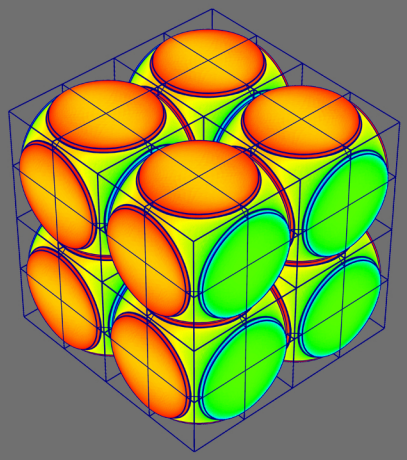
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Шугуан Ли. Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 3.с.19–38.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/198/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.182
31.01.2026 22:58:51

УДК 532.51 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-3-1938

# Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации

© Ю.И. Димитриенко, Шугуан Ли

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Исследована математическая модель многомасштабного процесса фильтрации неньютоновской жидкости в трехмерных периодических пористых средах методом асимптотической гомогенизации. Сформулированы так называемая локальная задача фильтрации в отдельной поре и локальное неньютоновско-вязкое определяющее соотношение. Разработан итерационный метод конечных элементов для решения локальной задачи в 1/8 ячейке периодичности, основанный на физической симметрии структуры. Рассчитаны распределение компонент скорости фильтрации, микрополей давления и неньютоновской вязкости в отдельной поре. На основе закона Дарси проанализирован нелинейный закон фильтрации, показано влияние реологических свойств жидкости на проницаемость.*

***Ключевые слова:*** *метод асимптотической гомогенизации*, *неньютоновская жидкость*, *периодические пористые среды*, *закон фильтрации*, *реологические свойства*

**Введение.** Течение неньютоновской жидкости в пористых средах играет важную роль во многих технических приложениях — получении полимерных композитов, технологии текстильных изделий и производстве бумаги. Таким образом, для оптимизации этих процессов требуется надлежащее описание течения через пористые среды [1–4].

Если жидкость можно считать ньютоновской, прямое применение известного закона Дарси [5] к пористым средам позволяет достаточно хорошо предсказать процесс течения. Основными параметрами пористой среды, определяющими процесс фильтрации, являются вязкость жидкости и компоненты тензора проницаемости. Для того чтобы избежать сложных лабораторных экспериментов, эти компоненты тензора проницаемости могут быть определены с использованием аналитических или численных методов. В литературе отображены теоретические работы по численным расчетам о течении Стокса и газа в периодических пористых средах [5–13]. Выполненные на определенной геометрии, они представляют собой интересные шаги к пониманию течения жидкостей и газов через более сложные пористые среды [14].

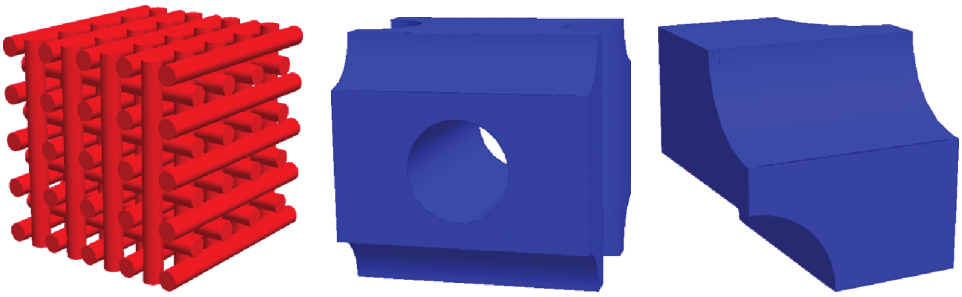
Поскольку неньютоновские жидкости обладают сложными реологическими свойствами, фильтрационные свойства неньютоновских жидкостей в пористых средах также стали довольно сложными. В проведенных теоретических исследованиях [4, 15–17] предложены

законы фильтрации для поперечного ползучего течения степенных жидкостей через волокнистую среду. Однако этих исследований недостаточно для формулировки закона, описывающего процесс фильтрации неньютоновской жидкости при произвольных сложных геометриях пористых сред.

В данной работе мы изучаем характеристики течения неньютоновской жидкости в трехмерной композитной структуре. Для моделирования течения в отдельных порах трехмерной пористой среды использовали метод асимптотической гомогенизации, закон фильтрации неньютоновской жидкости в пористых средах и влияние неньютоновской вязкости на проницаемость.

Цель данной работы — разработать физико-математическую модель локального движения транспорта неньютоновской несжимаемой жидкости в пористой композитной структуре, предложить численный алгоритм для локальных задач неньютоновских жидкостей в ячейке периодичности, проанализировать роль влияния реологических свойств на проницаемость.

**Принятые допущения и геометрическая модель расчетной области.** Принято, что жидкость представляет собой изотропную неньютоновско-вязкую несжимаемую среду. Процесс фильтрации считается изотермическим, плотность массовых сил полагается равной нулю.



*а* *б* *в*

**Рис. 1.** Геометрическая модель расчетной области:
*а* — периодическая пористая структура; *б* — ячейки периодичности;
*в* — 1/8 ячейки периодичности

Рассмотрим модель пористой среды (рис. 1). Микроскопические упругие свойства этой ортогональной пористой структуры были изучены в работах [18–20]. Предполагается, что пористая структура характеризуется периодичностью, отсутствуют тупиковые поры, ячейки периодичности геометрически и физически симметричны относительно координатных плоскостей местной декартовой системы координат. Всю область рассматриваемой трехмерной ортого-

нальной композитной структуры (см. рис. 1), которая занята порами, будем обозначать $V$, а ее границу (поверхность раздела с твердым телом) — $\Sigma$. Введем также следующие обозначения: $V_\xi$ — ячейка периодичности; $V_{\xi p}$ — область, занятая порой; $\Sigma_\xi$ — граница поры с твердым телом.

**Математическая модель течения неньютоновских жидкостей.** Рассмотрим движение несжимаемой неньютоновской жидкости в пористой среде, описываемое системой уравнений [21, 22]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma,$$

где $\rho$ — плотность; $\mathbf{v}$ — скорость; $p$ — давление; $\sigma$ — тензор вязких напряжений; $\otimes$ — тензорное произведение; $\nabla$ — набла-оператор.

