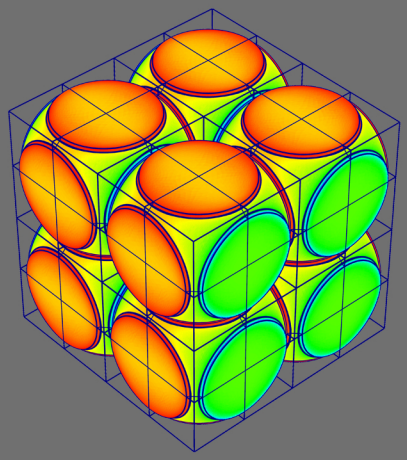
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Плюснин А.В. Математические методы оптимального выбора линейно нарастающих по времени массорасходных характеристик энергоустройств, обеспечивающих газодинамический выброс летательных аппаратов с заданными параметрами. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 1, с. 57–85.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/200/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.187
14.11.2026 07:38:15

УДК 629.762 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-3-5785

Математические методы оптимального выбора линейно нарастающих по времени массорасходных характеристик энергоустройств, обеспечивающих газодинамический выброс летательного аппарата с заданными параметрами

© А.В. Плюснин[1,2]

[1]Акционерное общество «Военно-промышленная корпорация «Научно-производствнное объединение машиностроения», Реутов, 143966, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,105005, Россия

Предложена теория оптимального выбора линейно нарастающих по времени массорасходных характеристик энергоустройств, предназначенных для газодинамического выброса летательного аппарата из пускового контейнера при заданных ограничениях на параметры, а также теория оптимального выбора геометрических параметров многошашечного трубчатого заряда для реализации этих характеристик. Представлена наглядная геометрическая интерпретация теоретических построений, а их практическая реализуемость подтверждена расчетами параметров газодинамического выброса и внутренней баллистики.

Ключевые слова: *газодинамический выброс, пусковой контейнер, летательный аппарат, твердое топливо, трубчатый заряд*

Введение. Энергоустройства (ЭУ) на твердом топливе (например, ракетные двигатели, газогенераторы) находят широкое практическое применение и активно совершенствуются по целому ряду направлений [1–5]. Среди важнейших задач — улучшение качеств существующих и разработка новых химических составов твердого топлива в соответствии с теми или иными потребностями. Для решения этих задач принципиальное значение имеют теоретические и экспериментальные исследования собственно механизмов горения твердого топлива [1, 6–10]. Исключительно важны также технологическая и эксплуатационная стороны вопроса [1, 2, 11, 12].

Ракетные двигатели должны обеспечивать определенные законы изменения тяги, приложенной к летательному аппарату (ЛА). Соответственно, особое внимание уделяется совершенствованию энергетических характеристик ракетных двигателей путем совершенствования не только свойств топлива, но и рабочих процессов в камере сгорания (КС) и в сопловой части ЭУ. Безусловно, это немыслимо без детального численного моделирования этих процессов [13–16].

ЭУ другого типа, именуемые обычно газогенераторами (ГГ), специально разрабатывают в целях организации рабочих процессов в ка-

ком-либо замкнутом объеме (ЗО), внешнем по отношению к ЭУ. В этих процессах движущей силой является избыточное давление, создаваемое в ЗО продуктами сгорания, поступающими из ЭУ [17, 18]. Подобные ЭУ часто используются в газодинамических схемах выброса (ГДВ) ЛА из пускового контейнера (ПК) [19–21]. Присущая ГГ высокая эффективность применения связана не только с аккумулированием в ЗО дополнительной массы рабочей среды, но и с достаточно высокой температурой этой среды. Благодаря компактности конструкции внутрикамерные (внутрибаллистические) процессы в ГГ часто можно удовлетворительно описать, оперируя простыми соотношениями, характеризующими изменение поверхности горения во времени и баланс между притоком вещества с поверхности горения и его уносом через сопло [13, 21]. Основная трудность обычно заключается в получении априори зависимости площади горения топлива от толщины слоя (свода), выгорающего в направлении нормали к поверхности горения [2–4, 13, 14, 21–23].

Высокотемпературная среда не всегда допустима в системах, функционирующих на поршневом эффекте. Тогда, в качестве промежуточного решения между использованием пневматических систем на холодном газе высокого давления или обычных ГГ могут применяться так называемые низкотемпературные ГГ, например парогазогенераторы [24, 25].

В общем случае проектирование ГГ должно начинаться с определения требований к временно́й зависимости его массового расхода. Следующая задача, также имеющая в основном теоретический характер, заключается в расчете подходящих формы и размеров заряда, при горении которого должна будет получиться требуемая массорасходная характеристика (МРХ). Достичь практически достаточно точного воспроизведения требуемой МРХ обычно не удается. Для этого геометрическая форма заряда должна быть настолько сложной, что при современных технологиях невозможно гарантировать безотказную и безопасную работу соответствующего ЭУ. По этой причине задачи оптимального выбора требуемой (теоретической) МРХ ГГ и оптимальной реализации этой МРХ в форме твердотопливного заряда не могут быть чисто математическими. Следовательно, концепции, положенные в основу решения таких задач, должны отражать это обстоятельство, пусть и в неявной форме, ограничивая свободу выбора построениями, обладающими некоторой естественной (инженерной) простотой.

Данная работа посвящена рассмотрению последних двух задач и является непосредственным предметным и идейным продолжением работы [21]. В первой ее части решается задача оптимального выбора теоретической МРХ ЭУ из класса линейно нарастающих по времени зависимостей. МРХ такого типа имеют, по-видимому, более широкое применение [4] по сравнению с МРХ, рассмотренными в работе [21].

При этом в общем виде теория оптимального выбора линейно нарастающих по времени МРХ строится аналогичным образом. Однако поскольку параметры, определяющие конкретные кривые, должны быть другими, математические вычисления приходится существенным образом перестраивать.

Во второй части работы рассматривается задача оптимальной реализации линейно нарастающих по времени МРХ в форме заряда, состоящего из определенного набора трубчатых шашек [2, 4, 26]. В отличие от работы [21], в которой демонстрируется только пример реализации линейно-постоянной МРХ в форме моноблочного многоканального заряда, ввиду аналитической простоты формул, описывающих площадь поверхности горения трубчатого заряда, удается получить, как представляется, исчерпывающее решение поставленной задачи.

При выполнении математических построений и пересчете теоретической МРХ в соответствующую зависимость потребной площади поверхности горения заряда, а также при проведении расчетов, подтверждающих правильность теоретических выводов, приходится многократно прибегать к численному моделированию ГДВ ЛА из ПК и внутрибаллистических процессов в ЭУ. Поскольку соответствующие системы уравнений и методы их решения подробно описаны ранее [21], в настоящей работе они не приводятся.

Оптимизация выбора номинальной МРХ ЭУ с линейным нарастанием расхода по времени. Аналогично работе [21] рассмотрим задачу определения МРХ ЭУ, предназначенного для осуществления ГДВ ЛА из ПК. Данная задача состоит в выборе некоторой опорной (номинальной) МРХ, практическая реализация которой во всем диапазоне разбросов определяющих параметров позволяла бы оптимально удовлетворить основным ограничениям, накладываемым на параметры движения ЛА в ПК:

$$V_{\text{вых}}^{(\text{ПК})} \geq \left(V_{\text{вых}}^{(\text{ПК})} \right)_{\min}, \qquad A \leq \left(A_{\max}^{(\text{ПК})} \right)_{\max}. \tag{1}$$

Здесь $\left(V_{\text{вых}}^{(\text{ПК})} \right)_{\min}$ и $\left(A_{\max}^{(\text{ПК})} \right)_{\max}$ — заданные значения минимальной скорости выхода ЛА из ПК и максимального ускорения ЛА при движении в ПК. Помимо того, следует стремиться и к снижению максимального давления раскупорки ПК $\left(p_{\text{вых}}^{(\text{ПК})} \right)_{\max}$ [20].

Потребная МРХ такого ЭУ должна иметь характер монотонно возрастающей зависимости [21]. Однако обычно прогрессивность МРХ (отношение максимального значения расхода ЭУ к начальному расходу) ограничена. В таком случае лучшие результаты в удовлетворении ограничений (1) дает выбор МРХ из класса линейно-постоянных зависимостей [21].

В то же время более широкие возможности размещения ЭУ в ЗО ПК появляются при использовании зарядов, составленных из необходимого количества однотипных шашек (многошашечные заряды). Благодаря некоторому произволу в выборе геометрических размеров отдельной шашки и общего числа шашек проектирование многошашечных зарядов обладает дополнительными вариативными возможностями. Далее будут рассматриваться шашки трубчатой формы, забронированные по внешней боковой поверхности. По мере выгорания такой шашки площадь поверхности горения увеличивается, что обеспечивает прогрессивное нарастание массового расхода ЭУ. Поскольку площадь поверхности горения вычисляют по простым аналитическим зависимостям, удается построить несложную процедуру определения параметров многошашечного заряда, позволяющую наилучшим образом воспроизвести потребную МРХ.

Итак, для ГДВ ЛА из ПК будем искать потребные МРХ ЭУ в классе линейно возрастающих зависимостей. Точно так же, как и в теории линейно-постоянных МРХ [21], для описания этих зависимостей необходимо выбрать небольшое число свободных параметров (желательно два) для получения наглядной геометрической интерпретации. Выбрав в качестве таких параметров начальный расход ЭУ G_i и скорость его возрастания $\dot{G}_i$ (рис. 1), получим достаточные данные для задания массового расхода ЭУ при движении ЛА в ПК. Время полного выгорания заряда t_f обычно выбирают с таким расчетом, чтобы на всех режимах работы ЭУ оно превышало время движения ЛА в ПК — $t^{(\text{ПК})}$. Таким образом, параметры t_f, G_f (максимальный расход ЭУ, реализующийся в момент полного выгорания заряда) и $\kappa = \dfrac{G_f}{G_i}$ (прогрессивность МРХ) на данном этапе во внимание не принимаются.

