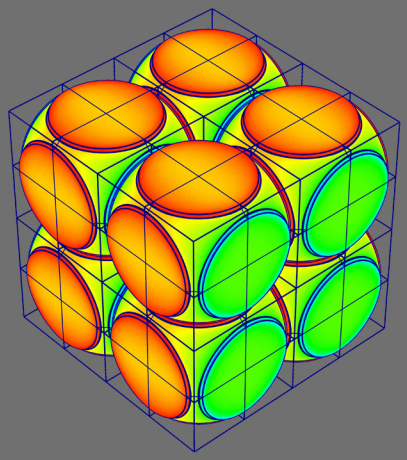
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория тонких двухслой-ных упругих пластин с проскальзыванием слоев. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 1. с. 3–26.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/185/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
27.11.2026 07:33:18

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-326

Асимптотическая теория тонких двухслойных упругих пластин с проскальзыванием слоев

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается задача о деформировании тонких двухслойных пластин, у которых на границе раздела слоев задано условие проскальзывания, вместо классического случая идеального контакта. Применен метод асимптотического анализа общих уравнений 3-х мерной теории упругости для решения данной задачи при воздействии поперечного давления, продольных и сдвиговых усилий на торцевых поверхностях. Асимптотический анализ проводится по малому геометрическому параметру, представляющему отношение толщины к характерной длине пластины. Получены рекуррентные формулировки локальных квазиодномерных задач теории упругости с проскальзыванием. Для этих задач получены явные аналитические решения. Выведены осредненные уравнения упругого равновесия двухслойной пластины с проскальзыванием слоев. Показано, что за счет проскальзывания порядок осредненных уравнений теории пластин повышается до 5-го порядка, в отличие от классического 4-го порядка, который имеет место в теории пластин Кирхгофа-Лява. Сформулированы дополнительные граничные условия к этой систем 5 порядка и получено аналитическое ее решение для случая прямоугольной пластины под действием равномерного давления. Проведен численный анализ решения осредненной задачи. Показано, что наличие проскальзывания слоев существенно увеличивает прогиб пластины по сравнению с условиями идеального контакта слоев.

Ключевые слова: *асимптотическая теория, малый параметр, тонкие пластины, упругость, проскальзывание слоев, изгиб*

Введение. Классические теории многослойных пластин основаны на предположении об идеальности контакта слоев – непрерывности векторов перемещений и напряжений на поверхности раздела слоев [1–4]. Однако в ряде инженерных задач возникает ситуация с неидеальным контактом, например, когда слои свободно проскальзывают друг относительно друга. В этом случае основное допущение классической теории пластин, в том числе пластин Кирхофа–Лява и Пластин Тимошенко — о линейности распределения продольных перемещений по толщине, уже не имеет места. Существуют ограниченное количество теорий, в которых делается попытка построить более общую теорию пластин с учетом проскальзывания слоев, однако система допущений при этом оказывается значительно более сложной и менее обоснованной, чем в классической теории пластин [5]. В этой связи весьма перспективной являются асимптотические теории пластин, предложенные относительно недавно [6–21], в которых не делаются никакие допущения относительно характера распределений перемещений и

напряжений по толщине, а уравнения теории пластин выводятся из общих 3-х мерных уравнений с помощью их асимптотического анализа. Разработанный вариант асимптотической теории пластин является достаточно универсальным, он применим для пластин с различными свойствами, в том числе и с нелинейными. Его достоинством является возможность получения формул для всех 6 напряжений с использованием только решений для осредненной теории пластин. Точность этого метода, подтвержденная сравнением с различными методами, очень высокая [14,18].

Цель настоящей работы — дальнейшее развитие асимптотической теории пластин для случая проскальзывания слоев при деформировании.

Постановка 3-х мерной задачи теории упругости для двухслойной пластины с проскальзыванием слоев. Рассмотрим в рамках трехмерной теории упругости [22] задачу о деформировании тонкой двухслойной упругой анизотропной пластины с наличием проскальзывания слоев друг относительно друга при воздействии поперечных и сдвиговых нагрузок на боковых поверхностях, с условиями закрепления на краях пластины:

$$\begin{cases} \nabla_j \sigma_{ij}^{\{m\}} = 0; \\ \varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\{m\}} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_j u_i^{\{m\}} + \nabla_i u_j^{\{m\}} \right); \\ \sigma_{ij}^{\{m\}} = C_{ijkl}^{\{m\}} \varepsilon_{kl}^{\{m\}}; \\ \Sigma_S : \sigma_{i3}^{\{1\}} = \sigma_{i3}^{\{2\}}, \;\; u_3^{\{1\}} = u_3^{\{2\}}, \;\; u_I^{\{1\}} - u_I^{\{2\}} = \theta \sigma_{I3}^{\{1\}}; \\ \Sigma_{3+} : \sigma_{i3}^{\{2\}} = S_i^{\{2\}}, \;\; \Sigma_{3-} : \sigma_{i3}^{\{1\}} = S_i^{\{1\}}; \\ \Sigma_T : u_i^{\{m\}} = u_{ei}, \;\; m = 1,2. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{\{m\}}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{kl}^{\{m\}}$ — компоненты тензора малых деформаций; $u_i^{\{m\}}$ — компоненты вектора перемещений; $\nabla_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам $\tilde{x}_j$ (ось Ox_3 направлена по нормали к поверхностям пластины); $C_{ijkl}^{\{m\}}$ — компоненты тензора модулей упругости слоев; $\{m\}$ — индекс слоев $m = 1,2$; $\Sigma_{3\pm} = \left\{ x_3 = \pm h/2 \right\}$ —внешняя и внутренняя поверхности пластины; h — суммарная толщина двухслойной пластины); Σ_T — торцевая поверхность пластины; Σ_S — поверхность контакта слоев; θ — коэффициент скольжения при трении,