Дополним систему (1) определяющими соотношениями неньютоновской жидкости. Для этой цели могут быть рассмотрены разные модели, например модели $\boldsymbol{A_I}$ и $\boldsymbol{A_V}$ фойгтовских изотропных вязких сред [22]. Показано, что для изотропной неньютоновско-вязкой среды фойгтовского типа тензор вязких напряжений можно представить в виде квазилинейной функции от тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$ [23]:

$$\sigma = 2\mu\mathbf{D} = \mu\left(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T\right), \tag{2}$$

где $\mu$ — коэффициент неньютоновской вязкости, зависящий от $I_2(\mathbf{D})$ — второго инварианта тензора скорости деформации [24]:

$$I_2(\mathbf{D}) = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{D}}. \tag{3}$$

Рассмотрим модель Carreau [21, 22, 25], в которой зависимость коэффициента вязкости $\mu(I_2)$ имеет степенной вид

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left(1 + \lambda^2 I_2^2\right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{4}$$

Здесь $\mu_0$ — вязкость с нулевой скоростью сдвига; $\mu_\infty$ — вязкость с бесконечной скоростью сдвига; $\lambda$ — постоянная времени, число Carreau; $n$ — степенной индекс. Поэтому отклонение $n$ от единицы указывает на степень отклонения от ньютоновского поведения. При $n < 1$ мы имеем псевдопластичные жидкости (истончение сдвига), при $n > 1$ — дилатантные жидкости (утолщение сдвига). Псевдопластичные жидкости характеризуются кажущейся вязкостью, кото-

рая уменьшается с увеличением скорости сдвига, однако в жидкости дилатантов кажущаяся вязкость возрастает с увеличением скорости сдвига. Очевидно, что при $\mu_0 = \mu_\infty$, $\lambda = 0$ или $n = 1$ модель Carreau описывает ньютоновские жидкости.

На поверхностях раздела «твердое тело – жидкость» $\Sigma$ характеризует граничное условие прилипания

$$\mathbf{v}\big|_{\Sigma} = 0. \tag{5}$$

В начальный момент времени при $t = t_0$ считается заданным давление

$$p\big|_{t=t_0} = p_0. \tag{6}$$

Введем безразмерную форму:

$$\breve{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0};\ \breve{p} = \frac{p}{p_0};\ \breve{t} = \frac{t}{t_0};\ \breve{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{x_0};\ t_0 = \frac{x_0}{v_0};\ \breve{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{7}$$

где $v_0$ — модуль вектора характерной скорости, м/с; $p_0$ — характерное давление, Па; $x_0$ — характерный размер всей области среды, м; $\mu_0$ — характерное значение вязкости; $t_0$ — характерное время.

Систему уравнений для течения несжимаемой неньютоновской жидкости можно записать в безразмерной форме следующим образом (символ ˘ далее опускаем):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0;$$

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \frac{2}{\mathrm{Eu}\,\mathrm{Re}} \nabla \cdot \left(\mu \mathbf{D}\right); \tag{8}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T\right);$$

$$\mu = s + \left(1 - s\right)\left(1 + \mathrm{Cu}^2 I_2^2\right)^{\frac{n-1}{2}};\ I_2 = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot\cdot \mathbf{D}};\ s = \frac{\mu_\infty}{\mu_0},$$

где $\mathrm{Eu} = \dfrac{p_0}{\rho_0 v_0^2}$ — число Эйлера; $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_0 v_0 x_0}{\mu_0}$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Cu} = \dfrac{\lambda v_0}{x_0}$ — число Carreau.

**Применение метода асимптотического осреднения (МАО) для постановки задачи на ячейке периодичности.** Применение метода асимптотического осреднения для системы уравнений Навье–Стокса

описано в работах [1, 3, 12]. В рассматриваемом случае суть метода состоит в следующем. Пусть введены: $l_0$ — линейный размер ячейки периодичности $V_\xi$ среды, малый параметр $\kappa = \dfrac{l_0}{x_0} << 1$, два типа безразмерных координат — глобальные $\breve{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{x}}{x_0} = (x_1, x_2, x_3)$ и локальные $\boldsymbol{\xi} = \dfrac{\mathbf{x}}{l_0} = \dfrac{\breve{\mathbf{x}}}{\kappa} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Тогда все функции $(f)$, описывающие течение жидкости в порах, можно считать квазипериодическими, т. е. зависящими от времени $t$ локальных $(\boldsymbol{\xi})$ и глобальных $(\breve{\mathbf{x}})$ координат. Дифференцирование этих функций можно осуществлять с помощью правила

$$\nabla f \to \nabla_x f + \frac{1}{\kappa} \nabla_\xi f. \tag{9}$$

Условие квазипериодичности заключается в том, что функции $f$ медленно изменяются по аргументу $x_i$ на расстояниях $x_0$ и являются периодическими относительно аргумента $\xi_j$, т. е.

$$\begin{gathered} f\left(\xi_1 - \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) = f\left(\xi_1 + \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right); \\ f\left(\xi_1, \xi_2 - \frac{1}{2}, \xi_3\right) = f\left(\xi_1, \xi_2 + \frac{1}{2}, \xi_3\right); \\ f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 - \frac{1}{2}\right) = f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 + \frac{1}{2}\right). \end{gathered} \tag{10}$$

Кроме того, вводится операция осреднения функций по области $V_{\xi p}$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\varphi_p} \int\limits_{V_{\xi p}} f dV, \tag{11}$$

где $\varphi_p = \int\limits_{V_{\xi p}} dV$ — пористость среды.

Тогда, выполняя осреднение $p$, $\mathbf{v}$, $\mu$, получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \ \langle p \rangle = \bar{p}, \ \langle \mu \rangle = \bar{\mu}, \tag{12}$$

где $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{p}$, $\bar{\mu}$ — средние значения функций.

