределения перемещений. Было показано, что для многослойных пластин такое линейное распределение отсутствует, а имеет место аналог гипотезы ломаной линии, используемой в теории Григолюка – Куликова [1]. В работе [21] было проведено численное сравнение результатов расчетов по этой теории с результатами, полученными по трехмерной теории упругости при использовании очень мелких конечно-элементных сеток, и показана очень высокая точность разработанного варианта МГ.

Целью данной работы является дальнейшее развитие предложенного в [20] варианта МГ для случая конструктивно-ортотопных пластин с двумерной структурой периодичности (двухпериодической структурой).

**Основные допущения.** Рассмотрим пластину (рис. 1) постоянной толщины, обладающую двухпериодической структурой (ДПС). В качестве примера ДПС могут выступать сотовые структуры, подкрепленные, вафельные и другие типы КОК.

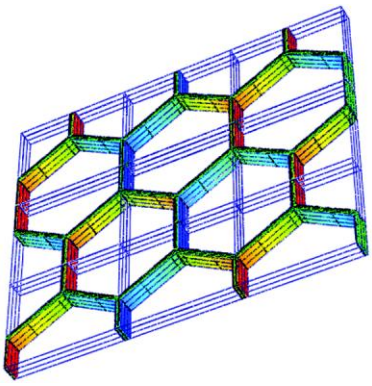


**Рис. 1.** Конструктивно-ортотропная пластина с двухпериодической структурой

Введем малый параметр $\kappa = h/L \ll 1$ как отношение толщины пластины $h$ к характерному размеру всей пластины $L$ (например, к ее максимальной длине). Введем также глобальные $x_k$ и локальные $\xi_i$ координаты:

$$x_k = \tilde{x}_k / L, \;\; \xi_i = x_i / \kappa, \quad k, i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\tilde{x}_k$ — обычные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси $O\tilde{x}_1$ и $O\tilde{x}_2$ принадлежат срединной плоскости пластины. Обозначим также $\xi_3 = \xi$. Здесь и далее индексы, обозначенные прописными буквами $I, J, K, L,$ принимают значения 1, 2, а индексы $i, j, k, l$ — значения 1, 2, 3. Ячейка двумерной периодичности (ЯП) пластины в координатах $\tilde{x}_k$ имеет размеры $\tilde{a}_k$, а локальные координаты для ЯП изменяются в диапазонах $-a_i/2 < \xi_i < a_i/2,$ где $a_i = \tilde{a}_i / h,$ а $\tilde{a}_3 = h.$ Полагаем, что существует два масштаба изменения перемещений КОК $u_k$: один соответствует продольным направлениям $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2,$ второй — поперечному направлению $O\tilde{x}_3$. Координаты $x_k$ и $\xi_i,$ как обычно в методе асимптотического осреднения [10–12], рассматриваются как независимые переменные.

Рассмотрим для КОК *трехмерную задачу линейной теории упругости,* состоящую из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешней и внутренней поверхностях пластины $\Sigma_{3\pm}$ (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и торцевой поверхности $\Sigma_T$, а также из граничных условий на поверхности контакта $\Sigma_S$ ($[u_i]$ — скачок функций):

$$\begin{aligned}
&\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right), \\
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\xi_I, \xi_3\right)\varepsilon_{kl}, \\
&\Sigma_{3\pm}\colon \; \sigma_{ij} n_j = -\kappa^3 p_\pm n_i, \;\; \Sigma_T\colon \; u_i = u_{ei}, \\
&\Sigma_S\colon \; [\sigma_{ij}] n_j = 0, \; [u_i] = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}$ — компоненты тензора деформаций; $u_j$ — компоненты вектора перемещений; $\nabla_j = \partial / \partial \tilde{x}_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координ-

натам; $C_{ijkl}(\xi_I, \xi_3)$ — компоненты тензора модулей упругости, который полагается зависящим от локальных координат $\xi_m$, причем по координатам $\xi_I$, $I = 1, 2$ тензор $C_{ijkl}(\xi_I, \xi_3)$ обладает периодичностью: $C_{ijkl}(\xi_I, \xi_3) = C_{ijkl}(\xi_I + n_I a_I, \xi_3)$, где $n_I$ — целые числа.

Примем основное допущение [20], состоящее в том, что давление $\tilde{p}_\pm$ на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости $O(\kappa^3)$ (т. е. $\tilde{p}_\pm = \kappa^3 p_\pm$). Это допущение, как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин. Никакого специального допущения об анизотропии материалов слоев пока не делаем, т. е. тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [15].

**Асимптотические разложения для упругой КОК.** Задача (2) содержит малый параметр $\kappa$ в граничных условиях (это коэффициент при давлении), поэтому ее решение будем искать в виде асимптотических разложений по параметру $\kappa$ в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi_I, \xi_3) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi_I, \xi_3) + \\ + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi_I, \xi_3) + \ldots \qquad (3)$$

Подставим разложения (3) в соотношения Коши в системе (2), используя при этом правила дифференцирования функций локальных координат [10–12] ($\partial/\partial\tilde{x}_j \to \partial/\partial x_j + (1/\kappa)\partial/\partial\xi_j$). Тогда получим асимптотическое разложение для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots \qquad (4)$$

В разложении (4)

$$\varepsilon_{IJ}^{(m)} = e_{IJ}^{(m)} + \frac{1}{2}\left(u_{I/J}^{(m+1)} + u_{J/I}^{(m+1)}\right), \quad \varepsilon_{I3}^{(m)} = e_{I3}^{(m)} + \frac{1}{2}\left(u_{I/3}^{(m+1)} + u_{3/I}^{(m+1)}\right),$$
$$\varepsilon_{33}^{(m)} = u_{3/3}^{(m+1)},$$

$$e_{IJ}^{(m)} = \frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(m)} + u_{J,I}^{(m)}\right), \quad e_{I3}^{(m)} = \frac{1}{2}u_{3,I}^{(m)}, \quad e_{33}^{(m)} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (5)$$

здесь обозначены производные по локальным координатам $u_{i/j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial\xi_j$ и по глобальным координатам $u_{i,J}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial x_J$.