Далее зададимся набором параметров, характеризующих ГДВ ЛА из ПК, и диапазоном разбросов МРХ [21]. Математическая модель разбросов МРХ принимается точно такой же, как в работе [21], т. е. имеем

$$G_{\nu}^{(\text{ЭУ})}(t) = \bar{\nu} G_0^{(\text{ЭУ})}\left(\bar{\nu}\left[t - t_{\nu,\text{нач}}^{(\text{ЭУ})}\right] + t_{0,\text{нач}}^{(\text{ЭУ})}\right), \qquad (2)$$

где $G_{\nu}^{(\text{ЭУ})}(t)$ — МРХ, уклоняющаяся от номинальной на ν процентов; $\bar{\nu} = 1 + 0{,}01\nu$; $t_{\nu,\text{нач}}^{(\text{ЭУ})}$ — моменты времени, в которые продукты сгорания

ЭУ начинают поступать в ЗО ПК, для простоты приняты равными нулю $\left(t_{\text{v,нач}}^{(\text{ЭУ})}=0\right)$; $G_0^{(\text{ЭУ})}(t)$ — номинальная МРХ.

Диапазон разбросов МРХ принят равным $\pm\,20\,\%$, что соответствует неравенству

$$0{,}8=\overline{\text{v}}_{\min}\le\overline{\text{v}}\le\overline{\text{v}}_{\max}=1{,}2. \tag{3}$$

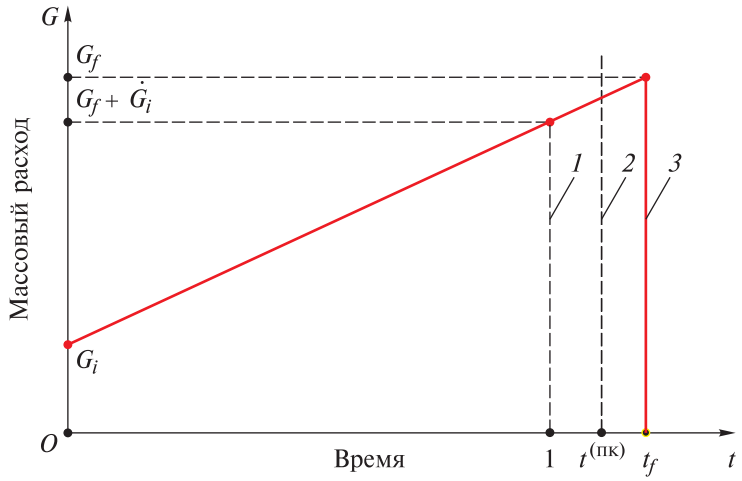


Рис. 1. Линейно возрастающая МРХ:

1 — момент времени $t=1$; *2* — момент выхода из ПК $t=t^{(\text{ПК})}$;

3 — момент выгорания заряда $t=t_f$

Аналогично процедуре, описанной в работе [21], выполним серии расчетов ГДВ ЛА из ПК для построения на плоскости $\dot{G}_i$, G_i кривой $\Gamma^{(\min)}$, для каждой из точек которой скорость выхода ЛА из ПК равна значению $V_{\min}^{(\text{ПК})}$, и кривой $\Gamma^{(\max)}$, для точек которой максимальное значение ускорения ЛА в ПК равно значению $A_{\max}^{(\text{ПК})}$, что соответствует ограничениям (1). Тогда область значений $\left(\dot{G}_i, G_i\right)$, для которых одновременно выполнены ограничения (1), представляет собой криволинейный угол Δ (рис. 2). Границы этой области (кривые $\Gamma^{(\min)}$ и $\Gamma^{(\max)}$) не зависят, в отличие от построений, приведенных в работе [21], от прогрессивности МРХ и, следовательно, не требуют пересчета в случае какого-либо другого выбора значения прогрессивности рассматриваемых МРХ.

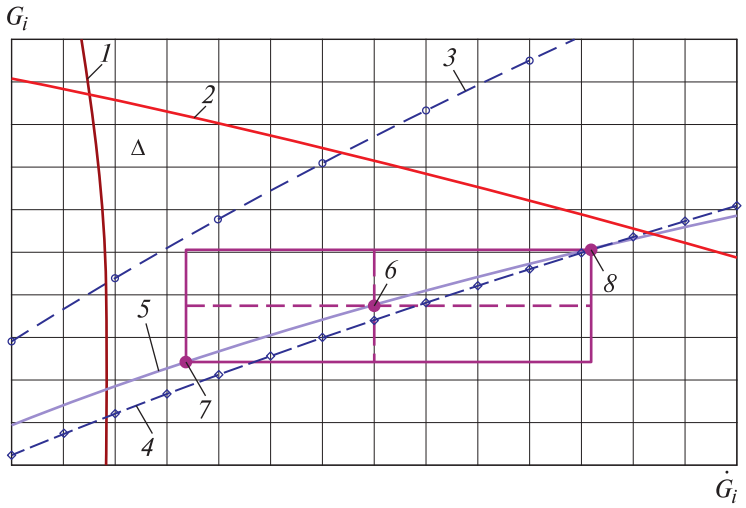


Рис. 2. Геометрическая иллюстрация выбора номинала потребной МРХ линейно возрастающего типа:

1 — линия $\Gamma^{(\min)}$; *2* — линия $\Gamma^{(\max)}$; *3* — линия $\tilde{\kappa} = 6$; *4* — линия $\tilde{\kappa} = 9$; *5* — парабола $G_i = G_i^{\text{opt}} \sqrt{\dot{G}_i \Big/ \dot{G}_i^{\text{opt}}}$, $\kappa \approx 9$; *6* — номинал МРХ $\left(\dot{G}_i^{\text{opt}};\ G_i^{\text{opt}} \right)$; *7* — максимум МРХ, $\bar{\nu}_{\max} = 1,2$; *8* — минимум МРХ, $\bar{\nu}_{\min} = 0,8$

Следующий шаг построения будет состоять в геометрической интерпретации семейств (2) линейно возрастающих МРХ. Для этого удобнее принять разбросы МРХ в пределах от $-100\,\%$ до $+\infty\,\%$ $(0 < \bar{\nu} < +\infty)$, а также считать, что сами МРХ неограниченно возрастают как функции времени по линейному закону $(t_f = +\infty)$.

Каждой точке $M_0 = (x_0, y_0)$ квадранта $Q = \left\{ \dot{G}_i > 0, G_i > 0 \right\}$ можно поставить в соответствие МРХ $G^{(\text{ЭУ})}(t) = y_0 + x_0 t$. Выбрав эту зависимость за номинал $G_0^{(\text{ЭУ})}(t)$, получим по формуле (2) целое семейство МРХ:

$$\Gamma_{(x_0, y_0)} = \left\{ G_\nu^{(\text{ЭУ})}(t) = \bar{\nu} G_0^{(\text{ЭУ})}(\bar{\nu} t) = \bar{\nu} y_0 + \bar{\nu}^2 x_0 t,\ \bar{\nu} \in (0, +\infty) \right\}, \qquad (4)$$

отклоняющихся от номинальной зависимости в пределах разбросов $0 < \bar{\nu} < +\infty$. При этом каждая кривая $G_\nu^{(\text{ЭУ})}(t)$ данного семейства

однозначно определяется точкой $(x, y) = \left(\bar{\nu}^2 x_0,\ \bar{\nu} y_0\right)$ квадранта Q, а тогда все семейство (4) в координатах $x = \dot{G}_i,\ y = G_i$ представляется параметрической кривой

$$x = \bar{\nu}^2 x_0, \quad y = \bar{\nu} y_0.$$

Исключив параметр $\bar{\nu}$, получим носитель этой кривой — ветвь параболы в квадранте Q, проходящую через точку M_0:

$$y = y_0 \sqrt{\frac{x}{x_0}}. \tag{5}$$

Если теперь на ветви (5) зафиксировать точку $M_0' = (x_0', y_0') \neq M_0$ и выбрать за номинальную МРХ зависимость $G_0^{(\text{ЭУ})}(t) = y_0' + x_0' t$, то это даст нам другое семейство МРХ:

$$\Gamma_{(x_0', y_0')} = \left\{ G_\nu^{(\text{ЭУ})}(t) = \bar{\nu} G_0^{(\text{ЭУ})}(\bar{\nu} t) = \bar{\nu} y_0' + \bar{\nu}^2 x_0' t,\ \bar{\nu} \in (0, +\infty) \right\},$$

но ту же самую ветвь параболы (5) в качестве его носителя, поскольку $\frac{y_0'}{\sqrt{x_0'}} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0}}$. На этом основании можно говорить об эквивалентности семейств $\Gamma_{(x_0, y_0)}$ и $\Gamma_{(x_0', y_0')}$ в математическом смысле: отношение $\Gamma_{(x_0, y_0)} \sim \Gamma_{(x_0', y_0')}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{y_0'}{\sqrt{x_0'}} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0}}$, и это точно является отношением эквивалентности [27]. В результате все множество МРХ (2) разбивается на попарно непересекающиеся классы эквивалентных семейств типа (4). Геометрически это означает, что через каждую точку (x_0, y_0) квадранта Q можно провести одну и только одну ветвь параболы (5), представляющую целый класс эквивалентных семейств МРХ, представителем которого является, в частности, семейство МРХ $\Gamma_{(x_0, y_0)}$.