Соотношения (12) следует понимать как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в $V_{\xi p}$, либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

Введем соотношения между безразмерными параметрами $\kappa$, $\mathrm{Eu}$, $\mathrm{Re}$ и $\mathrm{Cu}$:

$$\mathrm{Eu}\,\kappa^{e} = \mathrm{Eu}^{0} = O(1);\ \ \mathrm{Re}\,\kappa^{r} = \mathrm{Re}^{0} = O(1);$$

$$\mathrm{Cu}^{0}\kappa^{c} = \mathrm{Cu};\ \ \mathrm{Cu}^{0} = O(1), \tag{13}$$

где $e, r, c \in \mathrm{Z}$ — некоторые целые числа, которые соответствуют разным режимам течения неньютоновской жидкости.

В соответствии с общей концепцией МАО решение задачи (8) находим в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра $\kappa$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^{(0)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \kappa\mathbf{v}^{(1)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \kappa^{2}\mathbf{v}^{(2)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \cdots; \\ p &= p^{(0)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \kappa p^{(1)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \kappa^{2}p^{(2)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \cdots; \\ \mu &= \mu^{(0)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \kappa\mu^{(1)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \kappa^{2}\mu^{(2)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) + \cdots. \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим случай $e = 2$, $r = 0$ и $c = 0$, т. е. $\mathrm{Eu} >> O(1)$, $\mathrm{Re} = O(1)$ и $\mathrm{Cu} = O(1)$. Подставляя разложения (14) в уравнения (8), с учетом правила дифференцирования квазипериодических функций (9) и соотношений (10)–(12) получаем локальную задачу нулевого уровня:

$$\nabla_{\xi}\mathbf{v}^{(0)} = 0;\ \ \nabla_{\xi}p^{(0)} = 0;\ \ \mathbf{v}^{(0)}\Big|_{\Sigma_{\xi sg}} = 0;\ \ \left\langle p^{(0)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t)\right\rangle = \overline{p}. \tag{15}$$

Из уравнения (15) следует, что $p^{(0)}(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) = p^{(0)}(\breve{\mathbf{x}},t)$ не зависит от локальных координат $\boldsymbol{\xi}$. Рассматривая следующий уровень, получаем локальную задачу «на ячейке периодичности» относительно скорости нулевого уровня $\mathbf{v}^{(0)}$ и давления первого уровня $p^{(1)}$:

$$\begin{aligned} &\nabla_{\xi}\mathbf{v}^{(0)} = 0; \\ &-\nabla_{\xi}p^{(1)} + \frac{2}{\mathrm{Eu}^{0}\,\mathrm{Re}^{0}}\nabla_{\xi}\left(\mu^{(0)}\mathbf{D}^{(0)}\right) = \nabla_{x}p^{(0)}; \\ &\mathbf{D}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\xi}\otimes\mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi}\otimes\mathbf{v}^{(0)T}\right); \end{aligned} \tag{16}$$

$$\mu^{(0)} = s + (1-s)\left(1 + \mathrm{Cu}^{02} Y^{(0)}\right)^{\frac{n-1}{2}}; \; Y^{(0)} = 2\mathbf{D}^{(0)} \cdot\cdot \mathbf{D}^{(0)};$$

$$\mathbf{v}^{(0)}\Big|_{\Sigma_\xi} = 0;$$

$$\left\langle p^{(1)} \right\rangle = 0, \; \left[\left[\mathbf{v}^{(0)}\right]\right] = 0, \; \left[\left[p^{(1)}\right]\right] = 0.$$

Неизвестными в этой системе являются функции $\mathbf{v}^{(0)}$ и $p^{(1)}$, градиент давления $\nabla_x p^{(0)}$ рассматривается как один из входных параметров. Символом $\left[\left[\cdot\right]\right]$ обозначены условия периодичности, причем $-\frac{1}{2} \le \xi_i \le \frac{1}{2}$ — область ячейки периодичности $V_{\xi p}$.

**Постановка локальных задач фильтрации с учетом трехмерной структуры пор.** Рассмотрим далее трехмерную пористую структуру, у которой течение среды осуществляется вдоль одной $\xi_\alpha$ из трех осей $O\xi_i$. Поскольку локальная задача является нелинейной, нельзя воспользоваться методом разделения переменных, как в работах [9, 19]. Однако, основываясь на применяемых методах [9, 12, 19], решение задач можно упростить, если воспользоваться следующей теоремой о продолжении решения.

Считается, что ячейка периодичности $V_\xi$ трехмерной структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатной плоскости $O\xi_1\xi_2$, $O\xi_1\xi_3$, $O\xi_2\xi_3$. Тогда решение $\mathbf{v}^{(0)}$, $p^{(1)}$ и $\mu^{(0)}$ локальных задач (16) можно получить с помощью симметричного или асимметричного продолжения функций $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = \left(\tilde{v}_1^{(\alpha)}, \tilde{v}_2^{(\alpha)}, \tilde{v}_3^{(\alpha)}\right)$, $\tilde{p}^{(\alpha)}$ и $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$, определенных в 1/8 ячейки периодичности $V_{\xi p}$ (в первом квадранте $\left\{\xi_i : 0 \le \xi_i \le \frac{1}{2}\right\}$) (рис. 2) и являющихся решениями следующих $L^{(\alpha)}$ локальных задач формы компонента:

$$\tilde{v}_{i/i}^{(\alpha)} = 0;$$

$$-\tilde{p}_{/i}^{(\alpha)} + \frac{2}{\mathrm{Eu}^0 \, \mathrm{Re}^0}\left(\tilde{\mu}^{(\alpha)} \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)}\right)_{/j} = p_{,i}^{(0)} \delta_{i\alpha}; \qquad (17)$$

$$\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)}\right);$$

$$\tilde{\mu}^{(\alpha)} = s + (1-s)\left(1 + Cu^{02}\tilde{Y}^{(\alpha)}\right)^{\frac{n-1}{2}}; \;\; \tilde{Y}^{(\alpha)} = 2\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)}\tilde{D}_{ji}^{(\alpha)},$$

где $f_{,i} = \dfrac{\partial f}{\partial \breve{x}_i}$; $f_{/i} = \dfrac{\partial f}{\partial \xi_i}$; $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

