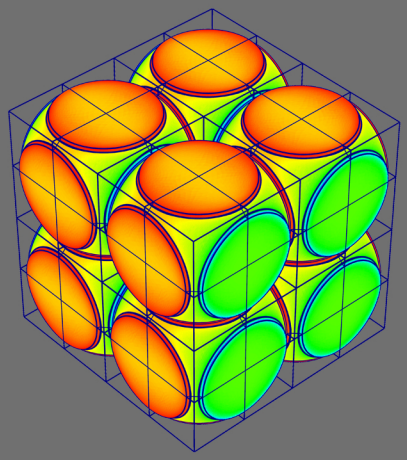
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной зада-чи теплопроводности с излучением. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 1, с. 43–53.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/187/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.62
22.11.2026 19:46:25

УДК 517.956.4 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-4353

О численном решении обратной задачи теплопроводности с излучением

© А.Ф. Грибов, Е.Н. Жидков, И.К. Краснов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследована обратная задача восстановления коэффициента теплопроводности нелинейного параболического уравнения по финальному распределению температуры, служащего математической моделью для задачи определения дефектов конструкций. Предложен алгоритм численного решения поставленной задачи. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: *обратная задача, тепловизор, параболическое уравнение, разностная аппроксимация, функционал Тихонова, случайный поиск*

Введение. В последнее время уделяется большое внимание задачам неразрушающего контроля конструкций. Одним из вариантов такого контроля является тепловидение. С помощью тепловизора возможно определение положения дефекта в образце [1-9].

Математически эта задача сводится к задаче определения коэффициента при старшей производной. Этим вопросам посвящено большое количество статей [10–19]. Настоящая работа посвящена численному решению обратной задачи.

Сформулируем математическую постановку задачи. Пусть имеется неоднородный стержень длины l. На правый конец стержня подается поток тепла. На левом конце стержня происходит теплообмен с внешней средой по закону Стефана–Больцмана. Требуется, зная поток на левом конце отрезка, определить теплофизические характеристики стержня.

Решение прямой задачи. Обозначим $u(x,t)$ температуру стержня в момент времени t в точке x, $k(x)$ — коэффициент, который может быть кусочно–непрерывным или гладким.

Пусть тепловое поле удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right), x \in (0,l), t \in (0,T],$$
$$u(x,0) = u_0 = const > 0, \qquad (1)$$
$$-\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma\left(u^4(0,t) - u_0^4 \right),$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = q(t).$$

Здесь σ — постоянная Стефана–Больцмана, $q(t)$ — заданная неотрицательная функция.

В точках разрыва коэффициента $k(x)$ выполняются условия непрерывности функции $u(x,t)$ и потока этой функции $k(x)u_x(x,t)$.

Для практического решения поставленной задачи дискретизируем задачу (1). Для этого введем равномерную сетку

$$\omega_{h\tau} = \left\{\left(x_i, t_j\right)\right\}, \quad x_i = ih, \quad t_j = j\tau,$$

$$h = \frac{l}{n}, \quad \tau = \frac{T}{m}.$$

Обозначим $u\left(x_i, t_j\right) = u_{ij}$.

Для решения системы (1) применим консервативную схему [16]. Это позволит не учитывать положения точек разрыва коэффициента $k(x)$. Обозначим

$$k_{i+1/2} = [\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}]^{-1},$$

$$W_{i+1/2} = \frac{1}{h} k_{i+1/2}\left(u_{ij} - u_{i+1j}\right),$$

$$\hat{W}_{i+1/2} = \frac{1}{h} k_{i+1/2}\left(u_{ij+1} - u_{i+1j+1}\right).$$

Для разностной задачи получим следующую систему

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\tau}(u_{ij+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h}\left(\hat{W}_{i-\frac{1}{2}} - \hat{W}_{i+\frac{1}{2}} + W_{i-\frac{1}{2}} - W_{i+\frac{1}{2}}\right), \\
u_{i0} = u_0, \\
-\frac{1}{h}(u_{1j+1} - u_{0j+1)} = \sigma\left(u_{0j+1}^4 - u_0^4\right), \\
\frac{1}{h}\left(u_{nj+1} - u_{n-1j+1}\right) = q_j.
\end{gathered} \tag{2}$$

Задачу решаем методом разностной прогонки [16]. В силу нелинейности левого граничного условия применим правую прогонку.

