



# Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Шугуан Ли. Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 3.с.19–38.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/198/>

## Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации

© Ю.И. Димитриенко, Шугуан Ли

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Исследована математическая модель многомасштабного процесса фильтрации неньютоновской жидкости в трехмерных периодических пористых средах методом асимптотической гомогенизации. Сформулированы так называемая локальная задача фильтрации в отдельной поре и локальное неньютоновско-вязкое определяющее соотношение. Разработан итерационный метод конечных элементов для решения локальной задачи в 1/8 ячейке периодичности, основанный на физической симметрии структуры. Рассчитаны распределение компонент скорости фильтрации, микрополей давления и неньютоновской вязкости в отдельной поре. На основе закона Дарси проанализирован нелинейный закон фильтрации, показано влияние реологических свойств жидкости на проницаемость.*

**Ключевые слова:** метод асимптотической гомогенизации, неньютоновская жидкость, периодические пористые среды, закон фильтрации, реологические свойства

**Введение.** Течение неньютоновской жидкости в пористых средах играет важную роль во многих технических приложениях — получении полимерных композитов, технологии текстильных изделий и производстве бумаги. Таким образом, для оптимизации этих процессов требуется надлежащее описание течения через пористые среды [1–4].

Если жидкость можно считать ньютоновской, прямое применение известного закона Дарси [5] к пористым средам позволяет достаточно хорошо предсказать процесс течения. Основными параметрами пористой среды, определяющими процесс фильтрации, являются вязкость жидкости и компоненты тензора проницаемости. Для того чтобы избежать сложных лабораторных экспериментов, эти компоненты тензора проницаемости могут быть определены с использованием аналитических или численных методов. В литературе отображены теоретические работы по численным расчетам о течении Стокса и газа в периодических пористых средах [5–13]. Выполненные на определенной геометрии, они представляют собой интересные шаги к пониманию течения жидкостей и газов через более сложные пористые среды [14].

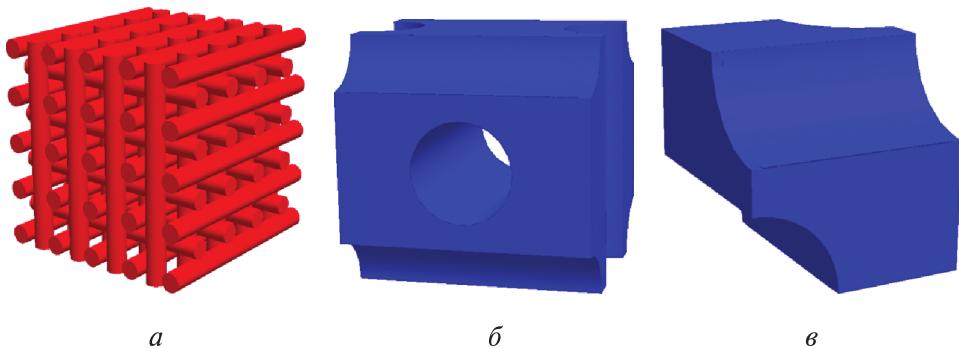
Поскольку неньютоновские жидкости обладают сложными реологическими свойствами, фильтрационные свойства неньютоновских жидкостей в пористых средах также стали довольно сложными. В проведенных теоретических исследованиях [4, 15–17] предложены

законы фильтрации для поперечного ползучего течения степенных жидкостей через волокнистую среду. Однако этих исследований недостаточно для формулировки закона, описывающего процесс фильтрации неньютоновской жидкости при произвольных сложных геометриях пористых сред.

В данной работе мы изучаем характеристики течения неньютоновской жидкости в трехмерной композитной структуре. Для моделирования течения в отдельных порах трехмерной пористой среды использовали метод асимптотической гомогенизации, закон фильтрации неньютоновской жидкости в пористых средах и влияние неньютоновской вязкости на проницаемость.

Цель данной работы — разработать физико-математическую модель локального движения транспорта неньютоновской несжимаемой жидкости в пористой композитной структуре, предложить численный алгоритм для локальных задач неньютоновских жидкостей в ячейке периодичности, проанализировать роль влияния реологических свойств на проницаемость.

**Принятые допущения и геометрическая модель расчетной области.** Принято, что жидкость представляет собой изотропную неньютоновско-вязкую несжимаемую среду. Процесс фильтрации считается изотермическим, плотность массовых сил полагается равной нулю.



**Рис. 1.** Геометрическая модель расчетной области:  
а — периодическая пористая структура; б — ячейки периодичности;  
в — 1/8 ячейки периодичности

Рассмотрим модель пористой среды (рис. 1). Микроскопические упругие свойства этой ортогональной пористой структуры были изучены в работах [18–20]. Предполагается, что пористая структура характеризуется периодичностью, отсутствуют тупиковые поры, ячейки периодичности геометрически и физически симметричны относительно координатных плоскостей местной декартовой системы координат. Всю область рассматриваемой трехмерной ортого-

нальной композитной структуры (см. рис. 1), которая занята порами, будем обозначать  $V$ , а ее границу (поверхность раздела с твердым телом) —  $\Sigma$ . Введем также следующие обозначения:  $V_\xi$  — ячейка периодичности;  $V_{\xi p}$  — область, занятая порой;  $\Sigma_\xi$  — граница поры с твердым телом.

**Математическая модель течения неньютоновских жидкостей.** Рассмотрим движение несжимаемой неньютоновской жидкости в пористой среде, описываемое системой уравнений [21, 22]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

где  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{v}$  — скорость;  $p$  — давление;  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор вязких напряжений;  $\otimes$  — тензорное произведение;  $\nabla$  — набла-оператор.