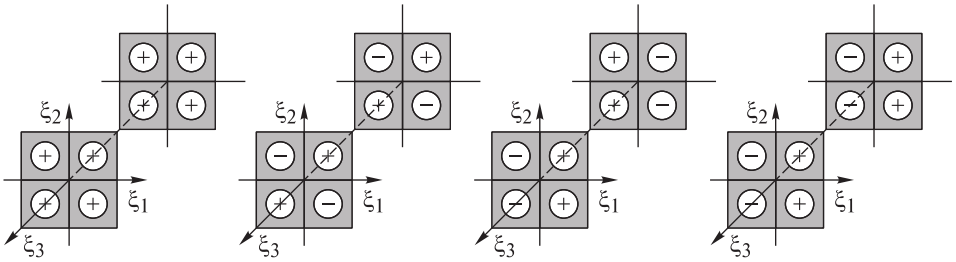



**Рис. 2.** Изменение знаков функций при симметричном или асимметричном продолжении для локальной задачи $L^{(1)}$

Используя принцип симметричного и антисимметричного продолжения решения системы (17), можно записать граничные условия на граничных плоскостях 1/8 ячейки периодичности $V_{\xi p}$, удовлетворяющие условиям периодичности системы (16):

$$\xi_j = 0$$

$$\text{и } \xi_j = \frac{1}{2}: \begin{cases} \tilde{v}_i^{(\alpha)}\left(\delta_{\alpha j} + \delta_{ji} - 2\delta_{\alpha j}\delta_{ji}\right) + \dfrac{\partial \tilde{v}_i^{(\alpha)}}{\partial \xi_j}\left[1 - \left(\delta_{\alpha j} + \delta_{ji} - 2\delta_{\alpha j}\delta_{ji}\right)\right] = 0; \\ \tilde{p}^{(\alpha)}\delta_{\alpha j} + \dfrac{\partial \tilde{p}^{(\alpha)}}{\partial \xi_j}\left(1 - \delta_{\alpha j}\right) = 0; \end{cases}$$

$$\alpha, i, j = \overline{1,3}. \qquad (18)$$

**Численное решение локальных задач.** Решим локальную задачу $L^{(\alpha)}$ (17) на основе метода конечных элементов [26], для чего используем 6-узловой тетраэдр с тремя степенями свободы по скоростям в каждом узле и с одной степенью свободы по давлению в вершинах. Поскольку локальная задача $L^{(\alpha)}$ (17) — нелинейная, для ее решения применим итерационный метод как разновидность метода упругих решений [18–20]. Согласно этому методу определяющие соотношения в системе (17) для вязкости неньютоновских жидкостей линеаризуются:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} =$$
$$= 2\left[s + (1-s)\left(1 + Cu^{02}\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}, \qquad (19)$$

где $\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}} = 2\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ji}^{(\alpha)\{m-1\}}$; $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = \frac{1}{2}\left(\tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)\{m\}} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)\{m\}T}\right)$; $\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}$ и $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}$ — значения тензора неньютоновско-вязких напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{0\}}$ и тензора скорости деформации $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{0\}}$ на $m$-м шаге итерационного цикла; $\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m\}}$ — вязкость неньютоновской жидкости на $m$-м шаге итерации.

Обозначим $\tilde{v}_i^{(\alpha)\{m\}}$ и $\tilde{p}^{(\alpha)\{m\}}$ — соответственно скорость $\tilde{v}_i^{(\alpha)\{0\}}$ и давление $\tilde{p}^{(\alpha)\{0\}}$ на $m$-м шаге итерационного цикла. Тогда на $m$-м шаге итерации вместо задачи (16) получим следующую линеаризованную задачу:

$$\tilde{v}_{i/i}^{(\alpha)\{m\}} = 0;$$
$$-\tilde{p}_{/i}^{(\alpha)\{m\}} + \frac{2}{\mathrm{Eu}^0\,\mathrm{Re}^0}\left(\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}\right)_{/j} = p_{,i}^{(0)}\delta_{i\alpha}. \qquad (20)$$

Проверяем сходимость на $m$-м шаге итерации, если $\left\|\left(X^{\{m+1\}} - X^{\{m\}}\right)\Big/X^{\{m\}}\right\|_\infty \le \varepsilon$, где $\varepsilon \le 10^{-5}$ является очень малым числом; $X = \tilde{v}_i^{(\alpha)}, \tilde{p}^{(\alpha)}, \tilde{\mu}^{(\alpha)}$, затем итерационный процесс завершается.

**Нелинейный закон фильтрации неньютоновской жидкости.** Из системы (16) видно, что решение ($\mathbf{v}^{(0)}$ и $p^{(1)}$) локальной задачи зависит не только от входных данных $\nabla_x p^{(0)}$, но и от вязкости неньютоновской жидкости. Поэтому

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^{(0)}\left(\xi, \nabla_x p^{(0)}\right). \qquad (21)$$

После решения серии задач $L^{(\alpha)}$ (17) методом конечных элементов для всех $\alpha$ проинтегрируем скорости $\mathbf{v}^{(0)}$ по областям, занятым неньютоновской жидкостью. В результате получаем осредненную скорость в локальной задаче фильтрации (16). Тогда эффективный закон фильтрации, связанный с этой скоростью $\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle$ и градиентом давления $\nabla_x p^{(0)}$, можно записать в следующем виде:

$$\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = F\left(\nabla_x p^{(0)}\right). \tag{22}$$

Поскольку ранее был указан алгоритм вычисления осредненных скоростей $\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle$ по заданным значениям градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$, то, следовательно, фактически был указан алгоритм нахождения значения функции (22). Функция (22) может быть указана, если имеется информация о типе геометрической симметрии ячейки периодичности композита и типе анизотропии волокон и матрицы. Ввиду того, что основное допущение симметрии принято, решение всех задач $L^{(\alpha)}$ (17) будет иметь указанный тип симметрии. Это относится и к функции (22). Но перечисленные выше и тождественные преобразования образуют группу ортотропии. Согласно [22], функция (22) будет тензорной функцией, индифферентной относительно группы ортотропии. Но тогда для такой функции можно использовать представление ее в тензорном базисе группы ортотропии, которое имеет вид

$$\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{3} \varphi^{(\alpha)}\left(I_1^p, I_2^p, I_3^p\right)\mathbf{e}_\alpha \text{ или } \left\langle v_i^{(0)} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{3} \varphi^{(\alpha)}\left(I_1^p, I_2^p, I_3^p\right)\delta_{i\alpha}, \tag{23}$$