В нашем случае каждое допустимое по ограничениям (1) семейство МРХ должно быть представлено парами значений $\left(\dot{G}_i, G_i\right)$, принадлежащими области $\Delta \subset Q$. Следовательно, для построения таких семейств годятся лишь те параболы (5), которые пересекаются с областью Δ. Зафиксируем одну из них. Выбрав на ней некоторую

точку $(x_0, y_0) \in \Delta$, назначим соответствующую ей МРХ в качестве номинальной:

$$G_0^{(\text{ЭУ})}(t) = y_0 + x_0 t.$$

Ввиду ограничений (3) на разбросы МРХ области Δ должен принадлежать весь сегмент выбранной параболы, определяемый параметрически как

$$x = \bar{\nu}^2 x_0; \quad y = \bar{\nu} y_0; \quad \left(\bar{\nu} \in [\bar{\nu}_{\min}, \bar{\nu}_{\max}]\right). \tag{6}$$

Может показаться, что данное построение всегда осуществимо. В действительности это не так, поскольку на прогрессивность МРХ ЭУ накладывают ограничение вида

$$\kappa \le \kappa_*, \tag{7}$$

где κ_* — некоторое заданное значение.

Учитывая, что оптимум МРХ имеет место при $\kappa = \kappa_*$ [21], будем (так удобнее для последующих рассуждений) применять ограничение (7) в виде

$$\kappa \approx \kappa_*.$$

В предыдущих построениях ограничение (7) не учитывалось. Поэтому поставим в соответствие точкам области Δ значения κ прогрессивности МРХ ЭУ. Выбрав с этой целью пару значений $\left(\dot{G}_i, G_i\right) \in \Delta$, выполним для соответствующей МРХ $G^{(\text{ЭУ})}(t) = G_i + \dot{G}_i t$ расчет ГДВ ЛА из ПК. В результате получаем некоторое значение $t^{(\text{ПК})}$ момента выхода ЛА из ПК. Приняв $t_f = t^{(\text{ПК})}$, определяем максимальный расход ЭУ по формуле

$$G_f = G^{(\text{ЭУ})}(t_f) = G_i + \dot{G}_i t_f$$

и соответствующее ему значение прогрессивности МРХ

$$\tilde{\kappa} = \frac{G_f}{G_i} = 1 + \frac{\dot{G}_i}{G_i} t^{(\text{ПК})}.$$

Момент полного выгорания заряда ЭУ (t_f) выбирают таким образом, чтобы во всем диапазоне разбросов МРХ имело место неравенство $t^{(\text{ПК})} \le t_f$. Но поскольку всегда $t_f \approx t^{(\text{ПК})}$, то и $\tilde{\kappa} \approx \kappa$.

Опираясь на данные рассуждения, построим в области Δ линию $\tilde{\kappa} = \kappa_*$. При систематическом подходе можно, задавшись некото-

рым набором значений параметра G_i, подобрать из условия $\kappa_* = 1 + \dfrac{\dot{G}_i}{G_i} t^{(\text{ПК})}$ соответствующее значение $\dot{G}_i$, выполнив (для определения $t^{(\text{ПК})}$) расчеты ГДВ ЛА из ПК. В качестве примера на рис. 2 приведены линии $\tilde{\kappa} = 6$ и $\tilde{\kappa} = 9$.

Завершая построение, проведем в окрестности линии $\tilde{\kappa} = \kappa_*$ какую-нибудь параболу (5) с таким расчетом, чтобы ее сегмент, описываемый уравнениями (6), целиком попал внутрь области Δ. Центр этого сегмента, соответствующий значению $\overline{\nu} = 1$ (т. е. некоторая пара значений $x_0 = \dot{G}_i^{\text{opt}}$ и $y_0 = G_i^{\text{opt}}$), принимается за номинал. Выбрав значение t_f согласно сказанному выше, получаем потребную номинальную МРХ ЭУ

$$G_0^{(\text{ЭУ})}(t) = \left(G_i^{\text{opt}} + \dot{G}_i^{\text{opt}} t \right) h(t_f - t), \qquad (8)$$

удовлетворяющую всем трем поставленным выше ограничениям (функция $h(t)$ есть единичная «ступенька» Хевисайда [28]).

Мы видим, что чем меньше допускаемая прогрессивность ЭУ (и проще такой ЭУ создать), тем ближе оказывается линия $\tilde{\kappa} = \kappa_*$ по отношению к угловой точке области Δ, т. е. тем сложнее выполнить ограничения (1). На практике ограничения (1) на параметры ГДВ и ограничения (7) на прогрессивность ЭУ могут оказаться несовместимыми с диапазоном разбросов МРХ (3). В этой ситуации неизбежен поиск компромисса в наложении перечисленных ограничений, а роль излагаемой здесь теории состоит в том, чтобы дать ясное представление об их взаимном влиянии и об области возможного решения задачи.

Оптимизация выбора параметров многошашечного трубчатого заряда ЭУ для приближенного воспроизведения потребных линейно нарастающих по времени МРХ. *Определение диаметра критического сечения и теоретической площади поверхности горения заряда по соотношениям внутренней баллистики ЭУ.*

Для ЭУ небольшого удлинения расчет на инженерном уровне газодинамических параметров внутри КС достаточно проводить, основываясь на предположении о равномерном распределении этих параметров по всему объему камеры. При этом температура в КС $T_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}$ определяется в основном химическим составом и энтальпией образования твердого топлива, а от текущего давления $p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}(t)$ в КС

зависит очень слабо [13, 14, 29]. Тем самым предположение о том, что в процессе работы ЭУ температура продуктов сгорания в КС принимает постоянное известное значение $T_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}$, является хорошим приближением, заменяющим использование уравнения энергии.

Постоянство температуры среды в КС ЭУ влечет за собой также постоянство приведенной газовой постоянной $R_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}$ [13, 29] и теплоемкостей. Будем пользоваться значениями «замороженных» теплоемкостей [14], обозначив их как $C_{p\,\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}$, $C_{V\,\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}$; аргументы в пользу такого подхода приведены в работе [30]. Тогда имеет место формула $C_{p\,\text{КС}}^{(\text{ЭУ})} = C_{V\,\text{КС}}^{(\text{ЭУ})} + R_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}$, и можно определить показатель изоэнтропы

$$\gamma_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})} = \frac{C_{p\,\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}}{C_{V\,\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}}.$$

В инженерных целях достаточно предполагать, что в каждый момент времени фронт горения распространяется внутрь твердого топлива строго по нормали к поверхности, имея во всех ее точках одинаковую скорость горения $u_b(t) = u_b\left(p_{\text{КС}}(t)\right)$. При таком предположении выгоревший свод (толщина слоя выгорания топлива)

$$e_b(t) = \int_0^t u_b(\tau)\, d\tau, \tag{9}$$

получается всюду одинаковым, и текущую площадь поверхности горения $S_b(t)$ можно вычислить как

$$S_b(t) = S_b\left(e_b(t)\right).$$

Здесь $S_b = S_b(e_b)$ определяют заранее по известной геометрии начальной поверхности заряда. Закон горения топлива определяют экспериментально. Мы будем пользоваться степенной зависимостью

$$u_b\left(p_{\text{КС}},\, T_{\text{нач}}\right) = u_{b0}\alpha_b\left(\frac{T_{\text{нач}}}{T_{\text{ст}}}\right)\left(\frac{p_{\text{КС}}}{p_{\text{ст}}}\right)^{\nu_b} = \tilde{u}_{b0}\alpha_b\left(\frac{T_{\text{нач}}}{T_{\text{ст}}}\right)p_{\text{КС}}^{\nu_b},$$

где u_{b0}, ν_b — постоянные, зависящие от конкретных свойств твердого топлива; $T_{\text{нач}}$ — температура твердотопливного заряда в момент запуска ЭУ; $T_{\text{ст}}$ — «стандартная» температура окружающей среды; $p_{\text{ст}}$ — характерное значение рабочего давления в КС ЭУ. Функция

$\alpha_b\left(\frac{T_{\text{нач}}}{T_{\text{ст}}}\right)$ есть фактор температурной чувствительности скорости горения. Поскольку наша задача состоит в реализации заданной номинальной МРХ ЭУ, считаем, что $T_{\text{нач}} = T_{\text{ст}}$. В этом случае $\alpha_b = 1$, и закон горения принимает более простой вид

$$u_b\left(p_{\text{КС}}\right) = \tilde{u}_{b0} p_{\text{КС}}^{\nu_b}, \tag{10}$$

где $\tilde{u}_{b0} = u_{b0} p_{\text{ст}}^{-\nu_b}$.

Для того чтобы вычислять текущие значения давления в КС ЭУ, необходимо воспользоваться соотношением баланса массы в КС и уравнением состояния для продуктов сгорания. Очевидно, что скорость изменения массы $m_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}$ продуктов сгорания в КС должна подчиняться соотношению

$$\frac{dm_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}}{dt} = G_b^{(\text{ЭУ})} - G^{(\text{ЭУ})}.$$

Здесь

$$G_b^{(\text{ЭУ})}(t) = \rho_b u_b(t) S_b(t),$$

где ρ_b — плотность твердого топлива, есть скорость прихода массы продуктов сгорания с поверхности горения, а величина

$$G^{(\text{ЭУ})}(t) = c_*^{-1} p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}(t) \Sigma_{\text{кр}}^{(\text{ЭУ})}, \tag{11}$$

где

$$c_* = \frac{\sqrt{R_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})} T_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}}}{\phi_{\text{ист}}^{(\text{ЭУ})} B\left(\gamma_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\right)}; \qquad B = \sqrt{\gamma_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}} \left(\frac{2}{\gamma_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})} + 1}\right)^{\frac{\gamma_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})} + 1}{2\left(\gamma_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})} - 1\right)}}$$

есть массовый расход ЭУ через критическое сечение сопла.

Ясно, что суммарный приход массы продуктов сгорания с поверхности горения на момент t_f полного выгорания заряда равен исходной массе заряда:

$$m_b^{(\text{ЭУ})} = \rho_b \Omega_b^{(\text{ЭУ})} = \int_0^{t_f} G_b^{(\text{ЭУ})}(t)\, dt = \int_0^{t_f} \rho_b u_b(t) S_b(t)\, dt =$$

$$= \rho_b \int_0^{t_f} \frac{de_b}{dt} S_b(t)\, dt = \rho_b \int_0^{e_{bf}} S_b(e_b)\, de_b.$$

Следовательно

$$\int_0^{e_{bf}} S_b\left(e_b\right) de_b = \Omega_b^{(\text{ЭУ})}, \tag{12}$$

где $e_{bf} = e_b\left(t_f\right)$ — максимальный свод заряда.

