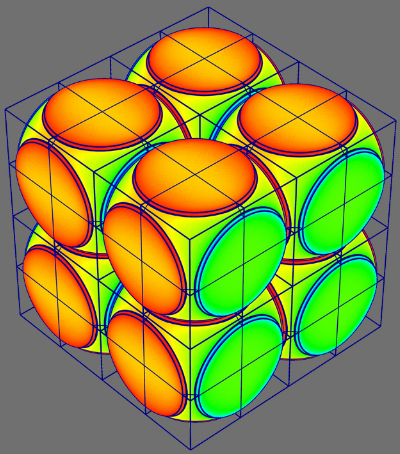
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

УДК 517.956.4 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-4353

# О численном решении обратной задачи теплопроводности с излучением

© А.Ф. Грибов, Е.Н. Жидков, И.К. Краснов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Исследована обратная задача восстановления коэффициента теплопроводности нелинейного параболического уравнения по финальному распределению температуры, служащего математической моделью для задачи определения дефектов конструкций. Предложен алгоритм численного решения поставленной задачи. Рассмотрен численный пример.*

***Ключевые слова:*** *обратная задача, тепловизор, параболическое уравнение, разностная аппроксимация, функционал Тихонова, случайный поиск*

**Введение.** В последнее время уделяется большое внимание задачам неразрушающего контроля конструкций. Одним из вариантов такого контроля является тепловидение. С помощью тепловизора возможно определение положения дефекта в образце [1-9].

Математически эта задача сводится к задаче определения коэффициента при старшей производной. Этим вопросам посвящено большое количество статей [10–19]. Настоящая работа посвящена численному решению обратной задачи.

Сформулируем математическую постановку задачи. Пусть имеется неоднородный стержень длины $l$. На правый конец стержня подается поток тепла. На левом конце стержня происходит теплообмен с внешней средой по закону Стефана–Больцмана. Требуется, зная поток на левом конце отрезка, определить теплофизические характеристики стержня.

**Решение прямой задачи.** Обозначим $u(x,t)$ температуру стержня в момент времени $t$ в точке $x$, $k(x)$ — коэффициент, который может быть кусочно–непрерывным или гладким.

Пусть тепловое поле удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), x\in(0,l), t\in(0,T],\\ u(x,0)=u_0=const>0,\\ -\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\sigma\left(u^4(0,t)-u_0^4\right),\end{gathered}\tag{1}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = q(t).$$

Здесь $\sigma$ — постоянная Стефана–Больцмана, $q(t)$ — заданная неотрицательная функция.

В точках разрыва коэффициента $k(x)$ выполняются условия непрерывности функции $u(x,t)$ и потока этой функции $k(x)u_x(x,t)$.

Для практического решения поставленной задачи дискретизируем задачу (1). Для этого введем равномерную сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j)\}, \quad x_i = ih, \quad t_j = j\tau,$$
$$h = \frac{l}{n}, \quad \tau = \frac{T}{m}.$$

Обозначим $u(x_i, t_j) = u_{ij}$.

Для решения системы (1) применим консервативную схему [16]. Это позволит не учитывать положения точек разрыва коэффициента $k(x)$. Обозначим

$$k_{i+1/2} = [\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}]^{-1},$$
$$W_{i+1/2} = \frac{1}{h}k_{i+1/2}\left(u_{ij} - u_{i+1j}\right),$$
$$\hat{W}_{i+1/2} = \frac{1}{h}k_{i+1/2}\left(u_{ij+1} - u_{i+1j+1}\right).$$

Для разностной задачи получим следующую систему

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\tau}(u_{ij+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h}\left(\hat{W}_{i-\frac{1}{2}} - \hat{W}_{i+\frac{1}{2}} + W_{i-\frac{1}{2}} - W_{i+\frac{1}{2}}\right), \\
u_{i0} = u_0, \\
-\frac{1}{h}(u_{1j+1} - u_{0j+1}) = \sigma\left(u_{0j+1}^4 - u_0^4\right), \\
\frac{1}{h}\left(u_{nj+1} - u_{n-1j+1}\right) = q_j.
\end{gathered} \qquad (2)$$

Задачу решаем методом разностной прогонки [16]. В силу нелинейности левого граничного условия применим правую прогонку.