где $I_i^p$ — скалярные функции от инвариантов градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$,

$$I_i^p = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i}. \tag{24}$$

Функции $\varphi^{(\alpha)}$ фактически представляют собой искомую эффективную проницаемость в пористых средах. Зная значения $\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle$ и $\nabla_x p$, функции $\varphi^{(\alpha)}$ можно вычислить. Для ортогональных полей запишем формулы (23) в явном виде:

$$\varphi^{(\alpha)}\left(I_1^p, I_2^p, I_3^p\right) = \tilde{\varphi}^{(\alpha)}\left(\left|I_1^{p(\alpha)}\right|, \left|I_2^{p(\alpha)}\right|, \left|I_3^{p(\alpha)}\right|\right) I_\alpha^p = \tilde{\varphi}^{(\alpha)} p_{,\alpha}^{(0)}. \tag{25}$$

Поэтому

$$\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\varphi}^{\alpha} \mathbf{e}_\alpha^2\right) \nabla_x p^{(0)}, \tag{26}$$

где $\mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$ — диадный базис; $\mathbf{K} = \sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\varphi}^{(\alpha)} \mathbf{e}_\alpha^2$ — тензор проницаемости.

Из анализа локальных задач видно, что направление осредненной скорости противоположно направлению градиента давления, поэтому

$$\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = -\mathbf{K}\nabla_x p^{(0)}, \tag{27}$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}\left(\left|\nabla_x p^{(0)}\right|\right) = K_j^i$ — тензорная функция, зависящая от модуля $\left|\nabla_x p^{(0)}\right| = \sqrt{\nabla_x p^{(0)} \nabla_x p^{(0)}}$ — градиента давления.

Поскольку функция $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$ для локальных координат имеет симметрию или асимметрию, например, при $\alpha = 1$ функция $\tilde{v}_2^{(1)}$ для координатной плоскости ($O\xi_1\xi_3$ и $O\xi_2\xi_3$) является асимметричной, поэтому $K_2^1 = 0$, функция $\tilde{v}_3^{(\alpha)}$ для этой координатной плоскости ($O\xi_1\xi_2$ и $O\xi_2\xi_3$) также асимметрична, поэтому $K_3^1 = 0$. Следовательно, матрица $\mathbf{K} = \mathrm{diag}\left(K_1^1, K_2^2, K_3^3\right)$ будет диагональной. Стоит отметить, что микроструктура является изотропной, имеем $K_1^1 = K_2^2 = K_3^3 = K$.

Аналогично эффективную вязкость, связанную со осредненной вязкостью $\langle \mu \rangle$ и градиентом давления $\nabla_x p^{(0)}$, можно записать в форме функции

$$\begin{gathered} \langle \mu \rangle = \sum_{\alpha=1}^{3} \eta^{(\alpha)} \left( I_1^{p(\alpha)}, I_2^{p(\alpha)}, I_3^{p(\alpha)} \right) = \\ = \sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\eta}^{(\alpha)} \left( \left| I_1^{p(\alpha)} \right|, \left| I_2^{p(\alpha)} \right|, \left| I_3^{p(\alpha)} \right| \right) p_{,i}^{(0)} \delta_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left\langle \tilde{\mu}^{(\alpha)} \right\rangle. \end{gathered} \tag{28}$$

Для того чтобы изучить реологические свойства жидкостей, введем понятия средней вязкости и пористости:

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{\varphi_p} \int_\Omega \mu dV = \frac{8}{\varphi_p} \int_\Omega \left( \sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\mu}^{(\alpha)} \right) dV; \tag{29}$$

$$\varphi_p = \int_{V_\xi} dV = 8 \int_{V_{\xi p}} dV = 8 \sum_{e=1}^{E} \int_{V_e} dV,$$

где $E$ — число конечных элементов.

Осредненная вязкость описывает макроскопическое свойство реологии. Значение вязкости, отличающейся от единицы, характеризует

прочность неньютоновской жидкости. Очевидно, что осредненная вязкость ньютоновской жидкости равна единице.

**Проверка адекватности математической модели на моделирование ньютоновских жидкостей.** В качестве примера для численного моделирования мы используем бензол ($C_6H_6$). Он входит в состав бензина, является исходным сырьем для производства лекарственных средств, различных пластмасс, синтетической резины, красителей.

*Таблица 1*

**Основные параметры расчета**

| Параметр | Значение | Параметр | Значение |
|---|---|---|---|
| $\mu_0$, Па·с | $6{,}52\cdot10^{-4}$ | $v_0$, м/с | 0,1 |
| $Cu^0$ | 1 | $x_0$, м | 1 |
| $p_0$, Па | $10^5$ | $l_0$, м | $10^{-4}$ |
| к | $10^{-4}$ | $1/\left(Eu^0\,Re^0\right)$ | $6{,}52\cdot10^{-2}$ |

Задача течения ньютоновской жидкости $(n=1)$ для определения свойств композитных структур решается при $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|=1$, пористости — 0,6230, коэффициенте проницаемости $K=0{,}0689$.

*Таблица 2*

**Результаты локальных задач $L^{(1)}$ ньютоновской жидкости**

| Параметр | Значение | |
|---|---|---|
| | минимальное | максимальное |
| $\tilde{p}^{(1)}$, Па | –0,3529 | 0,3442 |
| $\tilde{v}_1^{(1)}$, м/с | 0 | 0,1436 |
| $\tilde{v}_2^{(1)}$, м/с | –0,0774 | 0 |
| $\tilde{v}_3^{(1)}$, м/с | 0 | 0,0776 |
| $\tilde{\mu}^{(1)}$, Па·с | 1 | 1 |

Для установления точности численного алгоритма сначала проверяют изотропность материала. Согласно закону Дарси, закон фильтрации ньютоновской жидкости удовлетворяет линейной зависимости от градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$ (рис. 3).