$\theta \geq 0$.

Система уравнений (1) включает в себя уравнения равновесия, соотношения Коши, обобщенный закон Гука, условия на поверхности контакта слоев Σ_S (неидеальный контакт с наличием трения), на внешних поверхностях пластины Σ_{3+} (на них заданы векторы усилий $S_i^{\{1\}}$ и $S_i^{\{2\}}$) и на торцевой поверхности Σ_T (заданы векторы пермещений u_{ei}). Оба слоя пластины полагаем моноклинными материалами, поэтому тензоры $C_{ijkl}^{\{m\}}$ содержат не более 13 ненулевых констант [23].

Асимптотические разложения для двухслойной пластины с проскальзываением. Введем малый параметр $\kappa = h/L << 1$, как отношение общей толщины пластины h к длине пластины L, а также введем также глобальные x_k и локальную ξ координаты:

$$x_k = \tilde{x}_k / L, \ \xi = x_3 / \kappa, \ k = 1,2,3. \tag{2}$$

Координата ξ по толщине пластины изменяется в диапазоне $-0,5 < \xi < 0,5$, а поверхность раздела слоев имеет координату $\xi = a_1$.

Полагаем, что на внешних поверхностях пластины задано давление $\tilde{p}_{\pm}$, имеющее порядок малости $O(\kappa^3)$, тогда векторы усилий $S_i^{\{m\}}$ имеют следующий вид:

$$S_i^{\{m\}} = -\kappa^3 p^{\{m\}}(x_I)\delta_{i3}. \tag{3}$$

Решение задачи (1) будем искать в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от глобальных и локальных координат:

$$u_k^{\{m\}} = u_k^{(0)}(x_1) + \kappa u_k^{\{m\}(1)}(x_1,\xi) + \kappa^2 u_k^{\{m\}(2)}(x_1,\xi) + ..., \tag{4}$$

где $I = 1,2; \ m = 1,2; \ k = 1,2,3$.

Подставляя разложения (4) в соотношения Коши в системе (1), с учетом правила дифференцирования функций локальных координат [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \to \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{k}\delta_{j3}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

получим асимптотические разложения для деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{\{m\}} = \varepsilon_{ij}^{\{m\}(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{\{m\}(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{\{m\}(2)} + ..., \tag{5}$$

где

$$\varepsilon_{ij}^{\{m\}(0)}=\frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(0)}+u_{J,I}^{(0)}\right),\varepsilon_{I3}^{\{m\}}=\frac{1}{2}\left(u_{3,J}^{(0)}+u_{I/3}^{\{m\}(1)}\right),\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)}=$$
$$=u_{3/3}^{\{m\}(1)},\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(n)}=\frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{\{m\}(n)}+u_{J,I}^{\{m\}(n)}\right),\varepsilon_{I3}^{\{m\}(n)}= \quad (6)$$
$$=\frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{\{m\}(n)}+u_{I/3}^{\{m\}(n+1)}\right),\varepsilon_{33}^{\{m\}(n)}=u_{3/3}^{\{m\}(n+1)},\quad n=1,2...$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: $u_{I/3}^{\{m\}(1)}=\dfrac{\partial u_i^{\{m\}(1)}}{\partial\xi}$; $u_{I,J}^{\{m\}(1)}=\dfrac{\partial u_i^{\{m\}(1)}}{\partial x_j}$, а также вводятся операции осреднения по толщине

$$\left\langle u_i^{\{1\}(n)}\right\rangle_1=\int\limits_{-0,5}^{a_1}u_i^{\{1\}(n)}d\xi,\ \left\langle u_i^{\{2\}(n)}\right\rangle_2=\int\limits_{a_1}^{0,5}u_i^{\{2\}(n)}d\xi,$$
$$\left\langle u_i^{(n)}\right\rangle=\int\limits_{-0,5}^{0,5}u_i^{(n)}d\xi=\left\langle u_i^{\{1\}(n)}\right\rangle_1+\left\langle u_i^{\{2\}(n)}\right\rangle_2,$$
$$\left\{f^{\{m\}(n)}\right\}_{1\xi}=\int\limits_{-0.5}^{\xi}\left(f^{\{1\}(n)}\left(\tilde{\xi}\right)-\left\langle f^{\{m\}(n)}\right\rangle\right)d\tilde{\xi}, \quad (7)$$
$$\left\{f^{\{m\}(n)}\right\}_{2\xi}=\int\limits_{\xi}^{0.5}\left(f^{\{2\}(n)}-\left\langle f^{\{m\}(n)}\right\rangle\right)d\tilde{\xi}$$