Подставляя выражение (4) в закон Гука в системе (2), получаем асимптотическое разложение для напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa\sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{ij}^{(2)} + \ldots, \qquad (6)$$

где

$$\sigma_{ij}^{(m)} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{(m)},\ \ m = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,, \tag{7}$$

**Формулировка локальных задач.** Подставляя разложения (3), (4), (6) в уравнения равновесия и граничные условия системы (2), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\kappa}\sigma_{ij/j}^{(0)} + \left(\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \sigma_{ij/j}^{(1)}\right) + \kappa\left(\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \sigma_{ij/j}^{(2)}\right) + \kappa^2\left(\sigma_{iJ,J}^{(2)} + \sigma_{ij/j}^{(3)}\right) + \ldots = 0,\\
&\Sigma_{3\pm}:\ \ \sigma_{i3}^{(0)} + \kappa\sigma_{i3}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{i3}^{(2)} + \ldots = -\kappa^3 p_{\pm}\delta_{i3},\\
&\Sigma_{T}:\ \ u_i = u_i^{(0)} + \kappa u_i^{(1)} + \kappa^2 u_i^{(2)} + \kappa^3 u_i^{(3)} + \ldots = u_{ei}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Приравнивая в уравнениях равновесия члены при $\kappa^{-1}$ к нулю, а при остальных степенях от $\kappa$ к некоторым величинам $h_i^{(0)}$, $h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}$, не зависящим от $\xi_l$, получаем рекуррентную последовательность локальных задач:

- для нулевого приближения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij/j}^{(0)} = 0,\\
&\sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(0)},\\
&\varepsilon_{ij}^{(0)} = e_{ij}^{(0)} + \frac{1}{2}(u_{i/j}^{(1)} + u_{j/i}^{(1)}),\\
&\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3}^{(0)} = 0,\\
&\Sigma_{S}:\ [\sigma_{ij}^{(0)}]n_j = 0,\ [u_i^{(1)}] = 0,\\
&[[\sigma_{ij}^{(0)}]]n_j = 0,\ \ [[u_i^{(1)}]] = 0;\ \ \left\langle u_i^{(1)}\right\rangle = 0;
\end{aligned} \tag{9}$$

- для первого приближения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij/j}^{(1)} + \sigma_{iJ,J}^{(0)} = h_i^{(0)},\\
&\sigma_{ij}^{(1)} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(1)},\\
&\varepsilon_{ij}^{(1)} = e_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}(u_{i/j}^{(2)} + u_{j/i}^{(2)}),\\
&\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3}^{(1)} = 0,\\
&\Sigma_{S}:\ [\sigma_{ij}^{(1)}]n_j = 0,\ \ [u_i^{(2)}] = 0,\\
&[[\sigma_{ij}^{(1)}]]n_j = 0,\ \ [[u_i^{(2)}]] = 0;\ \ \left\langle u_i^{(2)}\right\rangle = 0;
\end{aligned} \tag{10}$$

- для второго приближения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij/j}^{(2)} + \sigma_{iJ,J}^{(1)} = h_i^{(1)},\\
&\sigma_{ij}^{(2)} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(2)},\\
&\varepsilon_{ij}^{(2)} = e_{ij}^{(2)} + \frac{1}{2}\left(u_{i/j}^{(3)} + u_{j/i}^{(3)}\right),\\
&\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3}^{(2)} = 0,\\
&\Sigma_S:\ [\sigma_{ij}^{(2)}]n_j = 0,\ [u_i^{(3)}] = 0,\\
&[[\sigma_{ij}^{(2)}]]n_j = 0,\ [[u_i^{(3)}]] = 0,\ \left\langle u_i^{(3)}\right\rangle = 0;
\end{aligned} \tag{11}$$

- для третьего приближения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij/j}^{(3)} + \sigma_{iJ,J}^{(2)} = h_i^{(2)},\\
&\sigma_{ij}^{(3)} = C_{ijKL}\varepsilon_{KL}^{(3)} + C_{ijk3}\varepsilon_{k3}^{(3)},\\
&\varepsilon_{IJ}^{(3)} = e_{IJ}^{(3)} + \frac{1}{2}\left(u_{I/J}^{(4)} + u_{J/I}^{(4)}\right),\\
&\varepsilon_{I3}^{(3)} = e_{I3}^{(3)} + \frac{1}{2}\left(u_{I/3}^{(4)} + u_{3/I}^{(4)}\right),\ \ \varepsilon_{33}^{(3)} = u_{3/3}^{(4)},\\
&\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3}^{(3)} = -p_{\pm}\delta_{i3},\\
&\Sigma_S:\ \ [\sigma_{ij}^{(3)}]n_j = 0,\quad [u_i^{(4)}] = 0,\\
&[[\sigma_{ij}^{(3)}]]n_j = 0,\ \ [[u_i^{(4)}]] = 0,\ \ \left\langle u_i^{(4)}\right\rangle = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

и т. д. Здесь обозначены операция осреднения по толщине и по ЯП пластины

$$\left\langle u_i^{(m)}\right\rangle = \int_{-0,5}^{0,5}\left\langle\left\langle u_i^{(m)}\right\rangle\right\rangle d\xi,\quad \left\langle\left\langle u_i^{(m)}\right\rangle\right\rangle = \int_{-a_1/2}^{a_1/2}\int_{-a_2/2}^{a_2/2} u_i^{(m)} d\xi_1 d\xi_2, \tag{13}$$

а также условия двумерной периодичности

$$[[u_i^{(m)}]] = 0 \Leftrightarrow \left\{ u_i^{(m)}\left(x_I, -\frac{a_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) = u_i^{(m)}\left(x_I, \frac{a_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right),\right.$$
$$\left. u_i^{(m)}\left(x_I, \xi_1, -\frac{a_2}{2}, \xi_3\right) = u_i^{(m)}\left(x_I, \xi_1, \frac{a_2}{2}, \xi_3\right)\right\}.$$

Уравнения равновесия (8) после введения функций $h_i^{(0)}$, $h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}$, принимают вид

$$h_i^{(0)} + \kappa h_i^{(1)} + \kappa^2 h_i^{(2)} + \ldots = 0. \tag{14}$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (9) являются функции $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$, они зависят от локальных координат $\xi_l$ и входных данных этой задачи — перемещений $u_j^{(0)}(x_I)$. Решением задачи (10) являются функции $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$, а $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ в этой задаче — входные данные. В задаче (11) функции $u_j^{(3)}, \varepsilon_{kl}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ — неизвестные, а $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ — входные данные и т. д.

**Выражения для функций $h_i^{(m)}$.** Проинтегрируем уравнения равновесия в системах (10)–(12) вместе с граничными условиями на $\xi = -0,5$, в результате получим:

$$\sigma_{i3}^{(1)} = -\int\limits_{-0,5}^{\xi} \left(\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \sigma_{iJ/J}^{(1)}\right) d\xi + h_i^{(0)}(\xi + 0,5), \tag{15}$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = -\int\limits_{-0,5}^{\xi} \left(\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \sigma_{iJ/J}^{(2)}\right) d\xi + h_i^{(1)}(\xi + 0,5), \tag{16}$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -p_{-}\delta_{i3} - \int\limits_{-0,5}^{\xi} \left(\sigma_{iJ,J}^{(2)} + \sigma_{iJ/J}^{(3)}\right) d\xi + h_i^{(2)}(\xi + 0,5). \tag{17}$$