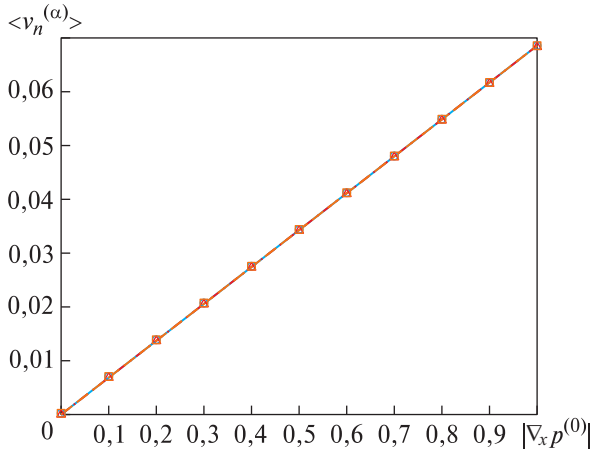



**Рис. 3.** Зависимость средней скорости $\left\langle \tilde{v}_\alpha^{(\alpha)} \right\rangle$ от модуля градиента макродавления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ для ньютоновской жидкости в локальных задачах $L^{(\alpha)}$:
—o— — $L^{(1)}$; -Δ- — $L^{(2)}$; -□- — $L^{(3)}$

Данные рис. 3 согласуются с законом Дарси для изотропных пористых сред.

**Результаты моделирования локальной задачи $L^{(1)}$ псевдопластичной жидкости.** Выполним численное решение локальной задачи (17) при $\left|\nabla_x p^{(0)}\right| = 1$ и $n = 0,25$. Результаты расчетов фильтрации неньютоновской жидкости приведены в табл. 3. По сравнению с результатами для ньютоновской жидкости (см. табл. 2) в процессе фильтрации псевдопластичной жидкости $(n = 0,25)$ импульс давления немного увеличился, скорость течения возросла, вязкость значительно снизилась, пористость осталась неизменной.

*Таблица 3*

**Результаты локальных задач неньютоновской жидкости при $n = 0,25$**

| Параметр | Значение | |
|---|---|---|
| | минимальное | максимальное |
| $\tilde{p}^{(1)}$, Па | –0,3570 | 0,3450 |
| $\tilde{v}_1^{(1)}$, м/с | 0 | 0,2451 |
| $\tilde{v}_2^{(1)}$, м/с | –0,1197 | 0 |
| $\tilde{v}_3^{(1)}$, м/с | 0 | 0,1196 |
| $\tilde{\mu}^{(1)}$, Па·с | 0,3136 | 0,9999 |

Распределение компонентов скорости $\tilde{\mathbf{v}}^{(1)}$, давления $\tilde{p}^{(1)}$ и вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ неньютоновской жидкости показаны на рис. 4. На этом и других аналогичных рисунках введены обозначения для локальных координат $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, $\xi_3 = z$.

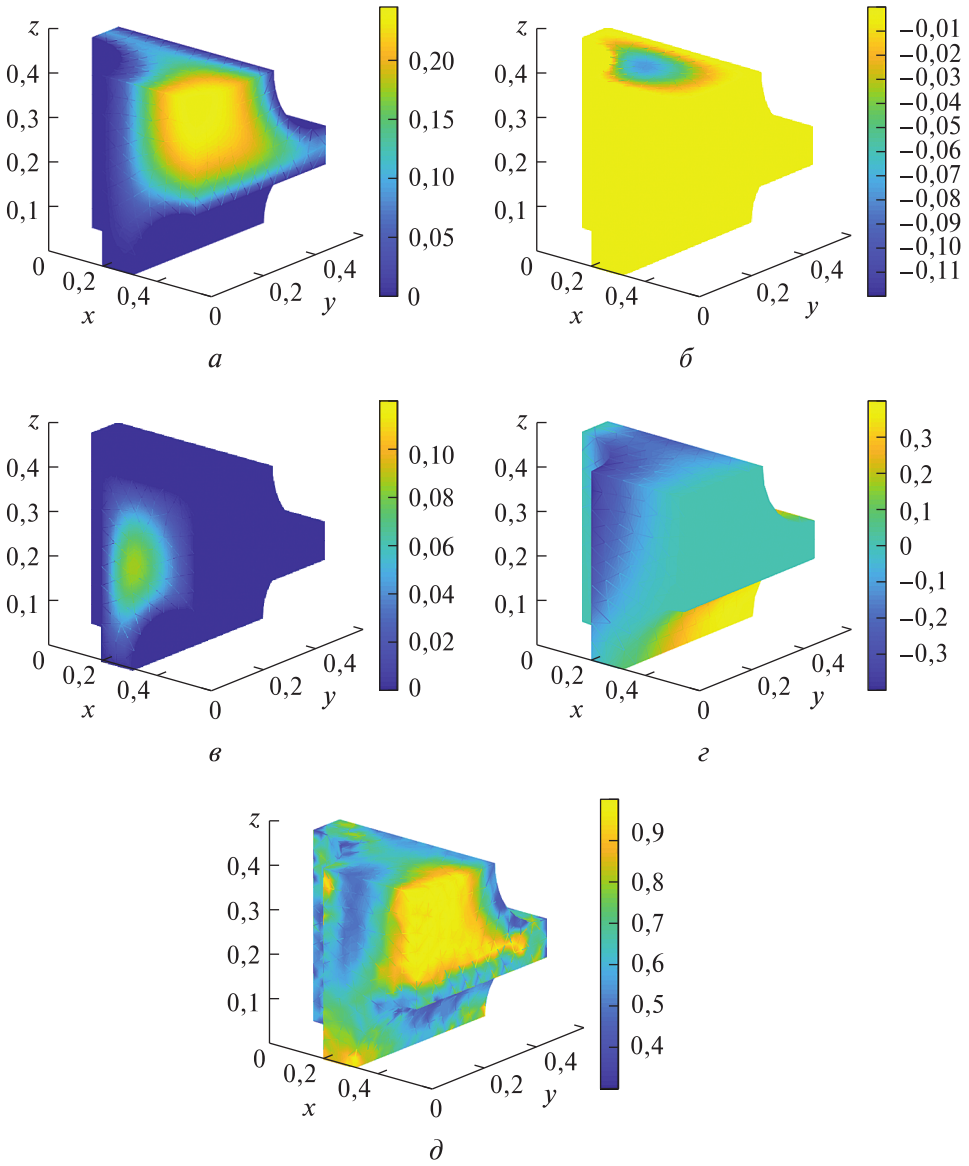



**Рис. 4.** Результаты решения локальной задачи $L^{(1)}$:

*а* — компоненты скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$; *б* — компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$; *в* — компоненты скорости $\tilde{v}_3^{(1)}$; *г* — компоненты давления $\tilde{p}^{(1)}$; *д* — компоненты вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$

**Влияние реологических свойств на проницаемость.** Исследуем связь между средней скоростью $\left\langle \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \right\rangle$, градиентом давления $\nabla_x p^{(0)}$ и степенным индексом $n$, рассмотрим $n \in [0,25, 1,75]$ и $\left|\nabla_x p^{(0)}\right| \in [0,1]$. Зависимости между средней скоростью $\left\langle \tilde{\mathbf{v}}^{(1)} \right\rangle$ и градиентом давления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ при разных степенных индексах $n$ показаны на рис. 5.