Для численного счета удобно считать, что $h = \tau$.

Преобразовав первое уравнение (2), получим следующую систему

$$
\begin{gathered}
k_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1j+1} - \left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} + 2h \right) u_{ij+1} + k_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1j+1} + \\
+ k_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1j} - \left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} - 2h \right) u_{ij} + k_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1j} = 0, \\
u_{i0} = u_0, \quad -\frac{1}{h}(u_{1j} - u_{0j)}) = \sigma\left( u_{0j}^4 - u_0^4 \right), \\
\frac{1}{h}\left( u_{nj+1} - u_{n-1j} \right) = q_j.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Предположим, что имеет место зависимость

$$
u_{i+1,\,j+1} = c_{ij+1} u_{ij+1} + d_{ij+1}. \tag{4}
$$

Подставив выражение (4) в уравнение (3), получим

$$
\begin{gathered}
-\left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} \left( 1 - c_{ij+1} \right) + 2h \right) u_{ij+1} + k_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1j+1} + k_{i+\frac{1}{2}} d_{iJ+1} + \\
+ k_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1j} - \left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} - 2h \right) u_{ij} + k_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1j} = 0.
\end{gathered}
$$

Выразим из последнего уравнения $u_{ij+1}$.

$$
\begin{gathered}
u_{ij+1} = \left( k_{i-\frac{1}{2}} \Big/ \left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} \left( 1 - c_{ij+1} \right) + 2h \right) \right) u_{i-1j+1} + \\
+ \frac{\left[ k_{i+\frac{1}{2}} d_{iJ+1} + k_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1j} - \left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} - 2h \right) u_{ij} + k_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1j} \right]}{\left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} \left( 1 - c_{ij+1} \right) + 2h \right)}.
\end{gathered}
$$

Полученная зависимость аналогична формуле (4), поэтому можно записать

$$
\begin{gathered}
c_{i-1j+1} = \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} \left( 1 - c_{ij+1} \right) + 2h \right)}, \\
d_{i-1j+1} = \frac{k_{i+\frac{1}{2}} d_{iJ+1} + k_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1j} - \left( k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} - 2h \right) u_{ij} + k_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1j}}{k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} \left( 1 - c_{ij+1} \right) + 2h}.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Заметим, что коэффициент $c_{ij}$ не зависит от индекса *j*. Поэтому система (5) принимает вид

$$c_{i-1} = \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\left(k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_i\right)+2h\right)},$$

$$d_{i-1\,j+1} = \frac{k_{i+\frac{1}{2}} d_{iJ+1} + +k_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1\,j} - \left(k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} - 2h\right) u_{ij} + k_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1\,j}}{k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_i\right)+2h}. \tag{6}$$

Подставим в (4) $i+1=n$.

$$u_{n,\,j+1} = c_{n-1\,j+1} u_{n-1\,j+1} + d_{n-1\,j+1}.$$

Сравнивая его с правым краевым условием (2), получим, что

$$c_{n-1} = 1, \quad d_{n-1\,j+1} = hq_{j+1}.$$

Из формулы (5) следует, что $0 < c_{n-2} < 1$. Можно доказать, что все коэффициенты $0 < c_i < 1$. Подставим в (4) $i=0$

$$u_{1,\,j+1} = c_0 u_{0\,j+1} + d_{0\,j+1}$$

и сравним с левым краевым условием (2)

$$-\frac{1}{h}(u_{1\,j+1} - u_{0\,j+1)} = \sigma\left(u_{0\,j+1}^4 - u_0^4\right).$$

Решим полученную систему относительно $u_{0\,j+1}$

$$-\frac{1}{h}\left(c_0 u_{0\,j+1} + d_{0\,j+1} - u_{0\,j+1}\right) = \sigma\left(u_{0\,j+1}^4 - u_0^4\right),$$

$$\left(c_0 - 1\right) u_{0\,j+1} + d_{0\,j+1} = -h\sigma\left(u_{0\,j+1}^4 - u_0^4\right),$$

$$u_{0\,j+1} = \frac{h\sigma\left(u_{0\,j+1}^4 - u_0^4\right) + d_{0\,j+1}}{\left(1-c_0\right)}.$$

Для исследования полученного уравнения обозначим

$$u_{0\,j+1} = y,$$

$$y = \frac{h\sigma\left(y^4 - u_0^4\right) + d_{0\,j+1}}{\left(1-c_0\right)} = f\left(y\right). \tag{7}$$

Полученное уравнение можно решать итерационным методом.