Дополним систему (1) определяющими соотношениями неньютоновской жидкости. Для этой цели могут быть рассмотрены разные модели, например модели  $A_I$  и  $A_V$  фойгтовских изотропных вязких сред [22]. Показано, что для изотропной неньютоновско-вязкой среды фойгтовского типа тензор вязких напряжений можно представить в виде квазилинейной функции от тензора скоростей деформации  $\mathbf{D}$  [23]:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu \left( \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T \right), \quad (2)$$

где  $\mu$  — коэффициент неньютоновской вязкости, зависящий от  $I_2(\mathbf{D})$  — второго инварианта тензора скорости деформации [24]:

$$I_2(\mathbf{D}) = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}. \quad (3)$$

Рассмотрим модель Carreau [21, 22, 25], в которой зависимость коэффициента вязкости  $\mu(I_2)$  имеет степенной вид

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left( 1 + \lambda^2 I_2^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (4)$$

Здесь  $\mu_0$  — вязкость с нулевой скоростью сдвига;  $\mu_\infty$  — вязкость с бесконечной скоростью сдвига;  $\lambda$  — постоянная времени, число Carreau;  $n$  — степенной индекс. Поэтому отклонение  $n$  от единицы указывает на степень отклонения от ньютоновского поведения. При  $n < 1$  мы имеем псевдопластичные жидкости (истончение сдвига), при  $n > 1$  — дилатантные жидкости (утолщение сдвига). Псевдопластичные жидкости характеризуются кажущейся вязкостью, кото-

рая уменьшается с увеличением скорости сдвига, однако в жидкости дилатантов кажущаяся вязкость возрастает с увеличением скорости сдвига. Очевидно, что при  $\mu_0 = \mu_\infty$ ,  $\lambda = 0$  или  $n = 1$  модель Carreau описывает ньютоновские жидкости.

На поверхностях раздела «твердое тело – жидкость»  $\Sigma$  характеризует граничное условие прилипания

$$\mathbf{v}|_{\Sigma} = 0. \quad (5)$$

В начальный момент времени при  $t = t_0$  считается заданным давление

$$p|_{t=t_0} = p_0. \quad (6)$$

Введем безразмерную форму:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}; \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_0}; \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0}; \quad \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{x_0}; \quad t_0 = \frac{x_0}{v_0}; \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (7)$$

где  $v_0$  — модуль вектора характерной скорости, м/с;  $p_0$  — характерное давление, Па;  $x_0$  — характерный размер всей области среды, м;  $\mu_0$  — характерное значение вязкости;  $t_0$  — характерное время.

Систему уравнений для течения несжимаемой неньютоновской жидкости можно записать в безразмерной форме следующим образом (символ  $\checkmark$  далее опускаем):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0;$$

$$\frac{1}{\text{Eu}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{2}{\text{Eu} \text{Re}} \nabla \cdot (\mu \mathbf{D}); \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T \right);$$

$$\mu = s + (1-s) \left( 1 + \text{Cu}^2 I_2^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}; \quad I_2 = \sqrt{2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}; \quad s = \frac{\mu_\infty}{\mu_0},$$

где  $\text{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}$  — число Эйлера;  $\text{Re} = \frac{\rho_0 v_0 x_0}{\mu_0}$  — число Рейнольдса;

$$\text{Cu} = \frac{\lambda v_0}{x_0} \quad \text{число Carreau.}$$

**Применение метода асимптотического осреднения (МАО) для постановки задачи на ячейке периодичности.** Применение метода асимптотического осреднения для системы уравнений Навье–Стокса

описано в работах [1, 3, 12]. В рассматриваемом случае суть метода состоит в следующем. Пусть введены:  $l_0$  — линейный размер ячейки

периодичности  $V_\xi$  среды, малый параметр  $\kappa = \frac{l_0}{x_0} \ll 1$ , два типа без-

размерных координат — глобальные  $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{x_0} = (x_1, x_2, x_3)$

и локальные  $\xi = \frac{\mathbf{x}}{l_0} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\kappa} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Тогда все функции  $(f)$ , описывающие течение жидкости в порах, можно считать квазипериодическими, т. е. зависящими от времени  $t$  локальных  $(\xi)$  и глобальных  $(\tilde{\mathbf{x}})$  координат. Дифференцирование этих функций можно осуществлять с помощью правила

$$\nabla f \rightarrow \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} f + \frac{1}{\kappa} \nabla_\xi f. \quad (9)$$

Условие квазипериодичности заключается в том, что функции  $f$  медленно изменяются по аргументу  $x_i$  на расстояниях  $x_0$  и являются периодическими относительно аргумента  $\xi_j$ , т. е.

$$\begin{aligned} f\left(\xi_1 - \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) &= f\left(\xi_1 + \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right); \\ f\left(\xi_1, \xi_2 - \frac{1}{2}, \xi_3\right) &= f\left(\xi_1, \xi_2 + \frac{1}{2}, \xi_3\right); \\ f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 - \frac{1}{2}\right) &= f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, вводится операция осреднения функций по области  $V_{\xi_p}$ :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Phi_p} \int_{V_{\xi_p}} f dV, \quad (11)$$

где  $\Phi_p = \int_{V_{\xi_p}} dV$  — пористость среды.

Тогда, выполняя осреднение  $p$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mu$ , получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \quad \langle p \rangle = \bar{p}, \quad \langle \mu \rangle = \bar{\mu}, \quad (12)$$

где  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\mu}$  — средние значения функций.

Соотношения (12) следует понимать как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в  $V_{\xi p}$ , либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

Введем соотношения между безразмерными параметрами  $\kappa$ ,  $\text{Eu}$ ,  $\text{Re}$  и  $\text{Cu}$ :

$$\begin{aligned} \text{Eu}\kappa^e &= \text{Eu}^0 = O(1); \quad \text{Re}\kappa^r = \text{Re}^0 = O(1); \\ \text{Cu}^0\kappa^c &= \text{Cu}; \quad \text{Cu}^0 = O(1), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $e, r, c \in \mathbb{Z}$  — некоторые целые числа, которые соответствуют разным режимам течения неильтоновской жидкости.