Учтем теперь, что напряжения $\sigma_{i3}^{(1)}$, $\sigma_{i3}^{(2)}$, $\sigma_{i3}^{(3)}$, являющиеся решениями задач (10)–(12), удовлетворяют граничным условиям $\sigma_{i3}^{(1)} = 0$, $\sigma_{i3}^{(2)} = 0$, $\sigma_{i3}^{(3)} = -p_{+}$ на внешней поверхности при $\xi = 0,5$. Тогда, записывая соотношения (15)–(17) при $\xi = 0,5$ и затем интегрируя по ЯП, получим уравнения для вычисления функций $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$:

$$h_i^{(0)} = \left\langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \right\rangle + \int\limits_{-0,5}^{0,5} \left\langle\left\langle \sigma_{iJ/J}^{(1)} \right\rangle\right\rangle d\xi, \tag{18}$$

$$h_i^{(1)} = \left\langle \sigma_{iJ,J}^{(1)} \right\rangle + \int\limits_{-0,5}^{0,5} \left\langle\left\langle \sigma_{iJ/J}^{(2)} \right\rangle\right\rangle d\xi, \tag{19}$$

$$h_i^{(2)} = \left\langle \sigma_{iJ,J}^{(2)} \right\rangle + \int\limits_{-0,5}^{0,5} \left\langle\left\langle \sigma_{iJ/J}^{(3)} \right\rangle\right\rangle d\xi - \Delta p \delta_{i3}, \quad \Delta p = p_{+} - p_{-}. \tag{20}$$

Поскольку функции $\sigma_{iJ}^{(m)}$, являющиеся решением задачи (10), удовлетворяют условиям периодичности на границах ЯП, то

$$\left\langle\left\langle \sigma_{iJ/J}^{(m)} \right\rangle\right\rangle = \int\limits_{-a_1/2}^{a_1/2} \int\limits_{-a_2/2}^{a_2/2} \left(\sigma_{i1/1}^{(m)} + \sigma_{i2/2}^{(m)}\right) d\xi_1 d\xi_2 = \int\limits_{-a_2/2}^{a_2/2} \left[\sigma_{i1}^{(m)}\left(\frac{a_1}{2}\right) - \sigma_{i1}^{(m)}\left(-\frac{a_1}{2}\right)\right] d\xi_2 +$$
$$+ \int\limits_{-a_1/2}^{a_1/2} \left[\sigma_{i2}^{(m)}\left(\frac{a_2}{2}\right) - \sigma_{i2}^{(m)}\left(-\frac{a_2}{2}\right)\right] d\xi_1 = 0.$$

В результате получаем, что

$$h_i^{(0)} = \left\langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \right\rangle, \tag{21}$$

$$h_i^{(1)} = \left\langle \sigma_{iJ,J}^{(1)} \right\rangle, \tag{22}$$

$$h_i^{(2)} = \left\langle \sigma_{iJ,J}^{(2)} \right\rangle - \Delta p \delta_{i3}. \tag{23}$$

**Формальное решение локальных задач.** Формальное решение задачи (9) можно представить в виде линейной тензорной функции от входных данных задачи

$$u_i^{(1)} = N_{ipq}^{(1)}(\xi_m) e_{pq}^{(0)}(x_I), \tag{24}$$

где $N_{ipq}^{(1)}(\xi_m)$ — функции только локальных координат, являющиеся решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij(pq)/j}^{(0)} = 0, \\
&\sigma_{ij(pq)}^{(0)} = C_{ijpq} + C_{ijkl} N_{kpq/l}^{(1)}, \\
&\Sigma_{3\pm}\colon\ \sigma_{i3(pq)}^{(0)} = 0, \\
&\Sigma_S\colon\ [\sigma_{ij(pq)}^{(0)}] n_j = 0,\ \ [N_{ipq}^{(1)}] = 0, \\
&[[\sigma_{ij(pq)}^{(0)}]] n_j = 0,\quad [[N_{ipq}^{(1)}]] = 0,\quad \left\langle N_{ipq}^{(1)} \right\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{25}$$

причем напряжения $\sigma_{ij}^{(0)}$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij(pq)}^{(0)} e_{pq}^{(0)}. \tag{26}$$

Подставляя (24) в (5), вычисляем деформации $e_{ij}^{(1)}$:

$$e_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}\left( N_{ikl}^{(1)} e_{kl,j}^{(0)} + N_{jkl}^{(1)} e_{kl,i}^{(0)} \right) = \frac{1}{2}\left( N_{ikl}^{(1)} \delta_{mj} + N_{jkl}^{(1)} \delta_{mi} \right) e_{kl,m}^{(0)}. \tag{27}$$

Тогда решение задачи (10) первого приближения можно представить в виде линейных функций от $e_{pq,r}^{(0)}$:

$$u_i^{(2)} = N_{ipqr}^{(2)}(\xi_m) e_{pq,r}^{(0)}, \tag{28}$$

где $N_{ipqr}^{(2)}(\xi_m)$ — функции только локальных координат, являющиеся решением задачи

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij(pqr)/j}^{(1)} + \sigma_{ir(pq)}^{(0)} = \left\langle \sigma_{ir(pq)}^{(0)} \right\rangle, \\
&\sigma_{ij(pqr)}^{(1)} = C_{ijkr} N_{kpq}^{(1)} + C_{ijkl} N_{kpqr/l}^{(2)}, \\
&\Sigma_{3\pm}\colon \sigma_{i3(pqr)}^{(1)} = 0, \\
&\Sigma_S\colon\ [\sigma_{ij(pqr)}^{(1)}] n_j = 0,\ \ [N_{ipqr}^{(2)}] = 0, \\
&[[\sigma_{ij(pqr)}^{(1)}]] n_j = 0,\quad [[N_{ipqr}^{(2)}]] = 0,\quad \left\langle N_{ipqr}^{(2)} \right\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij(pqr)}^{(1)} e_{pq,r}^{(0)}. \tag{30}$$

Решение задачи (11) второго приближения можно представить в виде линейных функций от $e_{pq,rt}^{(0)}$:

$$u_i^{(3)} = N_{ipqrt}^{(3)}(\xi_m) e_{pq,rt}^{(0)}, \tag{31}$$

где $N_{ipqrt}^{(3)}(\xi_m)$ — функции только локальных координат, являющиеся решением задачи

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij(pqrt)/j}^{(2)} + \sigma_{it(pqr)}^{(1)} = \left\langle \sigma_{it(pqr)}^{(1)} \right\rangle, \\
&\sigma_{ij(pqrt)}^{(2)} = C_{ijkt} N_{kpqr}^{(2)} + C_{ijkl} N_{kpqrt/l}^{(3)}, \\
&\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3(pqrt)}^{(2)} = 0, \\
&\Sigma_S:\ [\sigma_{ij(pqrt)}^{(2)}] n_j = 0, \quad [N_{ipqrt}^{(3)}] = 0, \\
&[[\sigma_{ij(pqrt)}^{(2)}]] n_j = 0, \quad [[N_{ipqrt}^{(3)}]] = 0, \quad \left\langle N_{ipqrt}^{(3)} \right\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(2)}$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij(pqrt)}^{(2)} e_{pq,rt}^{(0)}. \tag{33}$$

Решение задачи (12) третьего приближения можно представить в виде линейных функций от $e_{pq,rtu}^{(0)}$ и $p_+$, $p_-$:

$$u_i^{(4)} = N_{ipqrtu}^{(4)}(\xi_m) e_{pq,rtu}^{(0)} + O_i^+ p_+ + O_i^- p_-, \tag{34}$$

где $N_{ipqrtu}^{(4)}(\xi_m), O_i^+, O_i^-$ — функции только локальных координат, являющиеся решением задач