Для численного счета удобно считать, что $h = \tau$.

Преобразовав первое уравнение (2), получим следующую систему

$$
\begin{gathered}
k_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1j+1}-\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}+2h\right)u_{ij+1}+k_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1j+1}+\\
+k_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1j}-\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}-2h\right)u_{ij}+k_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1j}=0,\\
u_{i0}=u_0,\ -\frac{1}{h}(u_{1j}-u_{0j)}=\sigma\left(u_{0j}^4-u_0^4\right),\\
\frac{1}{h}\left(u_{nj+1}-u_{n-1j}\right)=q_j.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Предположим, что имеет место зависимость

$$u_{i+1,\,j+1}=c_{ij+1}u_{ij+1}+d_{ij+1}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в уравнение (3), получим

$$
\begin{gathered}
-\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_{ij+1}\right)+2h\right)u_{ij+1}+k_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1j+1}+k_{i+\frac{1}{2}}d_{iJ+1}+\\
+k_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1j}-\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}-2h\right)u_{ij}+k_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1j}=0.
\end{gathered}
$$

Выразим из последнего уравнения u_{ij+1}.

$$
\begin{gathered}
u_{ij+1}=\left(k_{i-\frac{1}{2}}\Big/\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_{ij+1}\right)+2h\right)\right)u_{i-1j+1}+\\
+\frac{\left[k_{i+\frac{1}{2}}d_{iJ+1}+k_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1j}-\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}-2h\right)u_{ij}+k_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1j}\right]}{\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_{ij+1}\right)+2h\right)}.
\end{gathered}
$$

Полученная зависимость аналогична формуле (4), поэтому можно записать

$$
\begin{gathered}
c_{i-1j+1}=\frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_{ij+1}\right)+2h\right)},\\
d_{i-1j+1}=\frac{k_{i+\frac{1}{2}}d_{iJ+1}+k_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1j}-\left(k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}-2h\right)u_{ij}+k_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1j}}{k_{i-\frac{1}{2}}+k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_{ij+1}\right)+2h}.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Заметим, что коэффициент c_{ij} не зависит от индекса j. Поэтому система (5) принимает вид

$$c_{i-1} = \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\left(k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_i\right) + 2h\right)},$$
$$d_{i-1j+1} = \frac{k_{i+\frac{1}{2}} d_{iJ+1} + + k_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1j} - \left(k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}} - 2h\right) u_{ij} + k_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1j}}{k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}}\left(1-c_i\right) + 2h}. \quad (6)$$

Подставим в (4) $i+1=n$.

$$u_{n,j+1} = c_{n-1j+1} u_{n-1j+1} + d_{n-1j+1}.$$

Сравнивая его с правым краевым условием (2), получим, что

$$c_{n-1} = 1, \quad d_{n-1j+1} = hq_{j+1}.$$

Из формулы (5) следует, что $0 < c_{n-2} < 1$. Можно доказать, что все коэффициенты $0 < c_i < 1$. Подставим в (4) $i = 0$

$$u_{1,j+1} = c_0 u_{0j+1} + d_{0j+1}$$

и сравним с левым краевым условием (2)

$$-\frac{1}{h}(u_{1j+1} - u_{0j+1)} = \sigma\left(u_{0j+1}^4 - u_0^4\right).$$

Решим полученную систему относительно u_{0j+1}

$$-\frac{1}{h}\left(c_0 u_{0j+1} + d_{0j+1} - u_{0j+1}\right) = \sigma\left(u_{0j+1}^4 - u_0^4\right),$$
$$\left(c_0 - 1\right) u_{0j+1} + d_{0j+1} = -h\sigma\left(u_{0j+1}^4 - u_0^4\right),$$
$$u_{0j+1} = \frac{h\sigma\left(u_{0j+1}^4 - u_0^4\right) + d_{0j+1}}{\left(1-c_0\right)}.$$

Для исследования полученного уравнения обозначим

$$u_{0j+1} = y,$$
$$y = \frac{h\sigma\left(y^4 - u_0^4\right) + d_{0j+1}}{\left(1-c_0\right)} = f\left(y\right). \quad (7)$$

Полученное уравнение можно решать итерационным методом.