В соответствии с общей концепцией МАО решение задачи (8) находим в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^{(0)}(\bar{x}, \xi) + \kappa \mathbf{v}^{(1)}(\bar{x}, \xi) + \kappa^2 \mathbf{v}^{(2)}(\bar{x}, \xi) + \dots; \\ p &= p^{(0)}(\bar{x}, \xi) + \kappa p^{(1)}(\bar{x}, \xi) + \kappa^2 p^{(2)}(\bar{x}, \xi) + \dots; \\ \mu &= \mu^{(0)}(\bar{x}, \xi) + \kappa \mu^{(1)}(\bar{x}, \xi) + \kappa^2 \mu^{(2)}(\bar{x}, \xi) + \dots. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим случай  $e = 2$ ,  $r = 0$  и  $c = 0$ , т. е.  $\text{Eu} \gg O(1)$ ,  $\text{Re} = O(1)$  и  $\text{Cu} = O(1)$ . Подставляя разложения (14) в уравнения (8), с учетом правила дифференцирования квазипериодических функций (9) и соотношений (10)–(12) получаем локальную задачу нулевого уровня:

$$\nabla_\xi \mathbf{v}^{(0)} = 0; \quad \nabla_\xi p^{(0)} = 0; \quad \mathbf{v}^{(0)} \Big|_{\Sigma_{\xi sg}} = 0; \quad \left\langle p^{(0)}(\bar{x}, \xi, t) \right\rangle = \bar{p}. \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что  $p^{(0)}(\bar{x}, \xi, t) = p^{(0)}(\bar{x}, t)$  не зависит от локальных координат  $\xi$ . Рассматривая следующий уровень, получаем локальную задачу «на ячейке периодичности» относительно скорости нулевого уровня  $\mathbf{v}^{(0)}$  и давления первого уровня  $p^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \mathbf{v}^{(0)} &= 0; \\ -\nabla_\xi p^{(1)} + \frac{2}{\text{Eu}^0 \text{Re}^0} \nabla_\xi \left( \mu^{(0)} \mathbf{D}^{(0)} \right) &= \nabla_x p^{(0)}; \\ \mathbf{D}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(0)T} \right); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mu^{(0)} = s + (1-s) \left( 1 + \text{Cu}^{02} Y^{(0)} \right)^{\frac{n-1}{2}}; \quad Y^{(0)} = 2 \mathbf{D}^{(0)} \cdot \mathbf{D}^{(0)};$$

$$\mathbf{v}^{(0)} \Big|_{\Sigma_{\xi}} = 0;$$

$$\langle p^{(1)} \rangle = 0, \quad \left[ \left[ \mathbf{v}^{(0)} \right] \right] = 0, \quad \left[ \left[ p^{(1)} \right] \right] = 0.$$

Неизвестными в этой системе являются функции  $\mathbf{v}^{(0)}$  и  $p^{(1)}$ , градиент давления  $\nabla_x p^{(0)}$  рассматривается как один из входных параметров. Символом  $\left[ \left[ \cdot \right] \right]$  обозначены условия периодичности, причем  $-\frac{1}{2} \leq \xi_i \leq \frac{1}{2}$  — область ячейки периодичности  $V_{\xi_p}$ .

**Постановка локальных задач фильтрации с учетом трехмерной структуры пор.** Рассмотрим далее трехмерную пористую структуру, у которой течение среды осуществляется вдоль одной  $\xi_{\alpha}$  из трех осей  $O\xi_i$ . Поскольку локальная задача является нелинейной, нельзя воспользоваться методом разделения переменных, как в работах [9, 19]. Однако, основываясь на применяемых методах [9, 12, 19], решение задач можно упростить, если воспользоваться следующей теоремой о продолжении решения.

Считается, что ячейка периодичности  $V_{\xi}$  трехмерной структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатной плоскости  $O\xi_1\xi_2$ ,  $O\xi_1\xi_3$ ,  $O\xi_2\xi_3$ . Тогда решение  $\mathbf{v}^{(0)}$ ,  $p^{(1)}$  и  $\mu^{(0)}$  локальных задач (16) можно получить с помощью симметричного или асимметричного продолжения функций  $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = (\tilde{v}_1^{(\alpha)}, \tilde{v}_2^{(\alpha)}, \tilde{v}_3^{(\alpha)})$ ,  $\tilde{p}^{(\alpha)}$  и  $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ , определенных в 1/8 ячейки периодичности  $V_{\xi_p}$  (в первом квадранте  $\left\{ \xi_i : 0 \leq \xi_i \leq \frac{1}{2} \right\}$ ) (рис. 2) и являющихся решениями следующих  $L^{(\alpha)}$  локальных задач формы компонента:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i/i}^{(\alpha)} &= 0; \\ -\tilde{p}_{/i}^{(\alpha)} + \frac{2}{\text{Eu}^0 \text{Re}^0} \left( \tilde{\mu}^{(\alpha)} \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} \right)_{/j} &= p_{,i}^{(0)} \delta_{i\alpha}; \\ \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} &= \frac{1}{2} \left( \tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)} \right); \end{aligned} \quad (17)$$


---

$$\tilde{\mu}^{(\alpha)} = s + (1-s) \left( 1 + C u^{02} \tilde{Y}^{(\alpha)} \right)^{\frac{n-1}{2}}; \quad \tilde{Y}^{(\alpha)} = 2 \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} \tilde{D}_{ji}^{(\alpha)},$$

где  $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ ;  $f_{/i} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ ;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

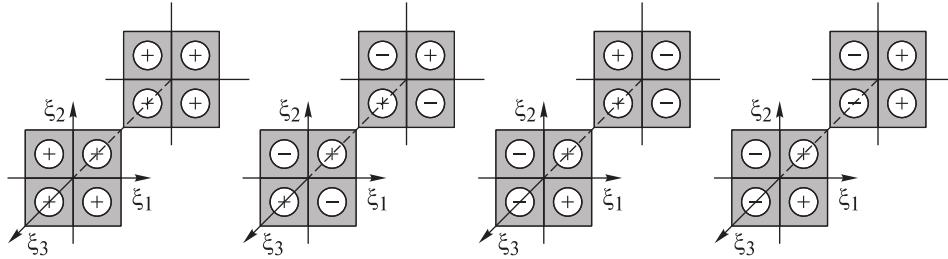


Рис. 2. Изменение знаков функций при симметричном или асимметричном продолжении для локальной задачи  $L^{(1)}$