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij(pqrtu)/j}^{(3)} + \sigma_{iu(pqrt)}^{(2)} = \left\langle \sigma_{iu(pqrt)}^{(2)} \right\rangle, \\
&\sigma_{ij(pqrtu)}^{(3)} = C_{ijku} N_{kpqrt}^{(3)} + C_{ijkl} N_{kpqrtu/l}^{(4)}, \\
&\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3(pqrtu)}^{(3)} = 0, \\
&\Sigma_S:\ [\sigma_{ij(pqrtu)}^{(3)}] n_j = 0, \quad [N_{ipqrtu}^{(4)}] = 0, \\
&[[\sigma_{ij(pqrtu)}^{(3)}]] n_j = 0, \quad [[N_{ipqrtu}^{(4)}]] = 0, \quad \left\langle N_{ipqrtu}^{(4)} \right\rangle = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

и

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij\pm/j}^{(3)} = 0, \\
&\sigma_{ij\pm}^{(3)} = C_{ijkl} O_{k/l}^{\pm}, \\
&\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3\pm}^{(3)} = -p_{\pm}\delta_{i3}, \\
&\Sigma_S:\ [\sigma_{ij\pm}^{(3)}] n_j = 0, \quad [O_k^{\pm}] = 0, \\
&\left[ [\sigma_{ij\pm}^{(3)}] \right] n_j = 0, \quad \left[ [O_k^{\pm}] \right] = 0, \quad \left\langle O_k^{\pm} \right\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(3)}$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \sigma_{ij(pqrtu)}^{(3)} e_{pq,rtu}^{(0)} + \sigma_{ij+}^{(3)} p_{+} + \sigma_{ij-}^{(3)} p_{-}. \tag{37}$$

**Осредненные уравнения равновесия многослойных пластин.** Подставляя выражения (21)–(23) в асимптотическое разложение (14) уравнений равновесия, получим осредненные уравнения равновесия пластины

$$\left\langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \right\rangle + \kappa \left\langle \sigma_{iJ,J}^{(1)} \right\rangle + \kappa^2 \left( \left\langle \sigma_{iJ,J}^{(2)} \right\rangle - \Delta p \delta_{i3} \right) + ... = 0. \tag{38}$$

Домножим исходные уравнения равновесия системы (8) при $i = I$ на $\xi\kappa$ и применим к ним операцию осреднения (13). Тогда, учитывая, что $\sigma_{ij/j}^{(0)} = 0,$ получим следующее вспомогательное уравнение:

$$\kappa \left( \left\langle \xi \sigma_{IJ,J}^{(0)} \right\rangle - \left\langle \sigma_{I3}^{(1)} \right\rangle \right) + \kappa^2 \left( \left\langle \xi \sigma_{IJ,J}^{(1)} \right\rangle - \left\langle \sigma_{I3}^{(2)} \right\rangle \right) + ... = 0, \tag{39}$$

Здесь учтено, что

$$\left\langle \xi \sigma_{ij/j}^{(1)} \right\rangle = \int_{-0,5}^{0,5} \xi \left\langle \left\langle \sigma_{iJ/J}^{(1)} \right\rangle \right\rangle d\xi + \left\langle \xi \sigma_{i3/3}^{(1)} \right\rangle = -\left\langle \sigma_{i3}^{(1)} \right\rangle, \ \left\langle \xi \sigma_{ij/j}^{(2)} \right\rangle = -\left\langle \sigma_{i3}^{(2)} \right\rangle.$$

так как на $\Sigma_{3\pm}$: $\sigma_{i3}^{(1)} = 0$ и $\sigma_{i3}^{(2)} = 0.$

Введем обозначения для усилий $T_{IJ}$, моментов $M_{IJ}$ и перерезывающих сил $Q_I$ в пластине

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \left\langle \sigma_{IJ}^{(0)} \right\rangle + \kappa \left\langle \sigma_{IJ}^{(1)} \right\rangle + ..., \\ M_{IJ} &= \kappa \left\langle \xi \sigma_{IJ}^{(0)} \right\rangle + \kappa^2 \left\langle \xi \sigma_{IJ}^{(1)} \right\rangle + ..., \\ Q_I &= \left\langle \sigma_{I3}^{(0)} \right\rangle + \kappa \left\langle \sigma_{I3}^{(1)} \right\rangle + \kappa^2 \left\langle \sigma_{I3}^{(2)} \right\rangle + ... . \end{aligned} \tag{40}$$

Тогда уравнения (38), (39) можно записать в традиционном виде уравнений равновесия и уравнений моментов

$$T_{IJ,J} = 0, \quad M_{IJ,J} - Q_I = 0, \quad Q_{I,I} = \Delta \bar{p}. \tag{41}$$

Это и есть искомые осредненные уравнения равновесия многослойной пластины, здесь обозначено $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p.$

**Осредненные определяющие соотношения.** Подставляя выражения (26), (30) для напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}, \sigma_{IJ}^{(1)}$ в интегралы формул (40) и удерживая только те старшие члены разложений, которые указаны в этих формулах (40), получаем

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJPQ} e_{PQ}^{(0)} + \bar{C}_{IJP} e_{P3}^{(0)} + K_{IJPQM} e_{PQ,M}^{(0)} + K_{IJPM} e_{P3,M}^{(0)}, \tag{42}$$

$$M_{IJ} = \bar{B}_{IJPQ} e^{(0)}_{PQ} + \bar{B}_{IJP} e^{(0)}_{P3} + D_{IJPQM} e^{(0)}_{PQ,M} + D_{IJPM} e^{(0)}_{P3,M}, \qquad (43)$$

$$Q_I = L_{IPQ} e^{(0)}_{PQ} + L_{IP} e^{(0)}_{P3} + J_{IPQM} e^{(0)}_{PQ,M} + J_{IPM} e^{(0)}_{P3,M} + \kappa^2 \left\langle \sigma^{(2)}_{I3} \right\rangle. \qquad (44)$$

где обозначены тензоры осредненных упругих констант композитной пластины

$$\begin{aligned}
&\bar{C}_{IJPQ} = \left\langle \sigma^{(0)}_{IJ(PQ)} \right\rangle, && \bar{C}_{IJP} = \left\langle \sigma^{(0)}_{IJ(P3)} \right\rangle, \\
&K_{IJPQM} = \kappa \left\langle \sigma^{(1)}_{IJ(PQM)} \right\rangle, && K_{IJPM} = \kappa \left\langle \sigma^{(1)}_{IJ(P3M)} \right\rangle, \\
&\bar{B}_{IJPQ} = \kappa \left\langle \xi \sigma^{(0)}_{IJ(PQ)} \right\rangle, && \bar{B}_{IJP} = \kappa \left\langle \xi \sigma^{(0)}_{IJ(P3)} \right\rangle, \\
&D_{IJPQM} = \kappa^2 \left\langle \xi \sigma^{(1)}_{IJ(PQM)} \right\rangle, && D_{IJPM} = \kappa^2 \left\langle \xi \sigma^{(1)}_{IJ(P3M)} \right\rangle, \\
&L_{IPQ} = \left\langle \sigma^{(0)}_{I3(PQ)} \right\rangle, && L_{IP} = \left\langle \sigma^{(0)}_{I3(P3)} \right\rangle, \\
&J_{IPQM} = \kappa \left\langle \sigma^{(1)}_{I3(PQM)} \right\rangle, && J_{IPM} = \kappa \left\langle \sigma^{(1)}_{I3(P3M)} \right\rangle.
\end{aligned} \qquad (45)$$