1. Решение методом простой итерации

$$y_{n+1} = \frac{h\sigma\left(y_n^4 - u_0^4\right) + d_{0\,j+1}}{\left(1 - c_0\right)},\ \ y_0 = u_0^j.$$

Условие сходимости полученного итерационного процесса

$$f'\left(u_0^j\right) = \frac{4h\sigma\left(u_0^j\right)^3}{\left(1 - c_0\right)} < 1.$$

2. Преобразуем уравнение для применения метода Ньютона

$$f\left(y\right) = \frac{h\sigma\left(y^4 - u_0^4\right) + d_{0\,j+1}}{\left(1 - c_0\right)} - y,$$

$$f' = \frac{4h\sigma y^3}{\left(1 - c_0\right)} - 1.$$

Итерационный процесс строится по формуле

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\left[h\sigma\left(y_n^4 - u_0^4\right) + d_{0\,j+1} - y_n\left(1 - c_0\right)\right]}{\left[4h\sigma y_n^3 - \left(1 - c_0\right)\right]},\ \ y_0 = u_0^j.$$

Для применения метода Ньютона требуется выполнение условия

$$2h\sigma y^2 \left| \frac{h\sigma y^4 - \left(1 - c_0\right) y - h\sigma u_0^4 + d_{0\,j+1}}{\left[4h\sigma y^3 - \left(1 - c_0\right)\right]^2} \right| < 1.$$

Подставим в полученную формулу u_0^j.

$$2h\sigma (u_0^j)^2 \left| \frac{h\sigma (u_0^j)^4 - \left(1 - c_0\right) u_0^j - h\sigma u_0^4 + d_{0\,j+1}}{\left[4h\sigma (u_0^j)^3 - \left(1 - c_0\right)\right]^2} \right| < 1.$$

Если условие выполнено, то итерационный процесс сходится с квадратичной скоростью.

Решение обратной задачи. В качестве обратной рассмотрим следующую задачу. Пусть нам известен поток при $x = 0$

$$-\frac{\partial u\left(0,t\right)}{\partial x} = \varphi\left(t\right),$$

требуется, зная $\varphi(t)$, найти функцию $k(x)$.

Сформулируем разностный аналог поставленной задачи.

Пусть функция u_{ij} — решение задачи (2). Обозначим

$$\varphi_j = \varphi(x_j),$$
$$-\frac{u_1^j - u_0^j}{h} = \omega_j.$$

Введем невязку

$$N = \sum_{i=0}^{m} (\omega_j - \varphi_j)^2.$$

Требуется найти такой вектор $\bar{k} = (k_{\frac{1}{2}}, k_{\frac{3}{2}}, \ldots, k_{n-\frac{1}{2}})^T$, который минимизирует невязку *N*. В силу некорректности поставленной задачи [17] будем минимизировать функционал Тихонова

$$M^{\beta}(\bar{k}) = N(\bar{k}) + + \beta h \sum_{1}^{n-1} \left(\frac{k_{i+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}}}{h} + p_i k^2_{i-\frac{1}{2}} \right). \qquad (8)$$

Здесь β — положительная постоянная, $p_i \geq 0$.

Очевидно, что функционал (8) положительно определен, поэтому, у него существует единственный минимум

$$\bar{k}^{\beta} = (k^{\beta}_{\frac{1}{2}}, \ldots, k^{\beta}_{n-\frac{1}{2}})^T. \qquad (9)$$

Если набор $\{\varphi_j\}$ известен точно, то в качестве решения обратной задачи можно взять

$$\bar{k}^0 = \lim_{\beta \to 0} \bar{k}^{\beta} = (k^0_{\frac{1}{2}}, \ldots, k^0_{n-\frac{1}{2}})^T. \qquad (10)$$

Если вместо точного значения $\{\varphi_j\}$ известны их приближенные значения $\{\varphi_j^{\delta}\}$, такие что $\sum_{j=0}^{m} (\omega_j - \varphi_j^{\delta})^2 \leq \delta^2$, то в качестве решения обратной задачи берется вектор $\bar{k}^{\beta}$, для которого

$$N = \sum_{0}^{m} (\omega_j - \varphi_j)^2 = \delta^2. \qquad (11)$$

В этом случае решение обратной задачи устойчиво [17].