Используя принцип симметричного и антисимметричного продолжения решения системы (17), можно записать граничные условия на граничных плоскостях 1/8 ячейки периодичности  $V_{\xi_p}$ , удовлетворяющие условиям периодичности системы (16):

$$\begin{aligned} \xi_j &= 0 \\ \text{и } \xi_j &= \frac{1}{2} : \begin{cases} \tilde{v}_i^{(\alpha)} (\delta_{\alpha j} + \delta_{j i} - 2\delta_{\alpha j} \delta_{j i}) + \frac{\partial \tilde{v}_i^{(\alpha)}}{\partial \xi_j} \left[ 1 - (\delta_{\alpha j} + \delta_{j i} - 2\delta_{\alpha j} \delta_{j i}) \right] = 0; \\ \tilde{p}^{(\alpha)} \delta_{\alpha j} + \frac{\partial \tilde{p}^{(\alpha)}}{\partial \xi_j} (1 - \delta_{\alpha j}) = 0; \end{cases} \\ \alpha, i, j &= \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (18)$$

**Численное решение локальных задач.** Решим локальную задачу  $L^{(\alpha)}$  (17) на основе метода конечных элементов [26], для чего используем 6-узловой тетраэдр с тремя степенями свободы по скоростям в каждом узле и с одной степенью свободы по давлению в вершинах. Поскольку локальная задача  $L^{(\alpha)}$  (17) — нелинейная, для ее решения применим итерационный метод как разновидность метода упругих решений [18–20]. Согласно этому методу определяющие соотношения в системе (17) для вязкости неньютоновских жидкостей линеаризуются:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} &= 2\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = \\ &= 2\left[s + (1-s)\left(1 + Cu^{02}\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}},\end{aligned}\quad (19)$$

где  $\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}} = 2\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ji}^{(\alpha)\{m-1\}}$ ,  $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = \frac{1}{2}\left(\tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)\{m\}} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)\{m\}T}\right)$ ;  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}$  и  $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}$  — значения тензора неильтоновско-вязких напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{0\}}$  и тензора скорости деформации  $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{0\}}$  на  $m$ -м шаге итерационного цикла;  $\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m\}}$  — вязкость неильтоновской жидкости на  $m$ -м шаге итерации.

Обозначим  $\tilde{v}_i^{(\alpha)\{m\}}$  и  $\tilde{p}^{(\alpha)\{m\}}$  — соответственно скорость  $\tilde{v}_i^{(\alpha)\{0\}}$  и давление  $\tilde{p}^{(\alpha)\{0\}}$  на  $m$ -м шаге итерационного цикла. Тогда на  $m$ -м шаге итерации вместо задачи (16) получим следующую линеаризованную задачу:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{i/i}^{(\alpha)\{m\}} &= 0; \\ -\tilde{p}_{/i}^{(\alpha)\{m\}} + \frac{2}{\text{Eu}^0 \text{Re}^0} &\left(\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}\right)_{/j} = p_{,i}^{(0)}\delta_{ia}.\end{aligned}\quad (20)$$

Проверяем сходимость на  $m$ -м шаге итерации, если  $\left\|\left(X^{\{m+1\}} - X^{\{m\}}\right)/X^{\{m\}}\right\|_{\infty} \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon \leq 10^{-5}$  является очень малым числом;  $X = \tilde{v}_i^{(\alpha)}, \tilde{p}^{(\alpha)}, \tilde{\mu}^{(\alpha)}$ , затем итерационный процесс завершается.

**Нелинейный закон фильтрации неильтоновской жидкости.** Из системы (16) видно, что решение  $(\mathbf{v}^{(0)}$  и  $p^{(1)})$  локальной задачи зависит не только от входных данных  $\nabla_x p^{(0)}$ , но и от вязкости неильтоновской жидкости. Поэтому

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^{(0)}\left(\xi, \nabla_x p^{(0)}\right). \quad (21)$$

После решения серии задач  $L^{(\alpha)}$  (17) методом конечных элементов для всех  $\alpha$  проинтегрируем скорости  $\mathbf{v}^{(0)}$  по областям, занятых неильтоновской жидкостью. В результате получаем осредненную скорость в локальной задаче фильтрации (16). Тогда эффективный закон фильтрации, связанный с этой скоростью  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  и градиентом давления  $\nabla_x p^{(0)}$ , можно записать в следующем виде:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = F(\nabla_x p^{(0)}). \quad (22)$$

Поскольку ранее был указан алгоритм вычисления осредненных скоростей  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  по заданным значениям градиента давления  $\nabla_x p^{(0)}$ , то, следовательно, фактически был указан алгоритм нахождения значения функции (22). Функция (22) может быть указана, если имеется информация о типе геометрической симметрии ячейки периодичности композита и типе анизотропии волокон и матрицы. Ввиду того, что основное допущение симметрии принято, решение всех задач  $L^{(\alpha)}$  (17) будет иметь указанный тип симметрии. Это относится и к функции (22). Но перечисленные выше и тождественные преобразования образуют группу ортотропии. Согласно [22], функция (22) будет тензорной функцией, индифферентной относительно группы ортотропии. Но тогда для такой функции можно использовать представление ее в тензорном базисе группы ортотропии, которое имеет вид

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \varphi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) \mathbf{e}_\alpha \text{ или } \langle v_i^{(0)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \varphi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) \delta_{i\alpha}, \quad (23)$$

где  $I_i^p$  — скалярные функции от инвариантов градиента давления  $\nabla_x p^{(0)}$ ,

$$I_i^p = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i}. \quad (24)$$

Функции  $\varphi^{(\alpha)}$  фактически представляют собой искомую эффективную проницаемость в пористых средах. Зная значения  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  и  $\nabla_x p$ , функции  $\varphi^{(\alpha)}$  можно вычислить. Для ортогональных полей запишем формулы (23) в явном виде:

$$\varphi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) = \tilde{\varphi}^{(\alpha)} \left( \left| I_1^{p(\alpha)} \right|, \left| I_2^{p(\alpha)} \right|, \left| I_3^{p(\alpha)} \right| \right) I_\alpha^p = \tilde{\varphi}^{(\alpha)} p_{,\alpha}^{(0)}. \quad (25)$$

Поэтому

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \left( \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\varphi}^{(\alpha)} \mathbf{e}_\alpha^2 \right) \nabla_x p^{(0)}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$  — диадный базис;  $\mathbf{K} = \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\varphi}^{(\alpha)} \mathbf{e}_\alpha^2$  — тензор проницаемости.