**Осредненные кинематические соотношения.** В систему осредненных определяющих соотношений (42)–(44) входят деформации срединной поверхности $e^{(0)}_{IJ}$, углы поворота нормали к срединной поверхности $\gamma_P = e^{(0)}_{P3}$, кривизны $\eta_{PM} = e^{(0)}_{P3,M}$ и градиенты деформаций $e^{(0)}_{KL,N}$, которые зависят от функций $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$ глобальных переменных $x_I$,

$$\begin{aligned}
&e^{(0)}_{IJ} = \frac{1}{2}\left( u^{(0)}_{I,J} + u^{(0)}_{J,I} \right), \\
&\gamma_P = e^{(0)}_{P3} = \frac{1}{2} u^{(0)}_{3,P}, \\
&\eta_{PM} = e^{(0)}_{P3,M} = \frac{1}{2} u^{(0)}_{3,PM}, \\
&e^{(0)}_{KL,N} = \frac{1}{2}\left( u^{(0)}_{K,LN} + u^{(0)}_{L,KN} \right).
\end{aligned} \qquad (46)$$

**Осредненная система уравнений для пластин.** Подставляя далее выражения (46) и (42)–(44) в систему (41), получаем систему трех уравнений (после исключения из них $Q_I$) относительно трех неизвестных функций $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$

$$\begin{aligned}
&\bar{C}_{IJPQ} u^{(0)}_{P,QJ} + \bar{C}_{IJP} u^{(0)}_{3,PJ} + K_{IJPQM} u^{(0)}_{P,QMJ} + K_{IJPM} u^{(0)}_{3,PMJ} = 0, \\
&\bar{B}_{IJPQ} u^{(0)}_{P,QJI} + \bar{B}_{IJP} u^{(0)}_{3,PJI} + D_{IJPQM} u^{(0)}_{P,QMJI} + D_{IJPM} u^{(0)}_{3,PMJI} = \Delta \bar{p}.
\end{aligned} \qquad (47)$$

Эта система имеет четвертый порядок относительно прогиба $u_3^{(0)}$, как в классической теории пластин Кирхгофа – Лява, и третий порядок производных относительно продольных перемещений $u_I^{(0)}$, чем отличается от теории Кирхгофа – Лява.

**Вычисление эффективных характеристик пластины.** Эффективные упругие характеристики пластины $\bar{C}_{IJPQ}$, $\bar{C}_{IJP}$, $K_{IJPQM}$, $K_{IJPM}$, $\bar{B}_{IJPQ}$, $\bar{B}_{IJP}$, $D_{IJPQM}$, $D_{IJPM}$ — тензоры, входящие в определяющие соотношения (42), (43), вычисляются по формулам (45). Предварительно должны быть решены локальные задачи нулевого и первого уровней, с помощью которых вычисляем поля тензоров $\sigma_{ij(pq)}^{(0)}$ и $\sigma_{ij(pqr)}^{(1)}$.

**Напряжения в пластине.** После решения осредненной системы уравнений (47) можно вычислить поля напряжений в пластине, для этого используем формулы (6), (26). При этом для напряжений $\sigma_{IJ}$ достаточно сохранить лишь члены нулевого и первого приближений, для сдвиговых напряжений $\sigma_{I3}$ необходимо сохранить члены до второго порядка точности, а для поперечного напряжения $\sigma_{33}$ — члены до третьего порядка точности включительно:

$$\begin{aligned}
\sigma_{IJ} &= \sigma_{IJ(pq)}^{(0)} e_{pq}^{(0)} + \kappa\sigma_{IJ(pqr)}^{(1)} e_{pq,r}^{(0)},\\
\sigma_{I3} &= \sigma_{I3(pq)}^{(0)} e_{pq}^{(0)} + \kappa\sigma_{I3(pqr)}^{(1)} e_{pq,r}^{(0)} + \kappa^2\sigma_{I3(pqrt)}^{(2)} e_{pq,rt}^{(0)},\\
\sigma_{33} &= \sigma_{33(pq)}^{(0)} e_{pq}^{(0)} + \kappa\sigma_{33(pqr)}^{(1)} e_{pq,r}^{(0)} + \kappa^2\sigma_{33(pqrt)}^{(2)} e_{pq,rt}^{(0)} +\\
&\quad + \kappa^3\left(\sigma_{33(pqrtu)}^{(3)} e_{pq,rtu}^{(0)} + \sigma_{33+}^{(3)} p_+ + \sigma_{33-}^{(3)} p_-\right).
\end{aligned} \tag{48}$$

**Алгоритм численного решения локальных задач.** Для решения локальных задач нулевого приближения (25) приме́ним вариант метода конечного элемента, разработанный в [14–19]. Решение этих задач на ЯП строится как продолжение решения задач на части ЯП $\tilde{V}_\xi$: для ЯП, периодической по трем координатным направлениям, $\tilde{V}_\xi$ — это 1/8 ЯП, а для ЯП, периодической по двум направлениям, $\tilde{V}_\xi$ — это 1/4 ЯП, т. е. $\tilde{V}_\xi = \left\{0 < \xi_1 < \frac{a_1}{2},\ 0 < \xi_2 < \frac{a_2}{2},\ -\frac{1}{2} < \xi_3 < \frac{1}{2}\right\}$.

Решение $N_{kpq}^{(1)}(\xi_I, \xi_3)$ задачи (25) в $\tilde{V}_\xi$ ищем в виде

$$N_{kpq}^{(1)}(\xi_I, \xi_3) = -\frac{1}{2}(\delta_{kp}\xi_q + \delta_{kq}\xi_p) + \tilde{N}_{kpq}^{(1)}(\xi_I, \xi_3), \tag{49}$$

где $\tilde{N}_{kpq}^{(1)}(\xi_I, \xi_3)$ — функции, удовлетворяющие краевой задаче теории упругости на $\tilde{V}_\xi$

$$\begin{aligned}
&\sigma^{(0)}_{ij(pq)/j} = 0,\\
&\sigma^{(0)}_{ij(pq)} = C_{ijkl}\tilde{N}^{(1)}_{kpq/l},\\
&\Sigma_{3\pm}:\ \sigma^{(0)}_{i3(pq)} = 0,\\
&\Sigma_S:\ [\sigma^{(0)}_{ij(pq)}]n_j = 0,\ [\tilde{N}^{(1)}_{ipq}] = 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Система (50) дополняется специальными граничными условиями на торцевых поверхностях $\Sigma'_s = \{\xi_s = 0,5\}$ 1/4 ЯП:

$$\begin{aligned}
&\text{на } \Sigma'_p:\ U_{p(pp)} = \frac{1}{2},\ U_{i(pp)/p} = 0,\ \ i \neq p,\\
&\text{на } \Sigma'_q:\ U_{i(pp)/q} = 0,\ U_{q(pp)} = 0,\ i \neq p \neq q,\ \ p, q = 1, 2,\\
&\text{на } \Sigma'_j:\ U_{i(pq)} = \frac{1}{4}\delta_{ip},\ U_{j(pq)/j} = 0,\\
&\qquad U_{k(pq)} = 0,\ \ i \neq j \neq k \neq i,\ \ i, j = \{p, q\},\\
&\text{на } \Sigma'_k:\ U_{i(pq)/k} = 0,\ U_{j(pq)/k} = 0,\ U_{k(pq)} = 0,\ i \neq j \neq k \neq i,\ \ p \neq q.
\end{aligned} \tag{51}$$