В нашем случае МРХ ЭУ имеет прогрессивный характер, и, как следует из формулы (11), давление в КС также монотонно возрастает, что свидетельствует о накоплении массы продуктов сгорания внутри камеры ЭУ. Несмотря на это, как легко видеть из полных расчетов [13, 21], производная $\dfrac{dm_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}}{dt}$ оказывается незначительной по сравнению с каждой из величин $G_b^{(\text{ЭУ})}$ и $G^{(\text{ЭУ})}$. Тем самым мы приходим к уравнению Бори [13] $G^{(\text{ЭУ})} = G_b^{(\text{ЭУ})}$, которым будем пользоваться в следующих формах:

$$p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\left(e_b\right) = \left(\frac{\rho_b \tilde{u}_{b0} c_* S_b\left(e_b\right)}{\Sigma_{\text{кр}}^{(\text{ЭУ})}}\right)^{\frac{1}{1-\nu_b}};$$

$$S_b\left(t\right) = \frac{G^{(\text{ЭУ})}\left(t\right)}{\rho_b u_b\left(p_{\text{КС}}\left(t\right)\right)} = \frac{p_{\text{КС}}\left(t\right)\Sigma_{\text{кр}}^{(\text{ЭУ})}}{c_*\rho_b u_b\left(p_{\text{КС}}\left(t\right)\right)} = \frac{\Sigma_{\text{кр}}^{(\text{ЭУ})}}{\rho_b c_* \tilde{u}_{b0}}\left(p_{\text{КС}}\left(t\right)\right)^{1-\nu_b}. \tag{13}$$

С учетом формул (11), (13) фактическую прогрессивность МРХ ЭУ (в рассматриваемом случае $\kappa = \dfrac{G_f}{G_i}$) можно связать с аналогичным параметром, характеризующим площадь поверхности горения:

$$\kappa_{Sb} = \frac{\left(S_b\right)_{\max}}{\left(S_b\right)_{\min}} = \left(\frac{p_{\text{КС}}\left(t_f\right)}{p_{\text{КС}}\left(0\right)}\right)^{1-\nu_b} = \left(\frac{G_f}{G_i}\right)^{1-\nu_b} = \kappa^{1-\nu_b}. \tag{14}$$

Свойства топлива определяют границы $\left(p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\right)_{\min}$, $\left(p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\right)_{\max}$ диапазона рабочих давлений в КС ЭУ

$$\left(p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\right)_{\min} \le p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\left(t\right) \le \left(p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\right)_{\max},$$

причем данное неравенство должно удовлетворяться для всех режимов работы ЭУ. По соотношению (11) разбросы (3) МРХ должны оста-

ваться такими же в отношении давления в КС, поэтому для номинального режима диапазон рабочих давлений получается следующим:

$$\frac{\left(p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\right)_{\min}}{\overline{\nu}_{\min}} \le p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}(t) \le \frac{\left(p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\right)_{\max}}{\overline{\nu}_{\max}}. \qquad (15)$$

Массовый расход ЭУ $G_0^{(\text{ЭУ})}(t)$ задан формулой (8). Тогда для вычисления соответствующей зависимости для номинального давления в КС, которую будем обозначать $p_{\text{КС}}^{(\text{теор})}(t)$, нужно лишь определиться с диапазоном критики ЭУ. Обычно следует ориентироваться на меньшие значения давления в КС (например, чтобы избежать дополнительного учета неидеальности смеси продуктов сгорания [17, 18, 31]). В таком случае из формул (8), (11), (15) получаем

$$d_{\text{кр}}^{(\text{ЭУ})} = 2\sqrt{\frac{\Sigma_{\text{кр}}^{(\text{ЭУ})}}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{\overline{\nu}_{\min} c_* G_i^{\text{opt}}}{\pi\left(p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}\right)_{\min}}}.$$

Определившись с зависимостью $p_{\text{КС}}^{(\text{теор})}(t)$, вычисляем по формулам (10), (9), (13) соответствующие зависимости $u_b^{(\text{теор})}(t)$, $e_b^{(\text{теор})}(t)$, $S_b(t) = S_b^{(\text{теор})}(t)$. Последнюю зависимость ввиду монотонного возрастания $e_b^{(\text{теор})}(t)$ можно перестроить в функцию

$$S_b = S_b^{(\text{теор})}(e_b). \qquad (16)$$

В итоге задача реализации заданной МРХ (8) сведена к решению задачи выбора формы заряда, воспроизводящей зависимость (16) (рис. 3).

Основные геометрические соотношения, определяющие многошашечный трубчатый заряд. Рассмотрим воспроизведение зависимости $S_b = S_b^{(\text{теор})}(e_b)$, приведенной на рис. 3, при помощи заряда, составленного из однотипных трубчатых шашек (рис. 4).

Три варианта трубчатых шашек, показанных на рис. 4, соответствуют прогрессивно увеличивающейся поверхности горения. В варианте *а* горению открыт только внутренний канал шашки, в вариантах *б* и *в* горение дополнительно распространяется соответственно на один и оба торца.. На рис. 4 даны обозначения геометрических размеров шашек заряда. Формулы для расчета площади поверхности горения имеют простой аналитический вид [2–4], их легко получить из

наглядных геометрических рассуждений. При этом все три рассматриваемых случая можно охватить одним соотношением

$$S_b\left(e_b\right)=\left[\pi\left(d_{i0}+2e_b\right)\left(L_{b0}-i_b e_b\right)+\frac{\pi i_b}{4}\left(d_{e0}^2-\left(d_{i0}+2e_b\right)^2\right)\right]\times$$

$$\times h\left(d_{e0}-d_{i0}-2e_b\right)h\left(L_{b0}-i_b e_b\right), \qquad (17)$$

где i_b — число торцов, открытых для горения.

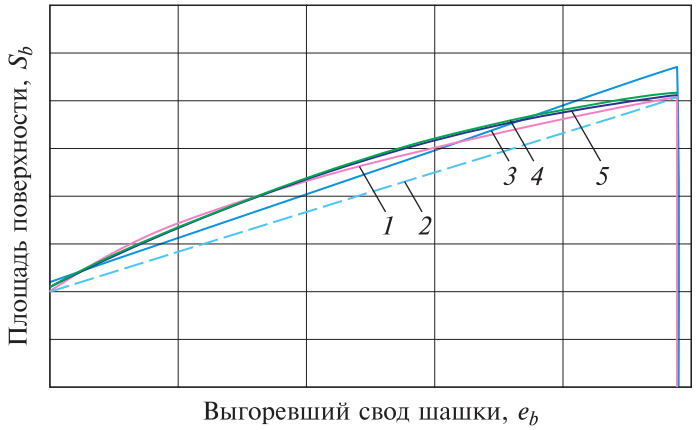


Рис. 3. Площадь поверхности горения как функция толщины выгоревшего свода:

1 — теоретическая зависимость $S_b^{(\text{теор})}\left(e_b\right)$; *2* — секущая линии $S_b^{(\text{теор})}\left(e_b\right)$; *3–5* — оптимальные приближения для вариантов горения шашки соответственно по внутреннему каналу, внутреннему каналу и торцу , внутреннему каналу и двум торцам

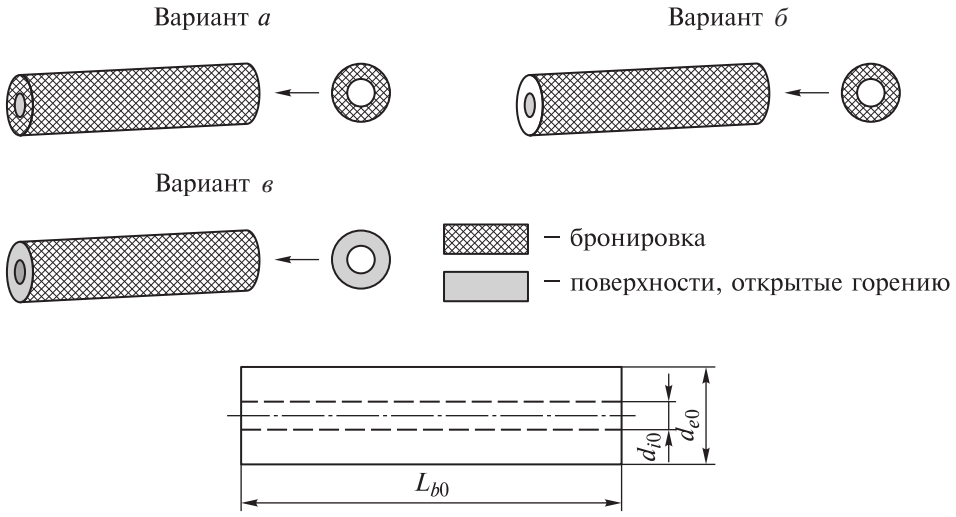


Рис. 4. Варианты трубчатых шашек многошашечного заряда ЭУ

Причем горение с торцов шашки дает дегрессивный «вклад» в изменение площади горения, поэтому максимальный свод заряда должен определяться поперечными размерами шашки, т. е.