Численный пример. В качестве примера рассмотрим решение обратной задачи (минимизации функционала Тихонова) при следующих начальных данных:

$$\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8},\ \ q(t) = 1,\ \ T = 2,\ \ u_0 = 20.$$

Число интервалов дискретизации равно 20, $N = 21$, $\tau = h = 0,05$.

$$k(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0,0;3), \\ 0,1, & x \in [0,3;0,7), \\ 6, & x \in [0,7;1]. \end{cases}$$

Минимизация функционала (8), как функции $N-1$ переменной проводилась методом случайного поиска, основой которого является итерационный процесс

$$\bar{k}^{n+1} = \bar{k}^{n} + \alpha_n \frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|}, \quad n = 0,1...,$$

где $\alpha_n > 0$ — величина шага,

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{N-1})^T$$

— реализация $N-1$–мерного случайного вектора.

Начальное приближение $\bar{k}^0 = (5,5,\cdots,5)$. В качестве числа неудачных попыток на очередном шаге найти наименьшее значение минимизируемой функции бралось $N_{max} = 3N$.

В случае, если все попытки были неудачными, шаг поиска α уменьшался, и процедура повторялась до $\alpha < 10^{-4}$. Результаты расчетов приведены на рис.1 и рис. 2.

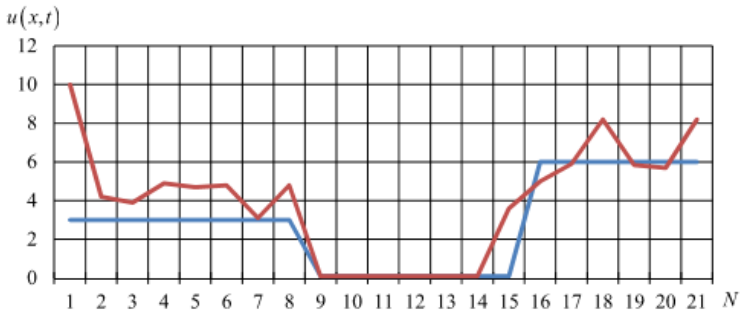


Рис. 1. Решение обратной задачи без использования априорной информации:

— — значение коэффициента $k(x)$; — — решение обратной задачи

На рис. 1. Показаны значения коэффициента $k(x)$, а также результат решения обратной задачи.

На рис. 2 показаны результаты решения обратной задачи 2. Для решения использовалась дополнительная информация $k'(0)=k'(1)=$ $=0$.

В обоих случаях коэффициент β брался равным $\beta=0,0001$ и $\beta=0,00001$.

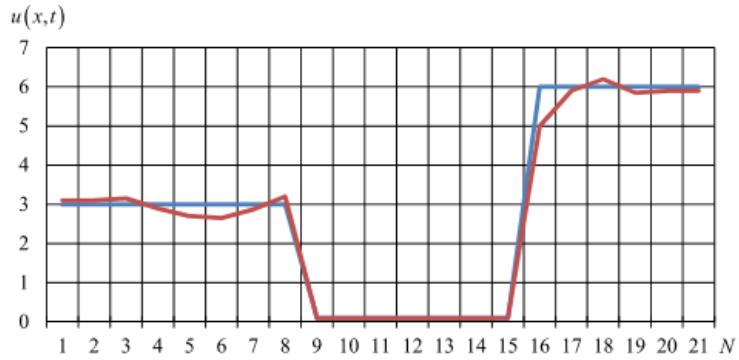


Рис. 2. Решение обратной задачи с использованием условия кусочной постоянности коэффициента $k(x)$:

— значение коэффициента $k(x)$; — решение обратной задачи

Выводы. Описанный выше метод показывает высокую эффективность. При этом следует учесть следующие факты.