Граничные условия на плоскостях симметрии $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$ имеют вид, аналогичный соотношениям (51), в которых следует положить $U_{p(pp)} = 0,\ U_{i(pq)} = 0$. Задачи (50), (51) назовем локальными задачами $L_{pq}$. В отличие от аналогичных трехмерных локальных задач, число которых равно 6 [13–16], для двумерной ЯП число этих задач с ненулевым решением равно 5, так как задача $L_{33}$ имеет тождественно нулевое решение. Кроме того, в отличие от трехмерных задач $L_{pq}$ граничные условия на поверхностях $\Sigma_{3\pm} = \{\xi_3 = \pm 0,5\}$ соответствуют свободным от нагрузок поверхностям.

Для определения компонент тензора эффективных модулей упругости композита $\bar{C}_{ijpq}$ используем формулы (45). После расчета тензора модулей упругости $\bar{C}_{ijpq}$ рассчитывается эффективный тензор упругих податливостей $\bar{\Pi}_{ijpq}$, являющийся обратным к $\bar{C}_{ijpq}$. В результате находим девять технических упругих констант композита: $\bar{E}_\alpha = 1/\bar{\Pi}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$ — эффективные модули Юнга; $\bar{\nu}_{\alpha\beta} = -\bar{\Pi}_{\alpha\alpha\beta\beta}E_\alpha$ — эффективные коэффициенты Пуассона; $\bar{G}_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta\alpha\beta}$ — эффективные модули сдвига.

**Тензоры концентрации напряжений.** Выделим в выражениях (48) для напряжений $\sigma_{IJ}$ и $\sigma_{I3}$ члены при нулевой степени $\kappa$:

$$\sigma^0_{IJ} = \sigma^{(0)}_{IJ(pq)}e^{(0)}_{pq},\quad \sigma^0_{I3} = \sigma^{(0)}_{I3(pq)}e^{(0)}_{pq}. \tag{52}$$

Эти выражения характеризуют напряженное состояние в компонентах пластины, вызванное продольным растяжением (описывается компонентами $e_{11}^{(0)}$, $e_{22}^{(0)}$), продольным сдвигом (описывается компонентой $e_{12}^{(0)}$) и межслоевыми сдвигами (описывается компонентами $e_{13}^{(0)}$, $e_{23}^{(0)}$). Члены в (48) при первой степени $\kappa$ характеризуют напряженное состояние, вызванное изгибом пластины.

Выделим подобным образом в (42), (44) части усилий и перерезывающих сил, вызванные растяжением, продольным и межслоевыми сдвигами:

$$T_{IJ}^0 = \bar{C}_{IJPQ} e_{PQ}^{(0)} + \bar{C}_{IJP} e_{P3}^{(0)}, \quad Q_I^0 = L_{IPQ} e_{PQ}^{(0)} + L_{IP} e_{P3}^{(0)}. \tag{53}$$

Формулы, обратные к (53), имеют следующий вид:

$$e_{PQ}^{(0)} = R_{PQIJ} T_{IJ}^0 + R_{PQI} Q_I^0, \quad e_{P3}^{(0)} = \bar{R}_{PIJ} T_{IJ}^0 + R_{PI} Q_I^0, \tag{54}$$

где

$$\begin{aligned} &R_{PQIJ} = \left(\bar{C}_{IJPQ} - \bar{C}_{IJM} L_{MN}^{-1} L_{NPQ}\right)^{-1}, \quad R_{PQI} = R_{PQMN} C_{MNJ} L_{JI}^{-1}, \\ &R_{PI} = L_{PI}^{-1} + L_{PJ}^{-1}\ L_{JKQ} R_{KQMN} C_{MNS} L_{SI}^{-1}, \quad \bar{R}_{PIJ} = L_{PS}^{-1} L_{SKQ} R_{KQIJ}. \end{aligned} \tag{55}$$

С помощью формул (52) и (54) можно связать пять напряжений $\sigma_{IJ}^0$ и $\sigma_{I3}^0$ с пятью компонентами $T_{PQ}^0$, $Q_P^0$:

$$\sigma_{IJ}^0 = B_{IJPQ} T_{PQ}^0 + B_{IJP} Q_P^0, \quad \sigma_{I3}^0 = \bar{B}_{IPQ} T_{PQ}^0 + B_{IP} Q_P^0, \tag{56}$$

где обозначены компоненты тензоров концентрации напряжений

$$\begin{aligned} &B_{IJPQ} = \sigma_{IJ(MN)}^{(0)} R_{MNPQ} + \sigma_{IJ(M3)}^{(0)} \bar{R}_{MPQ}, \\ &B_{IJP} = \sigma_{IJ(MN)}^{(0)} R_{MNP} + \sigma_{IJ(M3)}^{(0)} R_{MP}, \\ &\bar{B}_{IPQ} = \sigma_{I3(MN)}^{(0)} R_{MNPQ} + \sigma_{I3(M3)}^{(0)} \bar{R}_{MPQ}, \\ &B_{IP} = \sigma_{I3(MN)}^{(0)} R_{MNP} + \sigma_{I3(M3)}^{(0)} R_{MP}. \end{aligned} \tag{57}$$

**Результаты численного моделирования.** По разработанному методу были проведены серии численных расчетов микронапряжений и эффективных упруго-прочностных характеристик конструктивно-ортотропной пластины, имеющей структуру сотового заполнителя, материал сот которого образован стеклотканью (см. рис. 1).

В расчетах параметрически изменялся размер ячейки сот, характеризуемый коэффициентом $\varphi_S = 1-(1-h_S/a)^2$ — содержанием стенок сот в общем объеме одной ячейки соты (где $h_S$ — толщина стенки сот; $a$ — длина стороны одной ячейки соты). Были рассмотрены

значения $\varphi_S$ в широком диапазоне — от 0,02 до 0,9. Материал стенки сот — квазитрансверсально-изотропный [22, 23] тканевый стеклопластик (свойства стеклопластика по основе и утку совпадают) эпоксифенольного типа со следующими характеристиками:

$$E_n = 9{,}078 \text{ ГПа},\ E_\tau = 25{,}394 \text{ ГПа},\ \nu_n = 0{,}169,$$
$$\nu_\tau = 0{,}114,\ G_n = 2{,}205 \text{ ГПа},\ G_\tau = 3{,}253 \text{ ГПа},$$

где $E_n$ — модуль упругости в направлении, поперечном к слоям ткани; $E_\tau$ — модуль упругости в плоскости ткани; $\nu_n$ — поперечный коэффициент Пуассона; $\nu_\tau$ — продольный коэффициент Пуассона, $G_n$ — поперечный модуль сдвига; $G_\tau$ — модуль сдвига в плоскости ткани.