$$2e_{bf} = d_{e0} - d_{i0} < L_{b0}.$$

Задача состоит в таком выборе размеров d_{i0}, d_{e0}, L_{b0} отдельных шашек и общего их числа N_b, чтобы воспроизвести заданную теоретическую зависимость $S_b^{(\text{теор})}(e_b)$ наилучшим образом. В первом приближении эта зависимость определяется максимальным сводом заряда e_{bf}, площадью поверхности горения $S_{b0} = S_b^{(\text{теор})}(0)$, $S_{bf} = S_b^{(\text{теор})}(e_{bf})$ в начале работы ЭУ и в момент, предшествующий полному выгоранию топлива, а также объемом $\Omega_b^{(\text{ЭУ})}$, занимаемым топливом (рис. 5). Опираясь на геометрическую схему (см. рис. 4), это легко выразить соотношениями

$$d_{e0} - d_{i0} = 2e_{bf}; \tag{18}$$

$$\pi N_b \left(d_{i0} L_{b0} + \frac{i_b}{4}\left(d_{e0}^2 - d_{i0}^2\right)\right) = S_{b0}; \tag{19}$$

$$\pi N_b d_{e0}\left(L_{b0} - i_b e_{bf}\right) = S_{bf}; \tag{20}$$

$$\frac{\pi}{4}\left(d_{e0}^2 - d_{i0}^2\right) L_{b0} N_b = \Omega_b^{(\text{ЭУ})}. \tag{21}$$

Реализация зависимости $S_b^{(\text{теор})}(e_b)$ зарядом с шашками по варианту а (*см. рис. 4*). Начнем с заряда, шашки которого забронированы по всей поверхности за исключением внутреннего канала. В этом случае $i_b = 0$, и условия (18)–(21) оказываются несовместными. Действительно, соответствующая такому типу шашки зависимость $S_b(e_b)$ линейна, а потому при выполнении условий (18), (19) будет представлять собой секущую $S_b = S_{b0} + \left(S_{bf} - S_{b0}\right)\dfrac{e_b}{e_{bf}}$ по отношению к кривой $S_b^{(\text{теор})}(e_b)$ (см. рис. 3). Но тогда, вопреки условию (12), получаем

$$\frac{\pi}{4}\left(d_{e0}^2 - d_{i0}^2\right) L_{b0} N_b = \int_0^{e_{bf}} S_b(e_b)\, de_b < \int_0^{e_{bf}} S_b^{(\text{теор})}(e_b)\, de_b = \Omega_b^{(\text{эу})}.$$

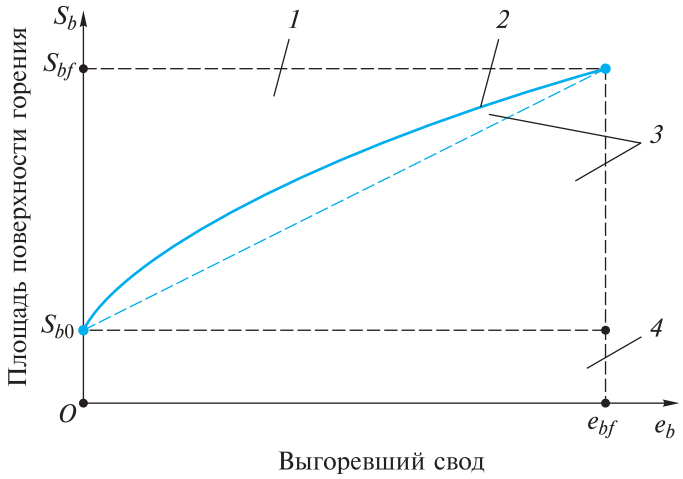


Рис. 5. Геометрическая иллюстрация аппроксимации заданной зависимости $S_b^{(\text{теор})}(e_b)$:

1 — площадь $\sigma_3 = S_{bf} e_{bf} - \Omega_b^{(\text{эу})}$; *2* — $S_b^{(\text{теор})}(e_b)$; *3* — площадь $\sigma_2 = \Omega_b^{(\text{эу})} - S_{b0} e_{bf} > \sigma_3$; *4* — площадь $\sigma_1 = S_{b0} e_{bf}$

Поступим в этой ситуации следующим образом. Построим линейную зависимость $S_b = \tilde{S}_{b0} + \left(\tilde{S}_{bf} - \tilde{S}_{b0}\right)\dfrac{e_b}{e_{bf}}$, отличающуюся от секущей другими концевыми значениями $\tilde{S}_{b0} = S_{b0} + \delta S_{b0}$ и $\tilde{S}_{bf} = S_{bf} + \delta S_{bf}$, для определения которых воспользуемся условиями сохранения прогрессивности (14) и общего объема топлива:

$$\frac{\tilde{S}_{bf}}{\tilde{S}_{b0}} = \frac{S_{bf}}{S_{b0}} = \kappa_{Sb}; \quad \Omega_b^{(\text{эу})} = \int_0^{e_{bf}} S_b(e_b)\, de_b = \frac{\tilde{S}_{b0} + \tilde{S}_{bf}}{2} e_{bf}.$$

Это дает выражения

$$\tilde{S}_{b0} = 2\Omega_b^{(\text{эу})} \left(1 + \kappa_{Sb}\right)^{-1} e_{bf}^{-1}; \quad \tilde{S}_{bf} = \tilde{S}_{b0} \kappa_{Sb}.$$

Зависимость $S_b = \tilde{S}_{b0} + \left(\tilde{S}_{bf} - \tilde{S}_{b0}\right)\dfrac{e_b}{e_{bf}}$ приведена на рис. 3 (кривая 3).

После замены величин S_{b0} и S_{bf} на $\tilde{S}_{b0}$ и $\tilde{S}_{bf}$ формулы (18)–(21) становятся совместными. Из первых трех условий находим поперечные размеры блоков

$$d_{i0} = \frac{2\tilde{S}_{b0} e_{bf}}{\tilde{S}_{bf} - \tilde{S}_{b0}}; \quad d_{e0} = d_{i0} + 2e_{bf}.$$

Общее число N_b и длина L_{b0} шашек могут быть выбраны с некоторым произволом в зависимости от желаемых габаритов всего заряда и оптимальной компоновки шашек. Выбрав подходящее значение N_b, найдем по формуле (20) значение $L_{b0} = \dfrac{\tilde{S}_{bf}}{\pi N_b d_{e0}}$.

Реализация зависимости $S_b^{(\text{теор})}\left(e_b\right)$ *зарядом с шашками по вариантам б или в* (*см. рис. 4*). *Формальный подход.* Рассмотрим трубчатые шашки, горящие кроме внутреннего канала, также по одному или обоим торцам, полагая в условиях (19), (20) соответственно $i_b = 1$ и $i_b = 2$.

Из формулы (18) вытекает соотношение

$$d_{e0}^2 - d_{i0}^2 = \left(d_{e0} - d_{i0}\right)\left(d_{e0} + d_{i0}\right) = 4e_{bf}\left(d_{i0} + e_{bf}\right).$$

Тогда условия (19)–(21) могут быть представлены следующим образом:

$$d_{i0} L_{b0} + i_b e_{bf}\left(d_{i0} + e_{bf}\right) = \frac{S_{b0}}{\pi N_b}; \tag{22}$$

$$\left(d_{i0} + 2e_{bf}\right)\left(L_{b0} - i_b e_{bf}\right) = \frac{S_{bf}}{\pi N_b}; \tag{23}$$

$$\left(d_{i0} + e_{bf}\right) L_{b0} = \frac{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}{\pi N_b e_{bf}}. \tag{24}$$

Разделим соотношения (22), (23) почленно на соотношение (24):

$$\frac{d_{i0} L_{b0} + i_b e_{bf}\left(d_{i0} + e_{bf}\right)}{\left(d_{i0} + e_{bf}\right) L_{b0}} = \frac{d_{i0}}{d_{i0} + e_{bf}} + \frac{i_b e_{bf}}{L_{b0}} =$$

$$= 1 - \frac{e_{bf}}{d_{i0} + e_{bf}} + \frac{i_b e_{bf}}{L_{b0}} = 3 - \xi_1 - \xi_2 = \frac{\lambda_b}{\kappa_{Sb}},$$

$$\frac{\left(d_{i0} + 2e_{bf}\right)\left(L_{b0} - i_b e_{bf}\right)}{\left(d_{i0} + e_{bf}\right) L_{b0}} = \xi_1 \xi_2 = \lambda_b,$$

где согласно (14) $\kappa_{Sb} = \dfrac{S_{bf}}{S_{b0}} = \kappa^{1-\nu_b}$, а кроме того, введены новые обозначения

$$\lambda_b = \frac{S_{bf} e_{bf}}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}};$$

$$\xi_1 = 1 + \frac{e_{bf}}{d_{i0} + e_{bf}}; \quad \xi_2 = 1 - \frac{i_b e_{bf}}{L_{b0}}. \tag{25}$$

Для величин формул (25) составляем квадратное уравнение:

$$\xi_1 + \xi_2 = 3 - \frac{\lambda_b}{\tilde{\kappa}}; \quad \xi_1 \xi_2 = \lambda_b; \tag{26}$$

$$\xi^2 - \left(3 - \frac{\lambda_b}{\tilde{\kappa}}\right)\xi + \lambda_b = 0. \tag{27}$$

Заметим, что значения величин $\xi_{1,2}$ определяются значениями корней уравнения (27), но не формулами (25), в которых параметры d_{i0} и L_{b0} неизвестны. Иными словами, физический смысл формул (25) требуется еще установить. Для анализа знака дискриминанта $D = \left(3 - \dfrac{\lambda_b}{\tilde{\kappa}}\right)^2 - 4\lambda_b$ уравнения (27) обратимся к геометрической интерпретации величин λ_b и $\tilde{\kappa}$ (см. рис. 5). Очевидно, что

$$\lambda_b = \frac{S_{bf} e_{bf}}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} = \frac{\Omega_b^{(\text{ЭУ})} + \sigma_3}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} = 1 + \frac{\sigma_3}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}},$$

$$\tilde{\lambda}_b \equiv \frac{\lambda_b}{\tilde{\kappa}} = \frac{S_{b0} e_{bf}}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} = \frac{\Omega_b^{(\text{ЭУ})} - \sigma_2}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} = 1 - \frac{\sigma_2}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}. \tag{28}$$