1. Решение уравнения (11) представляет из себя сложную задачу. Методы выбора параметра β, описанные в [17–19] трудоемки. Поэтому, приходится решать обратную задачу при нескольких значениях параметра регуляризации β. Из полученных результатов выбираем наиболее соответствующего априорным представлениям о решении.

2. Если извечна некоторая информация о решении, ее полезно использовать при произведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Будадин О.Н., Кутюрин В.Ю., Каледин В.О. Диагностика технического состояния сосудов, работающих под внутренним давлением, тепловым (тепловизионным) методом. *Дефектоскопия*, 2008, № 10, с. 16−25.

[2] Вавилов В.П., Нестерчук Д.А., Ширяев В.В., Иванов А.И., Swiderski W. Тепловая (инфракрасная) томография: терминология, основные процедуры и применение для неразрушающего контроля композиционных материалов. *Дефектоскопия*, 2010, № 3, с. 3−16.

[3] Будадин О.Н., Потапов А.И., Колганов В.И., Троицкий−Марков Т.Е., Абрамова Е.В. *Тепловой неразрушающий контроль изделий*. Москва, Наука, 2002, 473 с.

[4] Мацевитый Ю.М. *Обратные задачи теплопроводности: в 2 т.* Киев, Наукова Думка, 2002, 408 с.
[5] Мацевитый Ю.М., Костиков А.О. Математические аспекты решения геометрических обратных задач теплопроводности: проблемы и пути их решения. *Проблемы машиностроения*, 2007, т. 10, № 3, с. 27–34
[6] Cheng C.-Y. Shape Identification by Inverse Heat Transfer Method. *Journal Heat Transfer*, 2003, vol. 125(2), pp. 224–231.
[7] Chun-Yun Wu, Wen-Chang Lin Using genetic algorithms to detect interfacial cracks on the basis of the thermal resistance of multilayer materials. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2007, vol. 43, iss. 7, pp. 474–483.
[8] Huang C.H., Shih C.C. Identify the Interfacial Configurations in a Multiple Region Domain Problem. *Journal Thermophysics Heat Transfer*, 2005, vol. 19, iss. 4, pp. 533–641.
[9] Димитриенко Ю.И., Николаев А.А., Краснов И.К. Разработка автоматизированных технологий неразрушающего контроля для оценки остаточного ресурса неметаллических конструкций. *Сборник трудов Четвертой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности»*. 2007, т. 11, с. 326−329.
[10] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics*. New−York, Marcel Dekker, Inc., 1999, 724 p.
[11] Kozhanov A.I. *Composite type equations and inverse problems*. Utrecht, VSP Publ., 1999, 171 p.
[12] Ivanchov M. *Inverse problems for equation of parabolic type*. Lviv, WNTL Publ., 2003.
[13] Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin, Springer−Verlag, 1998, 346 p.
[14] Isakov V. The inverse problem of option pricing. Recent Developments in Theory and Numerics. *International Conference on Inverse problems*, 2002, pp. 47–55.
[15] Гольдман Н.Л. Обратные задачи с финальным переопределением. *Доклады академии наук*, 2011, т. 438, № 2, с. 162–167.
[16] Калиткин Н.Н. *Численные методы*. Москва, Наука, 1978, 512 с.
[17] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1979, 223 с.
[18] Краснов И.К., Зубарев К.М., Иванова Т.Л. Решение прямой и обратной задачи восстановления электрофизических параметров по результатам зондирования переменным током. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 1, с. 41–54.
[19] Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной задачи теплопроводности. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9 (21). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-964

Статья поступила в редакцию 14.07.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной задачи теплопроводности с излучением. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 43–53.

Грибов Александр Федорович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: alexander-gribov@list.ru

Жидков Евгений Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: ENZhidkov@yandex.ru

Краснов Игорь Константинович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области решения обратных задач.
e-mail: igorkrsnv@yandex.ru

On the numerical solution of the inverse problem of heat conduction with radiation

© A.F. Gribov, E.N. Zhidkov, I.K. Krasnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The inverse problem of restoring the thermal conductivity coefficient of a nonlinear parabolic equation by the final temperature distribution, which serves as a mathematical model for the problem of determining structural defects, is investigated. An algorithm for numerical solution of the problem is proposed. A numerical example is considered.