Главные оси $O\xi_i^h$ трансверсальной изотропии материала стенки сот ориентированы по направлениям самого сотового заполнителя, причем $O\xi_3^h = O\xi_3$. С помощью упругих характеристик $E_n$, $E_\tau$, $\nu_n$, $\nu_\tau$, $G_n$, $G_\tau$ вычислялись компоненты тензора упругих податливостей $\Pi_{ijkl}^h$ сотового заполнителя в системе координат $O\xi_i^h$, далее определялись компоненты тензора модулей упругости $C_{ijkl}^h = (\Pi_{ijkl}^h)^{-1}$ в системе координат $O\xi_i^h$, а затем рассчитывались компоненты этого тензора $C_{ijkl}(\xi_I)$ в системе координат $O\xi_i$, повернутой относительно осей $O\xi_i^h$.

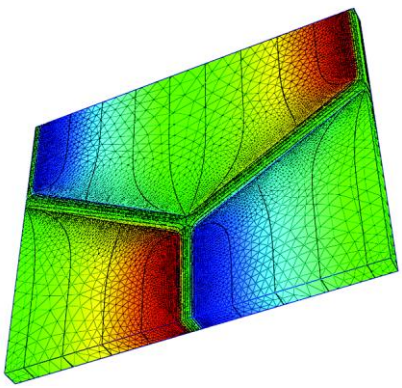


**Рис. 2.** Конечно-элементная сетка для ЯП конструктивно-ортотропной пластины с сотовым заполнителем

На рис. 2 показана конечно-элементная сетка, использованная при численном решении локальных задач. Сетка строилась как для самого сотового заполнителя, так и для фиктивного материала, заполняющего поры конструкции. На рис. 3 представлены картины распределения некоторых коэффициентов концентрации напряжений $B_{IJPQ}$ и $B_{IP}$, рассчитанные с помощью разработанного метода, для сотового заполнителя со значением параметра $\varphi_S = 0{,}1$. Максимальные по абсолютной величине значения коэффициентов концентрации достигаются в зонах искривления сотового заполнителя, эти же зоны являются наиболее опасными с точки зрения нарушения прочности заполнителя при продольном растяжении-сжатии или продольном сдвиге конструктивно-ортотропной пластины.

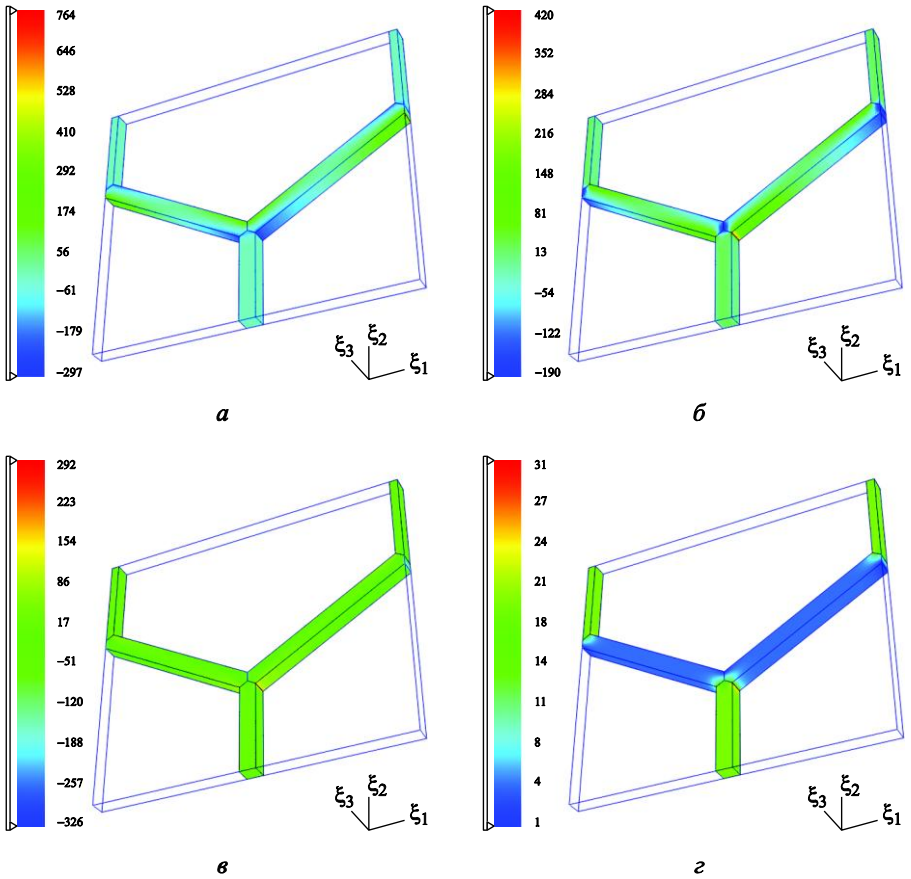



**Рис. 3.** Картины распределения коэффициентов концентрации напряжений $B_{1111}$ (*а*), $B_{1212}$ (*б*), $B_{2222}$ (*в*) и $B_{22}$ (*г*) в ЯП конструктивно-ортотропной пластины из стеклопластикового сотового заполнителя с $\varphi_S = 0{,}1$

По разработанной методике получены следующие **значения эффективных упругих характеристик сотового заполнителя на основе стеклоткани с коэффициентом $\varphi_S = 0{,}1$**:

Модуль упругости, МПа
- $\bar{E}_1$ (в плоскости заполнителя)..... 34,345
- $\bar{E}_2$ (в плоскости заполнителя)..... 34,346
- $\bar{E}_3$ (поперечный) ..... 2540,09

Коэффициент Пуассона:
- $\bar{\nu}_{12}$ (продольный) ..... 0,9739
- $\bar{\nu}_{13}$ (поперечный)..... 0,0017
- $\bar{\nu}_{23}$ (поперечный) ..... 0,0017
- $\bar{\nu}_{21}$ (продольный) ..... 0,9739
- $\bar{\nu}_{31}$ (поперечный) ..... 0,1239
- $\bar{\nu}_{32}$ (поперечный) ..... 0,1239

Модуль сдвига, МПа:
- $\bar{G}_{12}$ ..... 8,699
- $\bar{G}_{13}$ ..... 169,387
- $\bar{G}_{23}$ ..... 169,386

Результаты расчетов показывают, что эффективные упругие модули сотового заполнителя в плоскости заполнителя и в поперечном направлении, а также модули сдвига $\bar{G}_{12}$ и $\bar{G}_{I3}$ различаются почти на два порядка, также существенно различаются продольные и поперечные коэффициенты Пуассона $\bar{\nu}_{12}$ и $\bar{\nu}_{13}$, $\bar{\nu}_{23}$: значения коэффициента $\bar{\nu}_{12}$ близки к единице, а значения $\bar{\nu}_{13}$, $\bar{\nu}_{23}$ — к нулю. Разработанный вычислительный метод позволяет рассчитывать эффективные характеристики конструктивно-ортотропных пластин с существенно различными значениями характеристик по разным направлениям.