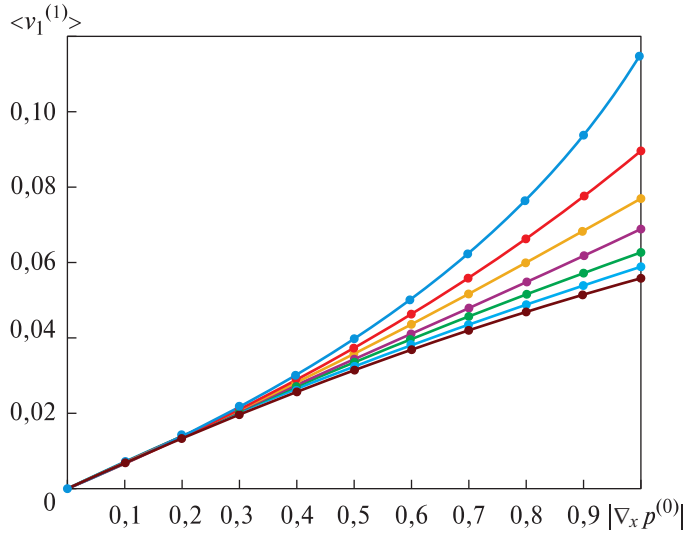



**Рис. 5.** Зависимость средней скорости $\left\langle \tilde{v}_1^{(1)} \right\rangle$ от градиента давления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ и степенного индекса $n$ для локальной задачи $L^{(1)}$:

— $n = 0,25$; — $n = 0,50$; — $n = 0,75$; — $n = 1,00$; — $n = 1,25$; — $n = 1,50$; — $n = 1,75$

Данные, приведенные на рис. 5, показывают, что осредненная скорость $\left\langle \tilde{\mathbf{v}}^{(1)} \right\rangle$ уменьшается с увеличением степенного индекса $n$. При увеличении модуля градиента давления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ средняя скорость возрастает, эффект степенного индекса также увеличивается. Нелинейное соотношение, приведенное на рис. 5, соответствует закону фильтрации (26) неньютоновской жидкости.

На рис. 6 показана взаимосвязь между средней вязкостью $\left\langle \tilde{\mu}^{(1)} \right\rangle$ и модулем $\left| \nabla_x p^{(0)} \right|$ градиента давления при разных степенных индексах $n$. Данные, приведенные на рис. 6, показывают, что средняя вязкость $\left\langle \tilde{\mu}^{(1)} \right\rangle$ возрастает с увеличением степенного индекса. При увеличении модуля $\left| \nabla_x p^{(0)} \right|$ градиента давления влияние степенного индекса на среднюю вязкость также увеличивается.

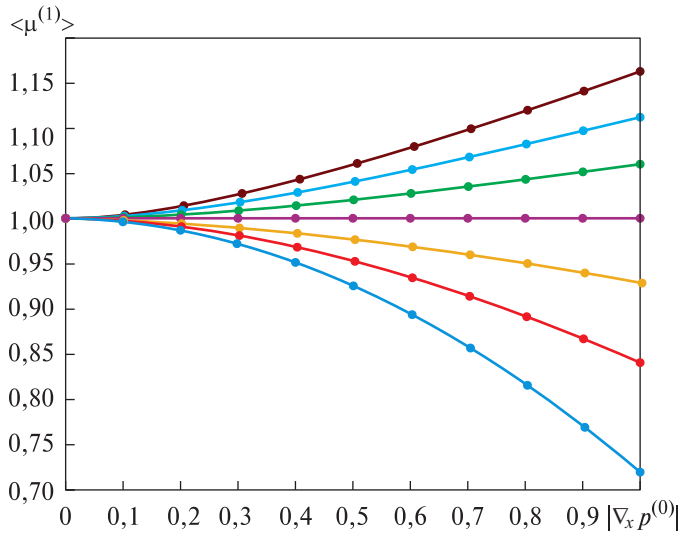



**Рис. 6.** Зависимость средней вязкости $\left\langle \mu^{(1)} \right\rangle$ от градиента давления $\left| \nabla_x p^{(0)} \right|$ и степенного индекса $n$ для локальной задачи $L^{(1)}$:

— $n = 0{,}25$; — $n = 0{,}50$; — $n = 0{,}75$; — $n = 1{,}00$; — $n = 1{,}25$; — $n = 1{,}50$; — $n = 1{,}75$

**Заключение.** Предложенная методика позволяет вычислять распределение микрополей давления, вязкости неньютоновской жидкости и компонент скорости фильтрации в пределах отдельной поры, а также рассчитывать основные параметры пористой среды (пористости и коэффициентов проницаемости) без проведения каких-либо дополнительных эмпирических исследований. Локальная задача, полученная на основе метода асимптотического осреднения, решается методом конечных элементов. Результаты моделирования выявляют роль реологии жидкости. Показано, что средняя скорость фильтрации

уменьшается с увеличением индекса степенного закона, при увеличении модуля градиента макродавления средняя скорость фильтрации возрастает и эффект степенного индекса также увеличивается. Кроме того, средняя вязкость жидкости возрастает с увеличением степенного индекса, при увеличении модуля градиента макродавления влияние степенного индекса на среднюю вязкость и фильтрацию также увеличивается.

**ЛИТЕРАТУРА**


[1] Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. *Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры*. Москва, Едиториал УРСС, 2003, 376 с.

[2] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[3] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composites under high temperatures*. Springer, 2015, 434 p.

[4] Idris Z., Orgéas L., Geindreau C., et al. Microstructural effects on the flow law of power-law fluids through fibrous media. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2004, vol. 12, pp. 995–1015.