Из анализа локальных задач видно, что направление осредненной скорости противоположно направлению градиента давления, поэтому

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\mathbf{K} \nabla_x p^{(0)}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{K} \left( \left| \nabla_x p^{(0)} \right| \right) = K_j^i$  — тензорная функция, зависящая от модуля  $\left| \nabla_x p^{(0)} \right| = \sqrt{\nabla_x p^{(0)} \nabla_x p^{(0)}}$  — градиента давления.

Поскольку функция  $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$  для локальных координат имеет симметрию или асимметрию, например, при  $\alpha = 1$  функция  $\tilde{v}_2^{(1)}$  для координатной плоскости  $(O\xi_1\xi_3$  и  $O\xi_2\xi_3)$  является асимметричной, поэтому  $K_2^1 = 0$ , функция  $\tilde{v}_3^{(\alpha)}$  для этой координатной плоскости ( $O\xi_1\xi_2$  и  $O\xi_2\xi_3$ ) также асимметрична, поэтому  $K_3^1 = 0$ . Следовательно, матрица  $\mathbf{K} = \text{diag}(K_1^1, K_2^2, K_3^3)$  будет диагональной. Стоит отметить, что микроструктура является изотропной, имеем  $K_1^1 = K_2^2 = K_3^3 = K$ .

Аналогично эффективную вязкость, связанную со осредненной вязкостью  $\langle \mu \rangle$  и градиентом давления  $\nabla_x p^{(0)}$ , можно записать в форме функции

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \sum_{\alpha=1}^3 \eta^{(\alpha)} \left( I_1^{p(\alpha)}, I_2^{p(\alpha)}, I_3^{p(\alpha)} \right) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\eta}^{(\alpha)} \left( \left| I_1^{p(\alpha)} \right|, \left| I_2^{p(\alpha)} \right|, \left| I_3^{p(\alpha)} \right| \right) p_{,i}^{(0)} \delta_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 \langle \tilde{\mu}^{(\alpha)} \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

Для того чтобы изучить реологические свойства жидкостей, введем понятия средней вязкости и пористости:

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{\varphi_p} \int_{\Omega} \mu dV = \frac{8}{\varphi_p} \int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\mu}^{(\alpha)} \right) dV; \quad (29)$$

$$\varphi_p = \int_{V_{\xi}} dV = 8 \int_{V_{\xi p}} dV = 8 \sum_{e=1}^E \int_{V_e} dV,$$

где  $E$  — число конечных элементов.

Осредненная вязкость описывает макроскопическое свойство реологии. Значение вязкости, отличающейся от единицы, характеризует

прочность неильтоновской жидкости. Очевидно, что осредненная вязкость ньютоновской жидкости равна единице.

**Проверка адекватности математической модели на моделирование ньютоновских жидкостей.** В качестве примера для численного моделирования мы используем бензол ( $C_6H_6$ ). Он входит в состав бензина, является исходным сырьем для производства лекарственных средств, различных пластмасс, синтетической резины, красителей.

Таблица 1

**Основные параметры расчета**

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\mu_0$ , Па·с	$6,52 \cdot 10^{-4}$	$v_0$ , м/с	0,1
$Cu^0$	1	$x_0$ , м	1
$p_0$ , Па	$10^5$	$l_0$ , м	$10^{-4}$
$\kappa$	$10^{-4}$	$1/(Eu^0 Re^0)$	$6,52 \cdot 10^{-2}$

Задача течения ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) для определения свойств композитных структур решается при  $|\nabla_x p^{(0)}| = 1$ , пористости — 0,6230, коэффициенте проницаемости  $K = 0,0689$ .

Таблица 2

**Результаты локальных задач  $L^{(1)}$  ньютоновской жидкости**

Параметр	Значение	
	минимальное	максимальное
$\tilde{p}^{(1)}$ , Па	-0,3529	0,3442
$\tilde{v}_1^{(1)}$ , м/с	0	0,1436
$\tilde{v}_2^{(1)}$ , м/с	-0,0774	0
$\tilde{v}_3^{(1)}$ , м/с	0	0,0776
$\tilde{\mu}^{(1)}$ , Па·с	1	1

Для установления точности численного алгоритма сначала проверяют изотропность материала. Согласно закону Дарси, закон фильтрации ньютоновской жидкости удовлетворяет линейной зависимости от градиента давления  $\nabla_x p^{(0)}$  (рис. 3).

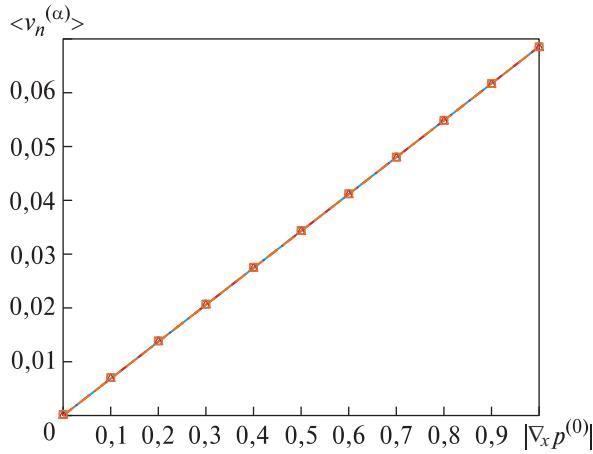


Рис. 3. Зависимость средней скорости  $\langle \tilde{v}_\alpha^{(\alpha)} \rangle$  от модуля градиента макродавления  $|\nabla_x p^{(0)}|$  для ньютоновской жидкости в локальных задачах  $L^{(\alpha)}$ :  
 $\text{---} \circ \text{---} L^{(1)}$ ;  $\text{---} \Delta \text{---} L^{(2)}$ ;  $\text{---} \square \text{---} L^{(3)}$

Данные рис. 3 согласуются с законом Дарси для изотропных пористых сред.