Но тогда получим

$$D = \left(2 + \frac{\sigma_2}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{\sigma_3}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}\right) = \frac{4\sigma_2}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} + \left(\frac{\sigma_2}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}\right)^2 - 4\frac{\sigma_3}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} =$$

$$= \frac{4(\sigma_2 - \sigma_3)}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} + \left(\frac{\sigma_2}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}\right)^2 > 0.$$

Следовательно, уравнение (27) всегда имеет два положительных корня. Более того, при подходящей нумерации корней имеем

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{\lambda_b}{\tilde{\kappa}} + \sqrt{D}\right) = 1 + \frac{\sigma_2}{2\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} + \frac{1}{2}\sqrt{D} > 1;$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{\lambda_b}{\tilde{\kappa}} - \sqrt{D}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_2}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} - \sqrt{\frac{4(\sigma_2 - \sigma_3)}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}} + \left(\frac{\sigma_2}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}\right)^2}\right] < 1,$$

т. е. эти корни могут быть отождествлены с величинами $\xi_{1,2}$ в формуле (25). Тем самым находим значения

$$d_{i0} = \left(\frac{1}{\xi_1 - 1} - 1\right) e_{bf}; \quad d_{e0} = \left(\frac{1}{\xi_1 - 1} + 1\right) e_{bf}; \quad L_{b0} = \frac{l_b e_{bf}}{1 - \xi_2}. \tag{29}$$

Подставив эти выражения в формулу (24), получаем значение

$$N_b = \frac{(\xi_1 - 1)(1 - \xi_2)\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}{\pi l_b e_{bf}^3}, \tag{30}$$

которое, конечно, должно быть округлено до целочисленного значения.

Используя преобразования

$$(\xi_1 - 1)(1 - \xi_2) = \xi_1 - 1 - \xi_1\xi_2 + \xi_2 = 2 - \frac{\lambda_b}{\tilde{\kappa}} - \lambda_b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}},$$

основанные на формулах (26), (28), получаем также следующее выражение для N_b:

$$N_b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\pi l_b e_{bf}^3}. \tag{31}$$

Описанная выше процедура и доказательство ее корректности гарантируют существование у системы уравнений (18)–(21) при $i_b \neq 0$ физически осмысленного решения. Однако результаты расчетов по формулам (29), (30) оказываются не слишком удовлетворительными. Поэтому продолжим исследование и проанализируем аппроксимирующие свойства зависимости (17) по отношению к заданной зависимости (16).

Мы видим, что зависимость (17) при $i_b \neq 0$ есть парабола. Выполняя несложные преобразования, получаем:

$$S_b(e_b) = a_2 e_b^2 + a_1 e_b + a_0;$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 = S_{b0} &= \pi N_b\left(d_{i0}L_{b0} + \frac{i_b}{4}\left(d_{e0}^2 - d_{i0}^2\right)\right) \\ a_1 = 2\pi N_b\left(L_{b0} - i_b d_{i0}\right),&\quad a_2 = -3i_b\pi N_b \end{aligned}\right\}. \tag{32}$$

В таком случае задачу удовлетворения условиям (18)–(21) можно интерпретировать в виде абстрактной задачи построения на отрезке $[0;\ \alpha]$ дуги параболы $y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, принимающей заданные значения β, γ на концах отрезка и ограничивающей фигуру заданной площади: $\int_0^{\alpha} y(x)\,dx = \delta$.

Формулируя перечисленные условия аналитически, получаем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_1 и a_2 (коэффициент $a_0 = \beta$)

$$\left.\begin{aligned} \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 &= \gamma - \beta \\ \frac{\alpha^2}{2}a_1 + \frac{\alpha^3}{3}a_2 &= \delta - \alpha\beta \end{aligned}\right\},$$

всегда имеющую однозначное решение, определяемое следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \beta, \\ a_1 &= \frac{2}{\alpha^2}\left(3\delta - (2\beta + \gamma)\alpha\right), \\ a_2 &= -\frac{3}{\alpha^3}\left(2\delta - (\beta + \gamma)\alpha\right) \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Возвращаясь к рассматриваемой задаче, следует принять $\alpha = e_{bf}$, $\beta = S_{b0}$, $\gamma = S_{bf}$, $\delta = \Omega_b^{(\text{ЭУ})}$, $x \equiv e_b$, $y \equiv S_b$. Сопоставляя далее выражения (32) и (33) для соответственных коэффициентов парабол, получаем:

$$N_b = \frac{1}{i_b\pi e_{bf}^3}\left(2\Omega_b^{(\text{ЭУ})} - \left(S_{b0} + S_{bf}\right)e_{bf}\right) = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{i_b\pi e_{bf}^3};$$

$$d_{i0}L_{b0} + \frac{i_b}{4}\left(d_{e0}^2 - d_{i0}^2\right) = \frac{S_{b0}}{\pi N_b};$$

$$L_{b0} - i_b d_{i0} = \frac{1}{\pi e_{bf}^2} \frac{2\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}.$$

Первая из этих формул идентична формуле (31). Простота ее получения новым способом указывает на то, что ее можно было вывести непосредственно из формул (22)–(24) (в этом легко убедиться, выполняя над этими формулами действия, соответствующие выражению $2\Omega_b^{(\text{ЭУ})} - \left(S_{b0} + S_{bf}\right)e_{bf}$). Однако в определении остальных искомых величин упрощений нет.

Посмотрим теперь внимательнее на формулу (31) для N_b, из которой следует, что при сближении значений площадей σ_2 и σ_3 (зависимость $S_b\left(e_b\right)$ приближается к линейной) число шашек N_b стремится к нулю, а при уклонении σ_2 от σ_3 на $O(1)$ по отношению к e_{bf} величина N_b быстро возрастает. Поэтому, несмотря на внешнюю «физичность» решения (29) и (30), величины N_b, L_{b0}, d_{i0}, d_{e0} ему соответствующие, играют скорее всего роль наилучших коэффициентов аппроксимации заданной зависимости $S_b^{(\text{теор})}\left(e_b\right)$ зависимостями вида (17). То, что коэффициенты аппроксимации могут быть интерпретированы как геометрические параметры заряда, связано, по-видимому, с качественным сходством аппроксимируемой и аппроксимирующей зависимостей.

Реализация зависимости $S_b^{(\text{теор})}\left(e_b\right)$ зарядом с шашками по вариантам б или в (*см. рис. 4*). *Параметрический подход.* Поскольку стремление одновременно удовлетворить всем четырем условиям (18)–(21), по всей видимости, приводит к плохим результатам (напомним, что в случае *а* эти условия вообще оказались несовместными), откажемся от одного из них, получив в распоряжение один свободный параметр. В качестве такого варьируемого параметра выберем величину L_{b0}, а из условий (18)–(21) откажемся от условия (20), которое при выполнении остальных условий будет выполняться приближенно. Тогда оставшиеся три условия легко разрешаются. Действительно, исключив d_{e0} прежним приемом, получаем:

$$S_{b0} = \pi N_b \left(d_{i0} L_{b0} \pm L_{b0} e_{bf} + i_b e_{bf} \left(d_{i0} + e_{bf}\right)\right) =$$

$$= \pi N_b \left(\left(L_{b0} + i_b e_{bf}\right)\left(d_{i0} + e_{bf}\right) - L_{b0} e_{bf}\right);$$

$$\Omega_b^{(\text{ЭУ})} = \pi N_b L_{b0} e_{bf} \left(d_{i0} + e_{bf}\right)$$

или

$$\left(L_{b0}+i_b e_{bf}\right)\left(d_{i0}+e_{bf}\right)-L_{b0}e_{bf}=\frac{S_{b0}}{\pi N_b};$$

$$e_{bf}\left(d_{i0}+e_{bf}\right)=\frac{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}{\pi N_b L_{b0}}.$$

Почленным делением приходим к соотношению

$$1+\frac{i_b e_{bf}}{L_{b0}}-\frac{e_{bf}}{d_{i0}+e_{bf}}=\frac{S_{b0}e_{bf}}{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}=\frac{\lambda_b}{\kappa_{Sb}},$$

позволяющему получить в итоге выражения

$$\frac{d_{i0}}{e_{bf}}=\left(1-\tilde{\lambda}_b+\frac{i_b e_{bf}}{L_{b0}}\right)^{-1}-1;\quad \frac{d_{e0}}{e_{bf}}=\left(1-\tilde{\lambda}_b+\frac{i_b e_{bf}}{L_{b0}}\right)^{-1}+1;$$

$$N_b=\frac{\Omega_b^{(\text{ЭУ})}}{\pi L_{b0}e_{bf}^2}\left(1-\tilde{\lambda}_b+\frac{i_b e_{bf}}{L_{b0}}\right). \qquad (34)$$

Рассчитанные по формулам (17) и (34) зависимости $S_b\left(e_b\right)$ приведены на рис. 3 (кривые *4* $\left(i_b=1\right)$ и *5* $\left(i_b=2\right)$).

Пример численного моделирования ГДВ ЛА и внутренней баллистики ЭУ при оптимальном выборе МРХ и параметров многошашечного трубчатого заряда. Для заданных условий ГДВ ЛА из ПК и заданных ограничений (1), (3), (7) на параметры ГДВ и на прогрессивность ЭУ определим оптимальную номинальную МРХ (8). По результатам расчетов ГДВ с охватом всего диапазона (3) разбросов МРХ получаем значения скорости выхода ЛА из ПК $V_{\text{вых}}^{(\text{ПК})}$, максимального ускорения ЛА в ПК A и сопоставляем их с ограничениями (1). В обобщенном виде эти результаты приведены в таблице для двух значений прогрессивности ЭУ к. В таблице приводятся также максимальные отношения давления раскупорки ПК $p_{\text{вых}}^{(\text{ПК})}$ к абсолютному гидростатическому давлению p_H на глубине осуществления ГДВ.