1. Решение методом простой итерации

$$y_{n+1} = \frac{h\sigma\left(y_n^4 - u_0^4\right) + d_{0\,j+1}}{\left(1 - c_0\right)}, \ \ y_0 = u_0^j.$$

Условие сходимости полученного итерационного процесса

$$f'\left(u_0^j\right) = \frac{4h\sigma\left(u_0^j\right)^3}{\left(1 - c_0\right)} < 1.$$

2. Преобразуем уравнение для применения метода Ньютона

$$f\left(y\right) = \frac{h\sigma\left(y^4 - u_0^4\right) + d_{0\,j+1}}{\left(1 - c_0\right)} - y,$$

$$f' = \frac{4h\sigma y^3}{\left(1 - c_0\right)} - 1.$$

Итерационный процесс строится по формуле

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\left[h\sigma\left(y_n^4 - u_0^4\right) + d_{0\,j+1} - y_n\left(1 - c_0\right)\right]}{\left[4h\sigma y_n^3 - \left(1 - c_0\right)\right]}, \ \ y_0 = u_0^j.$$

Для применения метода Ньютона требуется выполнение условия

$$2h\sigma y^2 \left|\frac{h\sigma y^4 - \left(1 - c_0\right)y - h\sigma u_0^4 + d_{0\,j+1}}{\left[4h\sigma y^3 - \left(1 - c_0\right)\right]^2}\right| < 1.$$

Подставим в полученную формулу $u_0^j$.

$$2h\sigma(u_0^j)^2 \left|\frac{h\sigma(u_0^j)^4 - \left(1 - c_0\right)u_0^j - h\sigma u_0^4 + d_{0\,j+1}}{\left[4h\sigma(u_0^j)^3 - \left(1 - c_0\right)\right]^2}\right| < 1.$$

Если условие выполнено, то итерационный процесс сходится с квадратичной скоростью.

**Решение обратной задачи.** В качестве обратной рассмотрим следующую задачу. Пусть нам известен поток при $x = 0$

$$-\frac{\partial u\left(0, t\right)}{\partial x} = \varphi\left(t\right),$$

требуется, зная $\varphi(t)$, найти функцию $k(x)$.

Сформулируем разностный аналог поставленной задачи.

Пусть функция $u_{ij}$ — решение задачи (2). Обозначим

$$\varphi_j = \varphi\left(x_j\right),$$
$$-\frac{u_1^j - u_0^j}{h} = \omega_j.$$

Введем невязку

$$N = \sum_{i=0}^{m} (\omega_j - \varphi_j)^2.$$

Требуется найти такой вектор $\bar{k} = (k_{\frac{1}{2}}, k_{\frac{3}{2}}, \ldots, k_{n-\frac{1}{2}})^T$, который минимизирует невязку $N$. В силу некорректности поставленной задачи [17] будем минимизировать функционал Тихонова

$$M^{\beta}\left(\bar{k}\right) = N\left(\bar{k}\right) + +\beta h \sum_{1}^{n-1} \left( \frac{k_{i+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}}}{h} + p_i k_{i-\frac{1}{2}}^2 \right). \tag{8}$$

Здесь $\beta$ — положительная постоянная, $p_i \geq 0$.

Очевидно, что функционал (8) положительно определен, поэтому, у него существует единственный минимум

$$\bar{k}^{\beta} = (k_{\frac{1}{2}}^{\beta}, \ldots, k_{n-\frac{1}{2}}^{\beta})^T. \tag{9}$$

Если набор $\left\{\varphi_j\right\}$ известен точно, то в качестве решения обратной задачи можно взять

$$\bar{k}^0 = \lim_{\beta \to 0} \bar{k}^{\beta} = (k_{\frac{1}{2}}^0, \ldots, k_{n-\frac{1}{2}}^0)^T. \tag{10}$$

Если вместо точного значения $\left\{\varphi_j\right\}$ известны их приближенные значения $\left\{\varphi_j^{\delta}\right\}$, такие что $\sum_{j=0}^{m} (\omega_j - \varphi_j^{\delta})^2 \leq \delta^2$, то в качестве решения обратной задачи берется вектор $\bar{k}^{\beta}$, для которого

$$N = \sum_{0}^{m} (\omega_j - \varphi_j)^2 = \delta^2. \tag{11}$$

В этом случае решение обратной задачи устойчиво [17].