**Результаты моделирования локальной задачи  $L^{(1)}$  псевдопластичной жидкости.** Выполним численное решение локальной задачи (17) при  $|\nabla_x p^{(0)}|=1$  и  $n=0,25$ . Результаты расчетов фильтрации неильтоновской жидкости приведены в табл. 3. По сравнению с результатами для ньютоновской жидкости (см. табл. 2) в процессе фильтрации псевдопластичной жидкости ( $n=0,25$ ) импульс давления немного увеличился, скорость течения возросла, вязкость значительно снизилась, пористость осталась неизменной.

Таблица 3

Результаты локальных задач неильтоновской жидкости при  $n=0,25$

Параметр	Значение	
	минимальное	максимальное
$\tilde{p}^{(1)}$ , Па	-0,3570	0,3450
$\tilde{v}_1^{(1)}$ , м/с	0	0,2451
$\tilde{v}_2^{(1)}$ , м/с	-0,1197	0
$\tilde{v}_3^{(1)}$ , м/с	0	0,1196
$\tilde{\mu}^{(1)}$ , Па·с	0,3136	0,9999

Распределение компонентов скорости  $\tilde{v}^{(1)}$ , давления  $\tilde{p}^{(1)}$  и вязкости  $\tilde{\mu}^{(1)}$  неньютоновской жидкости показаны на рис. 4. На этом и других аналогичных рисунках введены обозначения для локальных координат  $\xi_1 = x$ ,  $\xi_2 = y$ ,  $\xi_3 = z$ .

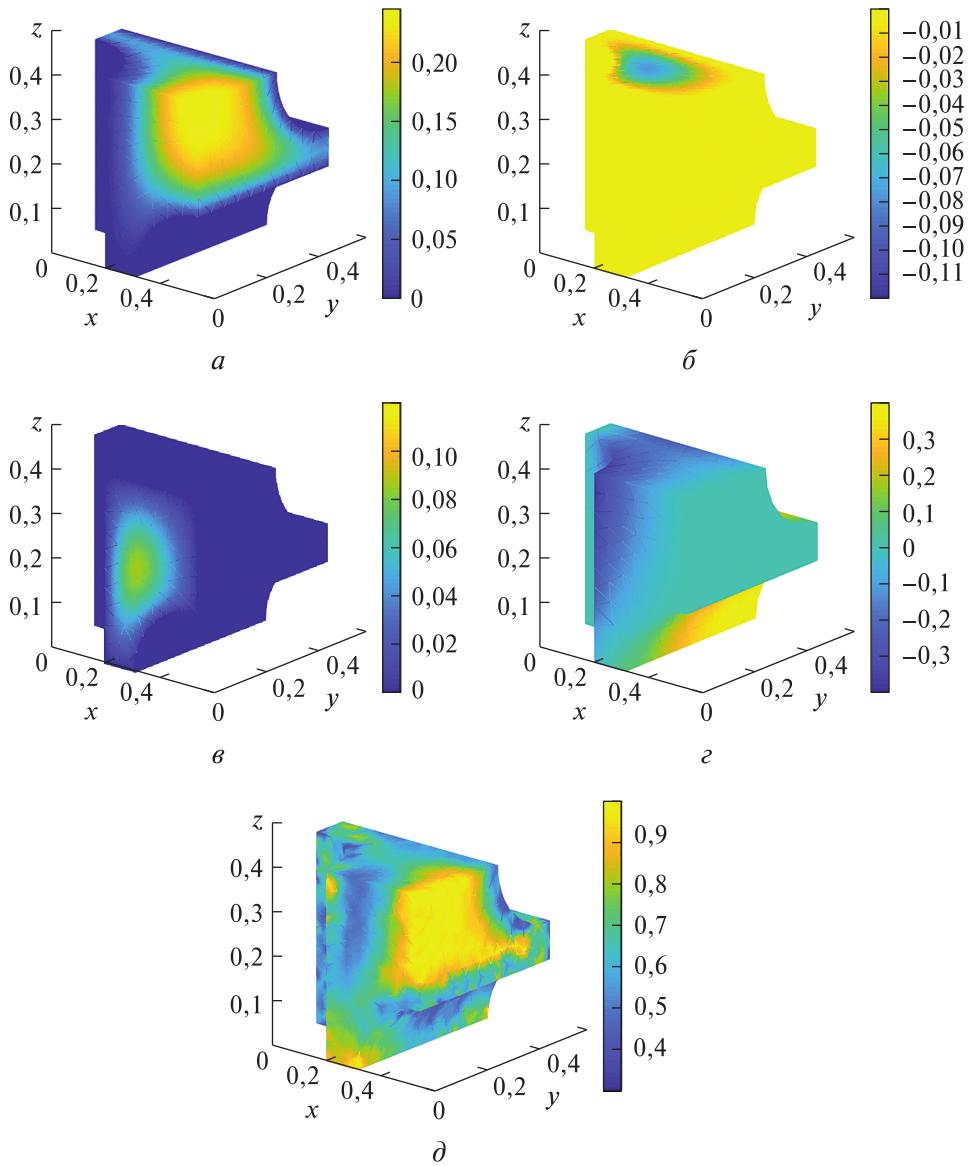
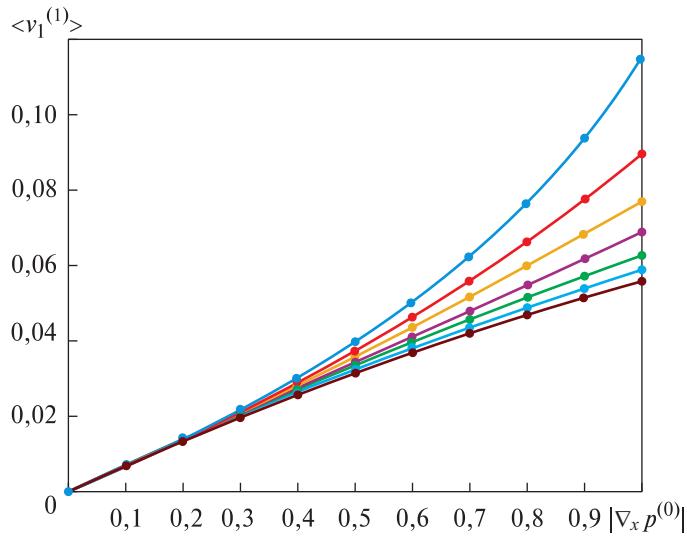