Располагая теоретической номинальной МРХ (8), находим в соответствии с изложенной выше теорией оптимальные значения геометрических параметров заряда в целях практической реализации этой МРХ. При этом для вариантов *б* и *в* горения трубчатых шашек применяются формулы (34). Конкретный выбор длин шашек L_{b0}

обусловлен практическими соображениями и почти не сказывается на значениях внутрибаллистических параметров и параметров ГДВ (небольшие изменения значений этих параметров связаны с округлениями значений N_b).

Результаты расчетов основных параметров ГДВ и внутренней баллистики ЭУ

Прогрессивность ЭУ	Воспроизведение теоретической МРХ	Параметры ГДВ			Давление в КС
		$\frac{V_{\text{вых}}^{(\text{ПК})}}{\left(V_{\text{вых}}^{(\text{ПК})}\right)_{\min}}$	$\frac{A}{\left(A_{\max}^{(\text{ПК})}\right)_{\max}}$	$\frac{p_{\text{вых}}^{(\text{ПК})}}{p_H}$	$\frac{p_{\text{КС}}^{(\text{ЭУ})}}{p_{\text{ст}}}$
$\kappa = 6,5$	Точное	$\geq 1,01$	$\leq 1,04$	$\leq 1,83$	–
	$i_b = 0$	$\geq 0,99$	$\leq 1,03$	$\leq 1,87$	$\leq 1,77$
	$i_b = 1$	$\geq 1,04$	$\leq 1,04$	$\leq 1,90$	$\leq 1,54$
	$i_b = 2$	$\geq 1,03$	$\leq 1,04$	$\leq 1,88$	$\leq 1,50$
$\kappa = 9,0$	Точное	$\geq 1,07$	$\leq 0,97$	$\leq 1,92$	–
	$i_b = 0$	$\geq 1,07$	$\leq 0,96$	$\leq 1,97$	$\leq 2,58$
	$i_b = 1$	$\geq 1,11$	$\leq 0,96$	$\leq 1,93$	$\leq 2,09$
	$i_b = 2$	$\geq 1,11$	$\leq 0,96$	$\leq 1,94$	$\leq 2,10$

После того как определены параметры заряда, выполняем расчеты внутренней баллистики ЭУ, получая на выходе в качестве основного результата практически реализуемые номинальные МРХ. По ним в диапазоне разбросов (3) выполняем расчеты ГДВ, аналогичные расчетам, проводившимся для теоретической номинальной МРХ. Результаты этих расчетов также приведены в таблице. Максимальные значения реализующегося в КС ЭУ давления, отнесенного к стандартному значению $p_{\text{ст}}$ =100 бар, указаны в последней графе.

Результаты расчетного моделирования подтверждают изложенную выше теорию. Сопоставляя данные таблицы с данными, приведенными на рис. 2, 3, видно, что, например, при прогрессивности ЭУ $\kappa = 6,5$ невозможно полностью выполнить ограничения (1), (3), (7). Можно также заметить, что применение шашек, горящих не только по внутреннему каналу, но еще хотя бы по одному из торцов, позволяет точнее воспроизвести теоретическую площадь поверхности горения, а, следовательно, и теоретическую МРХ, что дает лучшие результаты в отношении параметров ГДВ и внутренней баллистики ЭУ.

Отметим, что формулы, рекомендуемые в работе [4] для определения параметров многошашечного трубчатого заряда (безотносительно к проблематике данной работы), учитывают требования к полной массе (объему) заряда и к его максимальному своду, но не учитывают требование к его прогрессивности. Это означает, что использование рекомендаций работы [4] для определения МРХ ГДВ не обеспечивает, в общем случае выполнения ограничений, накладываемых на газодинамические параметры.

Выводы. Теоретически определены линейно нарастающие по времени массорасходные характеристики энергоустройства газодинамического выброса ЛА из пускового контейнера и реализованы заданные ограничения на параметры. Выполнен выбор оптимальных геометрических параметров многошашечного трубчатого твердотопливного заряда для практического воплощения подобных массорасходных характеристик. Математически обоснованы теоретические построения, дополняемые геометрической интерпретацией и примером численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколовский М.И., Петренко В.И., Зыков Г.А., Лянгузов С.В. *Управляемые энергетические установки на твердом ракетном топливе.* Москва, Машиностроение, 2003, 464 с.

[2] Внутренняя баллистика РДТТ/РАРАН. Липанов А.М., Милехин Ю.М., ред.. Москва, Машиностроение, 2007, 504 с.

[3] Ерохин Б.Т. *Теория и проектирование ракетных двигателей*. Санкт-Петербург, Лань, 2015, 608с.

[4] Фахрутдинов И.Х., Котельников А.В. *Конструкция и проектирование ракетных двигателей твердого топлива*. Москва, Машиностроение, 1987, 328 с.

[5] Зыков Г.А., Иоффе Е.И., Огнев С.В., Соколовский М.И., Саков Ю.Л. Формирование технического облика и основные характеристики РДТТ для конверсионных программ. *Сб. тр. Ракетно-космическая техника*, 2004, сер. XIV, вып. 1, ч. I, с. 76–86.

[6] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Effect of Thermomechanical Erosion on Heterogeneous Combustion of Composite Materials in High-Speed Flow. *Combustion and Flame*. 2000, vol. 122, pp. 211–226.

[7] Смирнов Н.Н., Димитриенко И.Д. Исследование конвективного горения в сжимаемом твердом топливе с продольными каналами. *Физика горения и взрыва*, 1990, № 4, с.14–22.

[8] Jackson T.L., Buckmaster J. Heterogeneous Propellant Combustion. *AIAA Journal*, vol. 40, no 6, 2002, pp. 1122–1130.

[9] Glick R.L. Temperature Sensitivity and Erosive Burning. *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 16, no 1, 1979, pp. 58–59.

[10] King M.K. Erosive Burning of Composite Solid Propellants: Experimental and Modeling Studies. *Journal of Spacecraft and Rockets,* vol. 16, no 3, 1979, pp. 154–162.

[11] Langlois G., Gonard R. New Law for Crack Propagation in Solid Propellant Material. *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 16, no 6, 1979, pp. 357–360.

[12] Воропаев И.Д. Воспламенение твердого топлива при прохождении электрического пробоя вдоль его поверхности. *Сб. тр. Ракетно-космическая техника*, 2012, сер. XIV, вып. 1, с. 103–113.

[13] Соркин Р.Е. *Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе: внутренняя баллистика*. Москва, Наука, 1983, 288 с.

[14] Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.П. *Теория ракетных двигателей*. Москва, Машиностроение, 1989, 464 с.

[15] Димитриенко Ю.И., Изотова С.Г., Ануфриев С.Н., Захаров А.А. Численное моделирование трехмерных газодинамических процессов в камерах сгорания РДТТ на основе метода геометрически-адаптивных сеток. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки»*, 2005, № 3, с. 139–146.

[16] Димитриенко Ю.И., Кулагин Ю.А., Ярмола А.П. Моделирование газодинамических процессов в камерах сгорания двигателей с анизотропными твердыми топливами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». Спецвыпуск «Математическое моделирование»*, 2011, с. 100–109.

[17] Арзуманов Ю.Л., Петров Р.А., Халатов Е.М. *Системы газоснабжения и устройства пневмоавтоматики ракетно-космических комплексов*. Москва, Машиностроение, 1997, 464 с.

[18] Арзуманов Ю.Л., Халатов Е.М., Чекмазов В.И. *Математические модели систем пневмоавтоматики*. Москва Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009,296 с.

[19] Апальков Ю.В., Мант Д.И., Мант С.Д. *Отечественные баллистические ракеты морского базирования и их носители*. Санкт-Петербург, Галея Принт, 2006,216 с.

[20] Плюснин А.В., Бондаренко Л.А., Сабиров Ю.Р. Анализ газогидродинамических процессов и методов их расчета на основе опыта предприятия в отработке подводного минометного старта. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация: Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XXXIX Академических чтений по космонавтике,* , 2015, с. 74–83.

[21] Плюснин А.В. Моделирование массорасходных характеристик энергоустройств, обеспечивающих газодинамический выброс летательного аппарата с заданными параметрами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 55–77.

[22] Papa Rao B.V., Subhananda Rao A. Multi Perforated Grain Design For Hot Gas Generator. *51 AGM & Seminar on Advances in Aerospace Technologies (SAAT-2000). Abstracts. Hyderabad, Aeronautical Society of India*, 2000, p.17.

[23] Плюснин А.В. Способ расчета площади поверхности горения пространственного твердотопливного заряда. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные Науки. Спецвыпуск «Математическое Моделирование»*, 2012, с. 86–95.

[24] Алемасов В.Е. *Теория ракетных двигателей*. Москва, Оборонгиз, 1962, 478 с.

[25] Ваулин С.Д., Кириллов В.В., Феофилактов В.И. Математическая модель газодинамических процессов в низкотемпературном газогенераторе с камерой охлаждения. *Сб. тр. Ракетно-космическая техника*, сер. XIV, вып. 1, ч. I, 2004, с. 181–190.

[26] Плюснин А.В., Сабиров Ю.Р. Уточнение формул для прогнозирования потребных тяго-расходных характеристик энергоустройств газодинамическо-

го выброса летательных аппаратов с использованием результатов численного моделирования. *Сб. тез. XLIII Академические чтения по космонавтике*, 2019, с. 300–302.

[27] Курош А.Г. *Лекции по общей алгебре*. Москва, ГИФМЛ, 1962, 396 с.

[28] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука, 1987, 688 с.

[29] Плюснин А.В. Учет эффекта вторичного догорания при расчетах систем газодинамического выброса летательного аппарата. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 55–73.

[30] Плюснин А.В. Проектирование газодинамического выброса ЛА из пускового контейнера с учетом специфики газотермодинамических явлений. *Сб. тр. Ракетные комплексы и ракетно-космические системы. Проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация: Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XLII Академических чтений по космонавтике*, 2018, с. 254–271.