[5] Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Богданов И.О. Математическое и численное моделирование процесса фильтрации связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления. *Университетский научный журнал*, 2016, № 19, с. 33–43.

[6] Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, № 12, с. 14–54.

[7] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации жидкого связующего в композитных конструкциях при RTM-методе изготовления. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 3–27.

[8] Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, № 1, 2008, с. 39–56.

[9] Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Боженик П. Конечно-элементное моделирование локальных процессов переноса в пористых средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 3, с. 90–104.

[10] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, № 3,с. 17–38.

[11] Dimitrienko Yu.I. Dynamic transport phenomena in porous polymer materials under impulse thermal effects. *Transport in porous media*, 1999, vol. 35, pp. 299–326.

[12] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Simulation of local transfer in periodic porous media. *European Journal of Mechanics/B-Fluids*, 2013, № 1, pp.174–179.

[13] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K. Numerical solutions for flow in porous media. *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2003, vol. 27, pp. 565–583.

[14] Koponen A., Kandhai D., Hellen E., Alava M., Hoekstra A., Kataja M., Niskanen N., Sloot P., Timonen J. Permeability of three-dimensional random fiber webs. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, pp. 716–719.

[15] Auriault J.L., Royer P., Geindreau C. Filtration law for power-law fluids in anisotropic porous media. *International Journal of Engineering Science*, 2002, vol. 40, pp. 1151–1163.

[16] Orgéas L., Idrisl Z., Geindreau C., et al. Modelling the flow of power-lawfluids through anisotropic porous media at low-pore Reynolds number. *Chemical Engineering Science*, 2006, vol. 61, pp. 4490–4502.

[17] Orgéas L., Geindreau C., Auriault J.L., et al. Upscaling the flow of generalised Newtonian fluids through anisotropic porous media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 145, pp. 15–29.

[18] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Об упругих свойствах композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2009, № 4, с. 96–110.

[19] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, № 1, 2007, с. 26–46.

[20] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.

[21] Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан. Конечно-элементное моделирование неизотермического стационарного течения неньютоновской жидкости в сложных областях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 2, с. 70–95.

[22] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 624 с.

[23] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2*: *Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[24] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and nonlinear tensor functions*. Springer, 2002, 662 p.

[25] Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. John Wiley & Sons, 1987, 649 p.

[26] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The *Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals.* Elsevier, 2005, 733 p.

Статья поступила в редакцию 24.08.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Шугуан Ли. Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации. *Математическое моделирование и численные методы*. 2019. № 3. с. 19–38.

**Димитриенко Юрий Иванович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

**Шугуан Ли —** аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: shuguangli2008@gmail.com

# Modeling non-Newtonian liquid permeability in three-dimensional composite structures on the base of asymptotic homogenization method

© Y.I. Dimitrienko, Sh. Li

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

*The paper describes investigating a mathematical model of the process of a non-Newtonian liquid multiscale filtration in three-dimensional periodic porous media by asymptotic homogenization. The so-called local problem of filtration in a single pore is formulated as well as the local non-Newtonian-viscous defining relationship. An iterative finite element method is developed for solving a local problem in 1/8 periodicity cell, based on the physical symmetry of the structure. The distribution of the components of the filtration rate, pressure micro-fields and non-Newtonian viscosity in a single pore is calculated. On the basis of Darcy's law the nonlinear filtration law is analyzed, the effect of liquid rheological properties on permeability is shown.*

***Keywords:*** *asymptotic homogenization method, non-newtonian liquid, periodic porous media, filtration law, rheological properties*

REFERENCES

[1] Bardzokas D.I., Zobnin A.I. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v kompozitsionnykh materialakh periodicheskoy struktury* [Mathematical modeling of physical processes in composite materials of periodic structure]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003, 376 p.

[2] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[3] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composites under high temperatures*. Springer, 2015, 434 p.

[4] Idris Z, Orgéas L, Geindreau C, Bloch, J.F., Auriault, J.L *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2004, vol. 12, pp. 995–1015.

[5] Dimitrienko Yu.I., Zakharova Yu.V., Bogdanov I.O. *Humanities and Science University Journal*, 2016, no. 19, pp. 33–43.

[6] Dimitrienko Yu.I., Shpakova Yu.V., Bogdanov I.O., Sborshchikov S.V. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, no. 12, pp. 14–54.

[7] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 2, pp. 3–27.

[8] Dimitrienko Yu.I., Ivanov M.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 1, pp. 39–56.

[9] Dimitrienko Yu.I., Levina A.I., Bozhenik P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 3, pp. 90–104.

[10] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, no. 3, pp. 17–38.

[11] Dimitrienko Yu.I. *Transport in porous media*, 1999, vol. 35, pp. 299–326.

[12] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *European Journal of Mechanics/B-Fluids*, 2013, no. 1, pp.174–179.

[13] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, vol. 27, no. 7, pp. 565–583.

[14] Koponen A., Kandhai D., Hellen E., Alava M., Hoekstra A., Kataja M., Niskanen N., Sloot P., Timonen J., *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, no. 4, pp. 716–719.

[15] Auriault J.L, Royer P., Geindreau C. *International Journal of Engineering Science*, 2002, vol. 40, pp. 1151–1163.

[16] Orgéas L., Idrisl Z., Geindreau C., Bloch, J.F., Auriault, J.L. *Chemical Engineering Science*, 2006, vol. 61, pp. 4490–4502.

[17] Orgéas L., Geindreau C., Auriault J.L., Bloch, J.F., Auriault, J.L. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 145, pp. 15–29.

[18] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20.

[19] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 26–46.

[20] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 3–23.

[21] Dimitrienko, Yu.I. Li S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018. № 2. pp. 70–95.

[22] Dimitrienko Yu.I. *Nelineinaya mekhanika sploshnoi sredy* [Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 624 p.

[23] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of continuous media mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[24] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and nonlinear tensor functions*. Springer, 2002, 662 p.

[25] Bird R.B, Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. John Wiley & Sons Publ., 1987, 649 p.

[26] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Publ., 2005, 733 p.

**Dimitrienko Y.I.**, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Director of Research and Education Center of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com.

**Li Sh.,** post-graduate Student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: shuguangli2008@gmail.com.