Рис. 4. Результаты решения локальной задачи  $L^{(1)}$ :

$a$  — компоненты скорости  $\tilde{v}_1^{(1)}$ ;  $\delta$  — компоненты скорости  $\tilde{v}_2^{(1)}$ ;  $\varepsilon$  — компоненты скорости  $\tilde{v}_3^{(1)}$ ;  $\varepsilon$  — компоненты давления  $\tilde{p}^{(1)}$ ;  $\vartheta$  — компоненты вязкости  $\tilde{\mu}^{(1)}$

**Влияние реологических свойств на проницаемость.** Исследуем связь между средней скоростью  $\langle \tilde{v}^{(1)} \rangle$ , градиентом давления  $\nabla_x p^{(0)}$  и степенным индексом  $n$ , рассмотрим  $n \in [0, 25, 1, 75]$  и  $|\nabla_x p^{(0)}| \in [0, 1]$ . Зависимости между средней скоростью  $\langle \tilde{v}^{(1)} \rangle$  и градиентом давления  $|\nabla_x p^{(0)}|$  при разных степенных индексах  $n$  показаны на рис. 5.



**Рис. 5.** Зависимость средней скорости  $\langle \tilde{v}_1^{(1)} \rangle$  от градиента давления  $|\nabla_x p^{(0)}|$  и степенного индекса  $n$  для локальной задачи  $L^{(1)}$ :

—  $n = 0,25$ ; —  $n = 0,50$ ; —  $n = 0,75$ ; —  $n = 1,00$ ;  
 —  $n = 1,25$ ; —  $n = 1,50$ ; —  $n = 1,75$

Данные, приведенные на рис. 5, показывают, что осредненная скорость  $\langle \tilde{v}^{(1)} \rangle$  уменьшается с увеличением степенного индекса  $n$ . При увеличении модуля градиента давления  $|\nabla_x p^{(0)}|$  средняя скорость возрастает, эффект степенного индекса также увеличивается. Нелинейное соотношение, приведенное на рис. 5, соответствует закону фильтрации (26) неильтоновской жидкости.

На рис. 6 показана взаимосвязь между средней вязкостью  $\langle \tilde{\mu}^{(1)} \rangle$  и модулем  $|\nabla_x p^{(0)}|$  градиента давления при разных степенных индексах  $n$ . Данные, приведенные на рис. 6, показывают, что средняя вязкость  $\langle \tilde{\mu}^{(1)} \rangle$  возрастает с увеличением степенного индекса. При увеличении модуля  $|\nabla_x p^{(0)}|$  градиента давления влияние степенного индекса на среднюю вязкость также увеличивается.

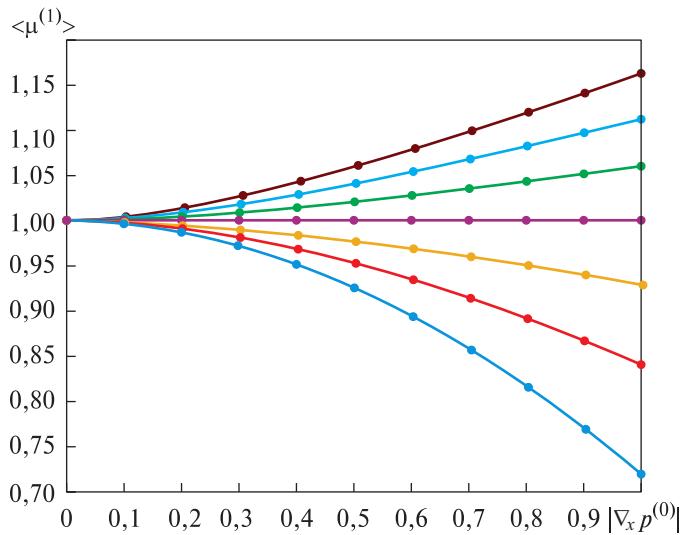


Рис. 6. Зависимость средней вязкости  $\langle \tilde{\mu}^{(1)} \rangle$  от градиента давления  $|\nabla_x p^{(0)}|$  и степенного индекса  $n$  для локальной задачи  $L^{(1)}$ :

—  $n = 0,25$ ; —  $n = 0,50$ ; —  $n = 0,75$ ; —  $n = 1,00$ ;  
 —  $n = 1,25$ ; —  $n = 1,50$ ; —  $n = 1,75$

**Заключение.** Предложенная методика позволяет вычислять распределение микрополей давления, вязкости неильтоновской жидкости и компонент скорости фильтрации в пределах отдельной поры, а также рассчитывать основные параметры пористой среды (пористости и коэффициентов проницаемости) без проведения каких-либо дополнительных эмпирических исследований. Локальная задача, полученная на основе метода асимптотического осреднения, решается методом конечных элементов. Результаты моделирования выявляют роль реологии жидкости. Показано, что средняя скорость фильтрации

уменьшается с увеличением индекса степенного закона, при увеличении модуля градиента макродавления средняя скорость фильтрации возрастает и эффект степенного индекса также увеличивается. Кроме того, средняя вязкость жидкости возрастает с увеличением степенного индекса, при увеличении модуля градиента макродавления влияние степенного индекса на среднюю вязкость и фильтрацию также увеличивается.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. *Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры*. Москва, Едиториал УРСС, 2003, 376 с.
- [2] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.
- [3] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composites under high temperatures*. Springer, 2015, 434 p.
- [4] Idris Z., Orgéas L., Geindreau C., et al. Microstructural effects on the flow law of power-law fluids through fibrous media. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2004, vol. 12, pp. 995–1015.
- [5] Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Богданов И.О. Математическое и численное моделирование процесса фильтрации связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления. *Университетский научный журнал*, 2016, № 19, с. 33–43.
- [6] Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, № 12, с. 14–54.
- [7] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации жидкого связующего в композитных конструкциях при RTM-методе изготовления. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 3–27.
- [8] Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, № 1, 2008, с. 39–56.
- [9] Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Боженик П. Конечно-элементное моделирование локальных процессов переноса в пористых средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 3, с. 90–104.
- [10] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, № 3, с. 17–38.
- [11] Dimitrienko Yu.I. Dynamic transport phenomena in porous polymer materials under impulse thermal effects. *Transport in porous media*, 1999, vol. 35, pp. 299–326.
- [12] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Simulation of local transfer in periodic porous media. *European Journal of Mechanics/B-Fluids*, 2013, № 1, pp. 174–179.
- [13] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K. Numerical solutions for flow in porous media. *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2003, vol. 27, pp. 565–583.