[31] Плюснин А.В. Моделирование параметров наддува свободного пространства контейнера при газодинамическом выбросе летательного аппарата с учетом свойств реального газа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3, с. 53–78.

Статья поступила в редакцию 21.10.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Плюснин А.В. Математические методы оптимального выбора линейно нарастающих по времени массорасходных характеристик энергоустройств, обеспечивающих газодинамический выброс летательных аппаратов с заданными параметрами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 57–85.

Плюснин Андрей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, зам. начальника отдела АО «ВПК «НПО машиностроения», доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор порядка 40 работ по нестационарным задачам гидрогазодинамики и теории упругости.
e-mail: andrey.plusnin@gmail.com

Mathematical methods for optimal selection of linear increasing over time mass-flow characteristics of energy devices ensuring aircraft gas-dynamic ejection with specified parameters

© A.V. Plusnin[1,2]

[1]Joint stock company «Military and industriel corporation», Reutov, 143966, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow,105005, Russia

The paper proposes the theory for optimized selection of linear increasing over time mass-flow rates of energy devices designed for craft gas dynamic ejection from a launch container under the specified restrictions on parameters. Theory is also proposed for optimized selection of geometrical parameters of multigrain tubular charge for implementing these mass-flow rates. A visual geometric interpretation of theoretical developments is presented, and their practical feasibility is confirmed by numerical simulations of parameters of gas-dynamic ejection and internal ballistics processes.

Keywords: gas dynamical ejection, launching pod, craft, solid propellant, tubular grain

REFERENCES

[1] Sokolovsky M.I., Petrenko V.I., Zykov G.A., Lyanguzov S.V. *Upravlyayemye energeticheskie ustanovki na tverdom toplive* [Controlled solid propellant power plants]. Moscow, Machinostroenie Publ., 2003, 464p.

[2] Lipanov A.M., Milekhin Yu.M., eds. *Vnutrennyaya ballistika RDTT* [Internal ballisics of solid propellant engines]. Moscow, Mashinostroyenie Publ., 2007, 504p.

[3] Erokhin B.T. *Teoriya i proektirovanie raketnykh dvigatelei* [Theory and Design of Rocket Engines]. St. Petersburg, Lan Publ., 2015, 608p.

[4] Fakhrutdinov I.Kh., Kotelnikov A.V. *Konstruktsiya i proektirovaniye raketnykh dvigatelei tverdogo topliva* [Structure and Design of Solid Propellant Engines]. Moscow, Machinostroyenie Publ., 1987, 328p.

[5] Zhykov G.A., Ioffe E.I., Ognev S.V., Sokolovsky M.I., Sakov Yu.L. Formirovanie tekhnicheskogo oblika i osnovnye kharakteristiki RDTT dlya konversionnykh programm [Conceptual design and main characteristics of solid propellant engines for the conversion programs]. *Sbornik trudov "Raketno-kosmicheskaya tekhnika"* [Collection of works "Rocket and space technology"]. 2004, ser. XIV, no. 1 (50), part I, pp. 76–86.

[6] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *Combustion and Flame*, 2000, vol. 122, pp. 211–226.

[7] Smirnov N.N., Dimitrienko .I.D. *Fisika goreniya i vzryva — Combustion, Explosion and Shock Waves*, 1990, no. 4, pp. 14–22.

[8] Jackson T.L., Buckmaster J. *AIAA Journal*, 2002, v. 40, no. 6, pp.1122–1130.

[9] Glick R.L. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1979, vol. 16, no.1, pp. 58–59.

[10] King M.K. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1979, vol. 16, no.3, pp. 154–162.

[11] Langlois G., Gonard R. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1979, vol. 16, no. 6, pp. 357–360.

[12] Voropaev I.D. Vosplamenenie tverdogo topliva pri prokhozhdenii elektricheskogo proboya vdol ego poverkhnosti [Solid propellant ignition during electrical breakdown along its surface]. *Sbornik trudov "Raketno-kosmicheskaya tekhnika"* [Collection of works "Rocket and space technology"]. 2012, ser. XIV, no. 1 (58), pp. 103–113.

[13] Sorkin R.E. *Teoriya vnutrikamernykh protsessov v raketnykh sistemakh na tverdom toplive: vnutrennyaya ballisika* [Theory of intrachamber processes in solid propellant systems: Internal ballistics]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 288p.

[14] Alemasov V.E., Dregalin A.F., Tishin A.P. *Teoriya raketnykh dvigatelei* [Rocket Engine Theory]. Moscow, Mashinostroyenie Publ., 1989, 464p.

[15] Dimitrienko Yu.I., Izotova S.G., Anufriev S.N., Zakharov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2005, no. 3, pp.139–146.

[16] Dimitrienko Yu.I., Kulagin Yu.A., Yarmola A.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2011, Spetsialnyy vypusk "Matematicheskoe modelirovanie" [Special issue "Mathematical Modelling"], pp. 100–109.

[17] Arzumanov Yu.L., Petrov R.A., Khalatov E.M. *Systemy gazosnabzheniya i ustroystva pnevmoavtomatiki raketno-kosmocheskikh kompleksov.* [Gas supplying systems and pneumatic devices of space-rocket complexes]. Moscow, Mashinostroyenie Publ., 1997, 464p.

[18] Arzumanov Yu.L., Khalatov E.M., Chekmazov V.I. *Matematicheskie modeli system pnevmoavtomatiki* [Mathematical Models of Pneumatic Automation Systems]. Moscow, BMSTU Publ., 2009, 296p.

[19] Apalkov Yu.V., Mant D.I., Mant S.D. *Otechestvennye ballisticheskie rakety morskogo bazirivaniya i ikh nositeli* [Domestic sea-based ballistic missiles and their carriers]. St. Petersburg, Galeya Print Publ., 2006, 216p.

[20] Plusnin A.V., Bondarenko L.A., Sabirov Yu.R. Analiz gazogidrodinamicheskikh protsessov i metodov ikh rascheta na osnove opyta predpriyatiya v otrabotke podvodnogo minometnogo starta [Analysis of gas-hydrodynamic processes and methods of their calculation based on the experience of the enterprise in the development of an underwater mortar launch]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskie sistemy – proyektirivanie, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya: Trudy sektsii 22 imeni akademika V.N. Chelomeya XXXIX Akademicheskikh chteniy po kosmonavtikye* [Proceedings of the section 22 named after academician V.N. Chelomey of XXXIX Academic readings on space technology: Missile and rocket-space systems – designing, experimental testing, fly tests, operation]. Reutov, JSC ”MIC “Mashinostroyeniya” Publ., 2015, pp. 74–83.

[21] Plusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1, pp. 55–77.

[22] Papa Rao B.V., Subhananda Rao A. Multi Perforated Grain Design For Hot Gas Generator // 51 AGM & Seminar on Advances in Aerospace Technologies (SAAT-2000). Abstracts. – Hyderabad, Aeronautical Society of India, 2000, p. 17.

[23] Plusnin A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2012, Spetsialnyy vypusk “Matematicheskoe modelirovanie” [Special issue “Mathematical Modelling”], pp. 86–95.

[24] Alemasov V.E. *Teoriya raketnykh dvigatelei* [Rocket Engine Theory]. Moscow, Oborongiz Publ., 1962, pp. 478.

[25] Vaulin S.D., Kirillov V.V., Feofilaktov V.I. Matematicheskaya model gazodinamicheskikh protsessov v nizkotemperaturnom gazogeneratore s kameroi okhlazhdeniya [Mathematical model of gas-dynamic processes in a low-temperature gas generator with a cooling chamber]. *Sbornik trudov “Raketno-kosmicheskaya tekhnika”* [Collection of works “Rocket and space technology”]. 2004, ser.XIV, no. 1 (50), part I, c. 181–190.

[26] Plusnin A.V., Sabirov Yu.R. Utochnenie formul dlya prognozirivaniya potrebnykh tyago-raskhodnykh kharakteristik energoustroistv gazodinamicheskogo vybrosa letatelnykh apparatov s ispolzovaniem rezultatov chislennogo modelirovaniya [Refinement of formulas for predicting the required thrust-and-discharge characteristics of power devices for gas-dynamic aircraft ejection using numerical modeling results]. *Sbornik tezisov. XLIII Akademicheskiye chteniya po kosmonavtike* [XLIII Academic readings on space technology. Abstracts]. — Moscow, BMSTU Publ., 2019, pp. 300–302.

[27] Kurosh A.G. *Lektsii po obshchey algebre* [Lectures on general algebra]. Moscow, GIFML Publ., 1962, 396 p.

[28] Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremrnnogo* [Metods of complex variable theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 688p.

[29] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no.3, pp. 55–73.

[30] Plusnin A.V. Proyektirovanie gazodinamicheskogo vybrosa LA iz puskovogo konteynera s uchetom spetsifiki gazotermodinamicheskikh yavleniy [Designing the gas-dynamic ejection of a craft from a launch container, taking into account the specifics of gas-thermodynamic phenomena]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskiye sistemy – proyektirivaniye, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya: Trudy sektsii 22 imeni akademika V.N. Chelomeya XLII Akademicheskikh chteniy po kosmonavtikye [Proceedings of the section 22 named after academician V.N. Chelomey of XLII Academic readings on space technology: Missile and rocket-space systems – designing, experimental testing, fly tests, operation]XLII Akad'emicheskikh cht'eniy po kosmonavt'ikye* [Proceedings of the section 22 of XLII academic readings on space technology: Missile and rocket-space systems – designing, experimental testing, fly tests, operation]. Reutov, JSC "MIC "Mashinostroyeniya" Publ., 2018, pp. 254–271.

[31] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no.3, pp. 53–78.

Plusnin A.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Deputy Director at JSC "MIC "Mashinostroyeniya", Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, author of about 40 research publications in the field of non-stationary problems of hydrodynamics and elasticity theory.
e-mail: andrey.plusnin@gmail.com