**Численный пример.** В качестве примера рассмотрим решение обратной задачи (минимизации функционала Тихонова) при следующих начальных данных:

$$\sigma = 5{,}669 \cdot 10^{-8}, \ \ q(t) = 1, \ \ T = 2, \ \ u_0 = 20.$$

Число интервалов дискретизации равно 20, $N = 21$, $\tau = h = 0{,}05$.

$$k(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0{,}0;3), \\ 0{,}1, & x \in [0{,}3;0{,}7), \\ 6, & x \in [0{,}7;1]. \end{cases}$$

Минимизация функционала (8), как функции $N-1$ переменной проводилась методом случайного поиска, основой которого является итерационный процесс

$$\bar{k}^{n+1} = \bar{k}^{n} + \alpha_n \frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|}, \quad n = 0,1...,$$

где $\alpha_n > 0$ — величина шага,

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{N-1})^T$$

— реализация $N-1$–мерного случайного вектора.

Начальное приближение $\bar{k}^0 = (5,5,\cdots,5)$. В качестве числа неудачных попыток на очередном шаге найти наименьшее значение минимизируемой функции бралось $N_{max} = 3N$.

В случае, если все попытки были неудачными, шаг поиска $\alpha$ уменьшался, и процедура повторялась до $\alpha < 10^{-4}$. Результаты расчетов приведены на рис.1 и рис. 2.

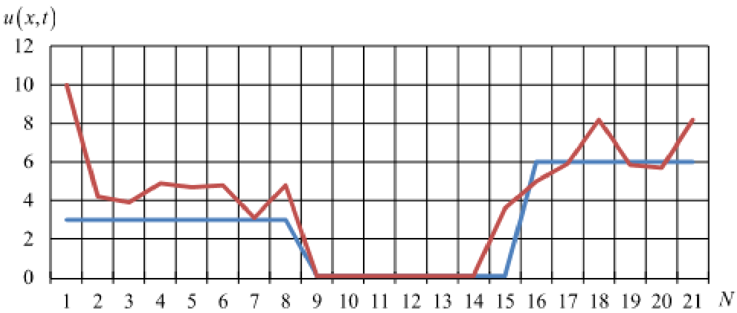



**Рис. 1.** Решение обратной задачи без использования априорной информации:

— значение коэффициента $k(x)$; — решение обратной задачи

На рис. 1. Показаны значения коэффициента $k(x)$, а также результат решения обратной задачи.

На рис. 2 показаны результаты решения обратной задачи 2. Для решения использовалась дополнительная информация $k'(0)=k'(1)=$ $=0$.

В обоих случаях коэффициент $\beta$ брался равным $\beta=0,0001$ и $\beta=0,00001$.

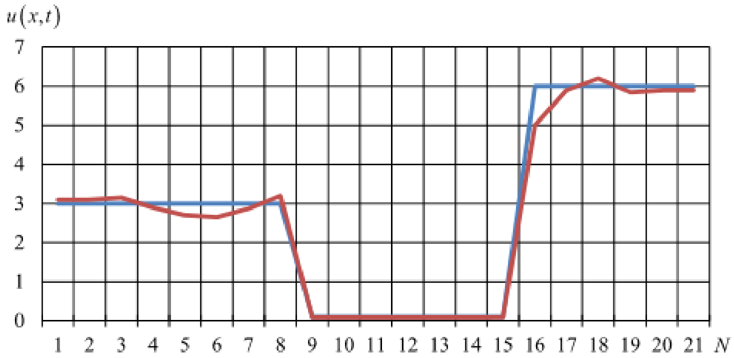



**Рис. 2.** Решение обратной задачи с использованием условия кусочной постоянности коэффициента $k(x)$:

— — значение коэффициента $k(x)$; — — решение обратной задачи

**Выводы.** Описанный выше метод показывает высокую эффективность. При этом следует учесть следующие факты.

1. Решение уравнения (11) представляет из себя сложную задачу. Методы выбора параметра $\beta$, описанные в [17–19] трудоемки. Поэтому, приходится решать обратную задачу при нескольких значениях параметра регуляризации $\beta$. Из полученных результатов выбираем наиболее соответствующего априорным представлениям о решении.