**Выводы.** Предложена асимптотическая теория тонких конструктивно-ортотропных пластин, обладающих двухпериодической структурой. Теория основана на выводе уравнений теории пластин из общих уравнений трехмерной теории упругости с помощью асимптотических разложений по малому параметру, представляющему собой отношение толщины пластины к характерной длине, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине.

Выведены рекуррентные последовательности локальных задач для нахождения напряжений во всех конструктивных элементах пластины. Показано, что глобальная задача теории изгиба пластин близка к задаче изгиба пластин Кирхгофа – Лява, но отличается от нее наличием третьего порядка производных от продольных перемещений пластины. Предложенный метод позволяет вычислить все шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига.

Пример конечно-элементного решения локальных задач нулевого приближения для сотовой конструкции показал, что разработанный метод расчета пластин и его численная реализация достаточно эффективны. Они позволяют проводить расчеты для сложных конструктивно-ортотропных пластин с сильно различающимися значениями упругих характеристик.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.

[2] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Изв. РАН. МТТ*, 2006, № 6, с. 71–79.

[3] Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины. *Вычислительная механика сплошной среды*, 2011, т. 4, № 2, с. 128–139.

[4] Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *ПММ*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.

[5] Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит. *ПММ*, 2003, т. 67, вып. 3, с. 472–483.

[6] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.

[7] Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине. *Докл. АН СССР*, 1987, т. 294, № 5, с. 1061–1065.

[8] LevinskiT., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore; London: World Sci. Publ., 2000, 739 p.

[9] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004, 228 p.

[10] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 336 с.

[11] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[12] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир,1984, 472 с.

[13] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.В. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.

[14] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 2, с. 57–67.

[15] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Численное моделирование композиционных материалов с многоуровневой структурой. *Изв. РАН. Серия физическая*, 2011, т. 75, № 11, с. 1549–1554.

[16] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Об упругих свойствах композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2009, т. 21, № 4, с. 96–110.

[17] Dimitrienko Yu.I. A structural thermomechanical model of textile composite materials at high temperatures. *Composite science and technologies*, 1999, vol. 59, pp. 1041–1053.

[18] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П. Численное моделирование микроразрушения и прочностных характеристик пространственно-армированных композитов. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2013, т. 19, № 3, с. 365–383.

[19] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Шпакова Ю.В. Численное моделирование процессов разрушения тканевых композитов. *Вычислительная механика сплошной среды*, 2013, т. 6, № 4, с. 389–402. doi: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.43

[20] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.

[21] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html

[22] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1: Тензорный анализ.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.
[23] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4: Основы механики твердого тела.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

Статья поступила в редакцию 06.03.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–56.

**Димитриенко Юрий Иванович** родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана; заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 270 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

**Губарева Елена Александровна** родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 15 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов.
e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

**Сборщиков Сергей Васильевич** родился в 1989 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 12 научных работ в области вычислительной механики композитов. e-mail: servasbor@gmail.com

# Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, S.V. Sborschikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The theory of thin constructive-orthotropic plates with a two-periodic structure was suggested. Examples of such structures are honeycomb sandwich panels and backed plates. The theory is based on equations of a three-dimensional elasticity theory with the help of asymptotic expansions in terms of a small parameter being the ratio of a plate thickness and a characteristic length without introducing any hypotheses on a distribution character for displacements and stresses through the thickness. Local problems were formulated for finding stresses in all structural elements of a plate. It was shown that the global (averaged by the certain rules) equations of the plate theory are similar to equations of the*

*Kirchhoff-Love plate theory, but they differs by a presence of three-order derivatives of longitudinal displacements. The method developed allows to calculate all 6 components of the stress tensor including transverse normal stresses and stresses of interlayer shear. For this, local problems should be solved numerically up to the third approximation. The example was demonstrated for finite-element solving the local problems of the zero approximation for a cellular structure, which showed that the developed method for plate calculation and its numerical realization are sufficiently effective - they allow us to conduct computations for complex constructive-orthotropic plates with very different values of elastic characteristics.*

***Keywords:*** *multilayer plates, two-periodic structure, honeycomb sandwich panels constructive-orthotropic plates, two-periodic structure, asymptotic expansions, local problems.*

## REFERENCES

[1] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov – Composite Mechanics and Design,* 1988, no. 4, pp. 698–704.

[2] Sheshenin S.V. *Izv. RAN. MTT — Proc. of the Russ. Acad. Sci. Mech. Rigid Body,* 2006, no. 6, pp. 71–79.

[3] Sheshenin S.V., Khodos O.A. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnoi sredy — Computational Continuum Mechanics,* 2011, vol. 4, no. 2, pp. 128–139.

[4] Zveryaev E.M., Makarov G.I. *PMM — J. Appl. Math. Mech.,* 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 308–321.

[5] Zveriaev E. M. *PMM — J. Appl. Math. Mech*., 2003, vol. 67, iss. 3, pp. 472–483.

[6] Kohn R.V., Vogelyus M. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.

[7] Panasenko G.P., Reztsov M.V. *Dokl. AN SSSR — Reports of Acad. Sci. USSR,* 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065.

[8] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization.* Singapore, London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.

[9] Kolpakov A. G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 228 p.

[10] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov MSU Publ., 1984, 336 p.

[11] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging of processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984.

[12] Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-uniform media and theory of oscillations]. Moscow, Mir Publ., 1984.

[13] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye Nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Natural Science Series,* 2002, no. 2.

[14] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Natural Science Series,* 2008, no. 2, pp. 57–67.

[15] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Izvestiya Rossiyskoi akademii nauk. Seriya fizicheskaya – Proc. Russ. Acad. Sci.,* 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1549–1554.

[16] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Modeling*, 2009, vol .21, no. 4, pp. 96–110.
[17] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Natural Science Series*, 2008, no. 2, pp. 57–67.
[18] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy — Composite Mechanics and design*, 2013, vol. 19, no. 3, pp. 365–383.
[19] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P., Shpakova Yu.V. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnoi sredy — Computational continuum mechanics*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 389–402. doi: 10.7242/1999–6691/2013.6.4.43
[20] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Natural Science Series*, 2012, no. 3, pp. 86–100.
[21] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html
[22] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum mechanics]. Vol. 1. Tenzornyi analiz [Tensor analysis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 367 p.
[23] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum mechanics]. Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela [Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013, 624 p.

**Dimitrienko Yu.I.** (b.1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys. & Math.), professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of the Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University; Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 250 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

**Gubareva E.A.** (b.1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Ph. D. (Phys. & Math.), associated professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, of Bauman Moscow State Technical University; Author of over 15 publications in the field of continuum mechanics, trybology, mathematical modeling and composite mechanics. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

**Sborschikov S.V.** (b. 1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. A postgraduate at the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman MSTU. Author of 12 publications in the field of computational mechanics of composites. e-mail: servasbor@gmail.com