- [14] Koronen A., Kandhai D., Hellen E., Alava M., Hoekstra A., Kataja M., Niskanen N., Sloot P., Timonen J. Permeability of three-dimensional random fiber webs. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, pp. 716–719.
- [15] Auriault J.L., Royer P., Geindreau C. Filtration law for power-law fluids in anisotropic porous media. *International Journal of Engineering Science*, 2002, vol. 40, pp. 1151–1163.
- [16] Orgéas L., Idris Z., Geindreau C., et al. Modelling the flow of power-law fluids through anisotropic porous media at low-pore Reynolds number. *Chemical Engineering Science*, 2006, vol. 61, pp. 4490–4502.
- [17] Orgéas L., Geindreau C., Auriault J.L., et al. Upscaling the flow of generalised Newtonian fluids through anisotropic porous media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 145, pp. 15–29.
- [18] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Об упругих свойствах композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2009, № 4, с. 96–110.
- [19] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, № 1, 2007, с. 26–46.
- [20] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.
- [21] Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан. Конечно-элементное моделирование неизотермического стационарного течения неньютоновской жидкости в сложных областях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 2, с. 70–95.
- [22] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 624 с.
- [23] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
- [24] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and nonlinear tensor functions*. Springer, 2002, 662 p.
- [25] Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. John Wiley & Sons, 1987, 649 p.
- [26] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, 2005, 733 p.

Статья поступила в редакцию 24.08.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Шугуан Ли. Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации. *Математическое моделирование и численные методы*. 2019. № 3. с. 19–38.

**Димитриенко Юрий Иванович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

**Шугуан Ли** — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: shuguangli2008@gmail.com

## Modeling non-Newtonian liquid permeability in three-dimensional composite structures on the base of asymptotic homogenization method

© Y.I. Dimitrienko, Sh. Li

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

*The paper describes investigating a mathematical model of the process of a non-Newtonian liquid multiscale filtration in three-dimensional periodic porous media by asymptotic homogenization. The so-called local problem of filtration in a single pore is formulated as well as the local non-Newtonian-viscous defining relationship. An iterative finite element method is developed for solving a local problem in 1/8 periodicity cell, based on the physical symmetry of the structure. The distribution of the components of the filtration rate, pressure micro-fields and non-Newtonian viscosity in a single pore is calculated. On the basis of Darcy's law the nonlinear filtration law is analyzed, the effect of liquid rheological properties on permeability is shown.*

**Keywords:** asymptotic homogenization method, non-newtonian liquid, periodic porous media, filtration law, rheological properties

### REFERENCES

- [1] Bardzokas D.I., Zobnin A.I. *Matematicheskoe modelirovaniye fizicheskikh protsessov v kompozitsionnykh materialakh periodicheskoy struktury* [Mathematical modeling of physical processes in composite materials of periodic structure]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003, 376 p.
- [2] Bakhalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.
- [3] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composites under high temperatures*. Springer, 2015, 434 p.
- [4] Idris Z, Orgéas L, Geindreau C, Bloch, J.F., Auriault, J.L *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2004, vol. 12, pp. 995–1015.
- [5] Dimitrienko Yu.I., Zakhарова Ю.В., Богданов И.О. *Humanities and Science University Journal*, 2016, no. 19, pp. 33–43.
- [6] Dimitrienko Yu.I., Shpakova Yu.V., Bogdanov I.O., Sborshchikov S.V. *Inzheinernyy zhurnal: Nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, no. 12, pp. 14–54.
- [7] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 2, pp. 3–27.
- [8] Dimitrienko Yu.I., Ivanov M.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 1, pp. 39–56.
- [9] Dimitrienko Yu.I., Levina A.I., Bozhenik P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 3, pp. 90–104.

- [10] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, no. 3, pp. 17–38.
- [11] Dimitrienko Yu.I. *Transport in porous media*, 1999, vol. 35, pp. 299–326.
- [12] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *European Journal of Mechanics/B-Fluids*, 2013, no. 1, pp.174–179.
- [13] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, vol. 27, no. 7, pp. 565–583.
- [14] Koponen A., Kandhai D., Hellen E., Alava M., Hoekstra A., Kataja M., Niskanen N., Sloot P., Timonen J., *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, no. 4, pp. 716–719.
- [15] Auriault J.L., Royer P., Geindreau C. *International Journal of Engineering Science*, 2002, vol. 40, pp. 1151–1163.
- [16] Orgéas L., Idrisl Z., Geindreau C., Bloch, J.F., Auriault, J.L. *Chemical Engineering Science*, 2006, vol. 61, pp. 4490–4502.
- [17] Orgéas L., Geindreau C., Auriault J.L., Bloch, J.F., Auriault, J.L. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 145, pp. 15–29.
- [18] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe modelirovaniye — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20.
- [19] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 26–46.
- [20] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 3–23.
- [21] Dimitrienko, Yu.I. Li S. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018. № 2. pp. 70–95.
- [22] Dimitrienko Yu.I. *Nelineinaya mehanika sploshnoi sredy* [Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 624 p.
- [23] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mehaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of continuous media mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [24] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and nonlinear tensor functions*. Springer, 2002, 662 p.
- [25] Bird R.B, Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. John Wiley & Sons Publ., 1987, 649 p.
- [26] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Publ., 2005, 733 p.

**Dimitrienko Y.I.**, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Director of Research and Education Center of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com.

**Li Sh.**, post-graduate Student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.  
e-mail: shuguangli2008@gmail.com.