2. Если извечна некоторая информация о решении, ее полезно использовать при произведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Будадин О.Н., Кутюрин В.Ю., Каледин В.О. Диагностика технического состояния сосудов, работающих под внутренним давлением, тепловым (тепловизионным) методом. *Дефектоскопия*, 2008, № 10, с. 16−25.

[2] Вавилов В.П., Нестерчук Д.А., Ширяев В.В., Иванов А.И., Swiderski W. Тепловая (инфракрасная) томография: терминология, основные процедуры и применение для неразрушающего контроля композиционных материалов. *Дефектоскопия*, 2010, № 3, с. 3−16.

[3] Будадин О.Н., Потапов А.И., Колганов В.И., Троицкий−Марков Т.Е., Абрамова Е.В. *Тепловой неразрушающий контроль изделий*. Москва, Наука, 2002, 473 с.

[4] Мацевитый Ю.М. *Обратные задачи теплопроводности: в 2 т.* Киев, Наукова Думка, 2002, 408 с.
[5] Мацевитый Ю.М., Костиков А.О. Математические аспекты решения геометрических обратных задач теплопроводности: проблемы и пути их решения. *Проблемы машиностроения*, 2007, т. 10, № 3, с. 27–34
[6] Cheng C.-Y. Shape Identification by Inverse Heat Transfer Method. *Journal Heat Transfer*, 2003, vol. 125(2), pp. 224–231.
[7] Chun-Yun Wu, Wen-Chang Lin Using genetic algorithms to detect interfacial cracks on the basis of the thermal resistance of multilayer materials. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2007, vol. 43, iss. 7, pp. 474–483.
[8] Huang C.H., Shih C.C. Identify the Interfacial Configurations in a Multiple Region Domain Problem. *Journal Thermophysics Heat Transfer*, 2005, vol. 19, iss. 4, pp. 533–641.
[9] Димитриенко Ю.И., Николаев А.А., Краснов И.К. Разработка автоматизированных технологий неразрушающего контроля для оценки остаточного ресурса неметаллических конструкций. *Сборник трудов Четвертой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности»*. 2007, т. 11, с. 326−329.
[10] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics*. New−York, Marcel Dekker, Inc., 1999, 724 p.
[11] Kozhanov A.I. *Composite type equations and inverse problems*. Utrecht, VSP Publ., 1999, 171 p.
[12] Ivanchov M. *Inverse problems for equation of parabolic type*. Lviv, WNTL Publ., 2003.
[13] Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin, Springer−Verlag, 1998, 346 p.
[14] Isakov V. The inverse problem of option pricing. Recent Developments in Theory and Numerics. *International Conference on Inverse problems*, 2002, pp. 47–55.
[15] Гольдман Н.Л. Обратные задачи с финальным переопределением. *Доклады академии наук*, 2011, т. 438, № 2, с. 162–167.
[16] Калиткин Н.Н. *Численные методы*. Москва, Наука, 1978, 512 с.
[17] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1979, 223 с.
[18] Краснов И.К., Зубарев К.М., Иванова Т.Л. Решение прямой и обратной задачи восстановления электрофизических параметров по результатам зондирования переменным током. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 1, с. 41–54.
[19] Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной задачи теплопроводности. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9 (21). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-964

Статья поступила в редакцию 14.07.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной задачи теплопроводности с излучением. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 43–53.