Keywords: *inverse problem, parabolic equation, approximation, Tikhonov functional, random search*

REFERENCES

[1] Budadin O.N., Kutyurin V.Yu., Kaledin V.O. Diagnostics of the technical condition of pressure vessels operating under internal pressure by a thermal (thermal imaging) method. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2008, vol. 44, no. 10, pp. 669−675.

[2] Vavilov V.P., Nesteruk D.A., Shiryaev V.V., Ivanov A.I., Swiderski W. Thermal (infrared) tomography: Terminology, principal procedures, and application to nondestructive testing of composite materials. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 151−161.

[3] Budadin O.N., Potapov A.I., Kolganov V.I., Troickij−Markov T.E., Ab-ramova E.V. *Teplovoj nerazrushayushchij kontrol' izdelij* [Thermal non-destructive testing of products]. Moscow, Nauka Publ., 2002, 473 p.

[4] Macevityj Yu.M. *Obratnye zadachi teploprovodnosti: v 2 t.* [Inverse problems of thermal conductivity]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 2002, 408 p.

[5] Macevityj Yu.M., Kostikov A.O. *Problemy mashinostroeniya — Problems of mechanical engineering*, 2007, vol. 10, no. 3, pp. 27–34

[6] Cheng C.-Y. Shape Identification by Inverse Heat Transfer Method. *Journal Heat Transfer*, 2003, vol. 125(2), pp. 224–231.

[7] Chun-Yun Wu, Wen-Chang Lin Using genetic algorithms to detect interfacial cracks on the basis of the thermal resistance of multilayer materials. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2007, vol. 43, iss. 7, pp. 474–483.

[8] Huang C.H., Shih C.C. Identify the Interfacial Configurations in a Multiple Region Domain Problem. *Journal Thermophysics Heat Transfer*, 2005, vol. 19, iss. 4, pp. 533–641.

[9] Dimitrienko Yu.I., Nikolaev A.A., Krasnov I.K. *Razrabotka avtomatizirovannyh tekhnologij nerazrushayushchego kontrolya dlya ocenki ostatochnogo resursa nemetallicheskih konstrukcij* [Development of automated nondestructive testing

technologies for evaluation of residual life of nonmetallic structures]. *Sbornik trudov Chetvertoj mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Issledovanie, razrabotka i primenenie vysokih tekhnologij v promyshlennosti»* [Proceedings of the Fourth international scientific and practical conference "Research, development and application of high technologies in industry"]. 2007, vol. 11, pp. 326−329.

[10] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics*. New−York, Marcel Dekker, Inc., 1999, 724 p.

[11] Kozhanov A.I. *Composite type equations and inverse problems*. Utrecht, VSP Publ., 1999, 171 p.

[12] Ivanchov M. *Inverse problems for equation of parabolic type*. Lviv, WNTL Publ., 2003.

[13] Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin, Springer−Verlag, 1998, 346 p.

[14] Isakov V. The inverse problem of option pricing. Recent Developments in Theory and Numerics. *International Conference on Inverse problems*, 2002, pp. 47–55.

[15] Goldman, N.L. *Doklady akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2011, vol. 438, no. 2, pp. 162–167.

[16] Kalitkin N.N. *Chislennye metody* [Numerical methods] Moscow, Nauka Publ., 1978, 512 p.

[17] Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnyh zadach [Methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 223 p.

[18] Krasnov I.K., Zubarev K.M., Ivanova T.L. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 1, pp. 41–54.

[19] Gribov A.F., Zhidkov E.N., Krasnov I.K. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9 (21). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-964

Gribov A.F., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. professor, Department of Mathematical modeling, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: alexander-gribov@list.ru

Zhidkov E.N., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: ENZhidkov@yandex.ru

Krasnov I.K., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. The author of over 50 research publications in the field of solving inverse problems.
e-mail: igorkrsnv@yandex.ru