**Грибов Александр Федорович –** канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: alexander-gribov@list.ru

**Жидков Евгений Николаевич** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: ENZhidkov@yandex.ru

**Краснов Игорь Константинович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области решения обратных задач.
e-mail: igorkrsnv@yandex.ru

# On the numerical solution of the inverse problem of heat conduction with radiation

© A.F. Gribov, E.N. Zhidkov, I.K. Krasnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The inverse problem of restoring the thermal conductivity coefficient of a nonlinear parabolic equation by the final temperature distribution, which serves as a mathematical model for the problem of determining structural defects, is investigated. An algorithm for numerical solution of the problem is proposed. A numerical example is considered.*

***Keywords:*** *inverse problem, parabolic equation, approximation, Tikhonov functional, random search*

REFERENCES

[1] Budadin O.N., Kutyurin V.Yu., Kaledin V.O. Diagnostics of the technical condition of pressure vessels operating under internal pressure by a thermal (thermal imaging) method. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2008, vol. 44, no. 10, pp. 669−675.

[2] Vavilov V.P., Nesteruk D.A., Shiryaev V.V., Ivanov A.I., Swiderski W. Thermal (infrared) tomography: Terminology, principal procedures, and application to nondestructive testing of composite materials. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 151−161.

[3] Budadin O.N., Potapov A.I., Kolganov V.I., Troickij−Markov T.E., Ab-ramova E.V. *Teplovoj nerazrushayushchij kontrol' izdelij* [Thermal non-destructive testing of products]. Moscow, Nauka Publ., 2002, 473 p.

[4] Macevityj Yu.M. *Obratnye zadachi teploprovodnosti: v 2 t.* [Inverse problems of thermal conductivity]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 2002, 408 p.

[5] Macevityj Yu.M., Kostikov A.O. *Problemy mashinostroeniya — Problems of mechanical engineering*, 2007, vol. 10, no. 3, pp. 27–34

[6] Cheng C.-Y. Shape Identification by Inverse Heat Transfer Method. *Journal Heat Transfer*, 2003, vol. 125(2), pp. 224–231.

[7] Chun-Yun Wu, Wen-Chang Lin Using genetic algorithms to detect interfacial cracks on the basis of the thermal resistance of multilayer materials. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2007, vol. 43, iss. 7, pp. 474–483.

[8] Huang C.H., Shih C.C. Identify the Interfacial Configurations in a Multiple Region Domain Problem. *Journal Thermophysics Heat Transfer*, 2005, vol. 19, iss. 4, pp. 533–641.

[9] Dimitrienko Yu.I., Nikolaev A.A., Krasnov I.K. *Razrabotka avtomatizirovannyh tekhnologij nerazrushayushchego kontrolya dlya ocenki ostatochnogo resursa nemetallicheskih konstrukcij* [Development of automated nondestructive testing

technologies for evaluation of residual life of nonmetallic structures]. *Sbornik trudov Chetvertoj mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Issledovanie, razrabotka i primenenie vysokih tekhnologij v promyshlennosti»* [Proceedings of the Fourth international scientific and practical conference "Research, development and application of high technologies in industry"]. 2007, vol. 11, pp. 326−329.

[10] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics*. New−York, Marcel Dekker, Inc., 1999, 724 p.

[11] Kozhanov A.I. *Composite type equations and inverse problems*. Utrecht, VSP Publ., 1999, 171 p.

[12] Ivanchov M. *Inverse problems for equation of parabolic type*. Lviv, WNTL Publ., 2003.

[13] Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin, Springer−Verlag, 1998, 346 p.

[14] Isakov V. The inverse problem of option pricing. Recent Developments in Theory and Numerics. *International Conference on Inverse problems*, 2002, pp. 47–55.

[15] Goldman, N.L. *Doklady akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2011, vol. 438, no. 2, pp. 162–167.

[16] Kalitkin N.N. *Chislennye metody* [Numerical methods] Moscow, Nauka Publ., 1978, 512 p.

[17] Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnyh zadach [Methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 223 p.

[18] Krasnov I.K., Zubarev K.M., Ivanova T.L. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 1, pp. 41–54.

[19] Gribov A.F., Zhidkov E.N., Krasnov I.K. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9 (21). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-964

**Gribov A.F.**, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. professor, Department of Mathematical modeling, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: alexander-gribov@list.ru

**Zhidkov E.N.**, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: ENZhidkov@yandex.ru

**Krasnov I.K.**, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. The author of over 50 research publications in the field of solving inverse problems.
e-mail: igorkrsnv@yandex.ru