Подставляя выражения (6) в закон Гука в системе (1), с учетом моноклинности материалов слоев, получаем асимптотические выражения для напряжений:

$$\sigma_{ij}^{\{m\}}=\sigma_{ij}^{\{m\}(0)}+\kappa\sigma_{ij}^{\{m\}(1)}+\kappa^2\sigma_{ij}^{\{m\}(2)}+..., \quad (8)$$

где

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(n)}=C_{IJKL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(n)}+C_{IJ33}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(n)};\ \sigma_{I3}^{\{m\}(n)}=2C_{I3K3}^{\{m\}}\varepsilon_{K3}^{\{m\}(n)};$$
$$\sigma_{33}^{\{m\}(n)}=C_{33KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(n)}+C_{3333}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(n)},\ n=1,2,3... \quad (9)$$

Локальные контактные задачи. Подставляя разложения (4), (5) и (7) в уравнения равновесия и граничные условия системы (1), и приравнивая в уравнениях равновесия члены при κ^{-1} к нулю, а при остальных степенях от κ к некоторым величинам $h_i^{(0)},h_i^{(1)},h_i^{(2)}$, не зависящим от ξ_l, получим рекуррентную последовательность локальных контактных задач теории упругости:

Задача для нулевого приближения имеет вид:

$$\sigma_{i3/3}^{\{m\}(0)}=0,\ \ \sigma_{I3}^{\{m\}(0)}=2C_{I3k3}^{\{m\}}\varepsilon_{k3}^{\{m\}(0)};$$

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}=C_{IJKL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)}+C_{IJ33}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)};\ \ \sigma_{33}^{\{m\}(0)}=C_{33KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)}+C_{3333}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)};$$

$$\varepsilon_{IJ}^{(0)}=\frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(0)}+u_{J,I}^{(0)}\right);\ \ \varepsilon_{I3}^{\{m\}(0)}=\frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{(0)}+u_{I/3}^{\{m\}(1)}\right),\ \ \varepsilon_{33}^{\{m\}(0)}=u_{3/3}^{\{m\}(1)}; \qquad (10)$$

$$\Sigma_{3+}:\sigma_{i3}^{\{2\}(0)}=0;\ \ \Sigma_{3-}:\sigma_{i3}^{\{1\}(0)}=0;$$

$$\Sigma_S:\sigma_{i3}^{\{1\}(0)}=\sigma_{i3}^{\{2\}(0)},u_3^{\{1\}(1)}=u_3^{\{2\}(1)},\ \ u_I^{\{1\}(1)}-u_I^{\{2\}(1)}=\theta\sigma_{I3}^{\{1\}(1)}.$$

Задачи для более высоких приближений имеют вид:

$$\begin{cases}\sigma_{i3/3}^{\{m\}(n)}+\sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n-1)}=h_i^{\{m\}(n-1)};\ \sigma_{I3}^{\{m\}(n)}=2C_{I3k3}^{\{m\}}\varepsilon_{k3}^{\{m\}(n)};\\ \sigma_{IJ}^{\{m\}(n)}=C_{IJKL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(n)}+C_{IJ33}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(n)};\\ \sigma_{33}^{\{m\}(n)}=C_{33KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{\{m\}(n)}+C_{3333}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(n)};\\ \varepsilon_{IJ}^{\{m\}(n)}=\frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{\{m\}(n)}+u_{J,I}^{\{m\}(n)}\right);\ \ \varepsilon_{I3}^{\{m\}(n)}=\frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{\{m\}(n)}+u_{I/3}^{\{m\}(n+1)}\right);\\ \varepsilon_{33}^{\{m\}(n)}=u_{3/3}^{\{m\}(n+1)};\\ \Sigma_{3+}:\sigma_{i3}^{\{2\}(n)}=S_i^{\{2\}(n)};\ \Sigma_{3-}:\sigma_{i3}^{\{1\}(n)}=S_i^{\{1\}(n)};\\ \Sigma_S:\sigma_{i3}^{\{1\}(n)}=\sigma_{i3}^{\{2\}(n)},\ u_3^{\{1\}(n+1)}=u_3^{\{2\}(n+1)},\ u_I^{\{1\}(n+1)}-u_I^{\{2\}(n+1)}=\theta\sigma_{I3}^{\{1\}(n+1)}.\end{cases} \qquad (11)$$

Здесь $S_i^{\{m\}(n)}=S_i^{\{m\}}\delta_{n3},\ \ n=1,2,3...$

Уравнения равновесия в системе (1) после введения функций $h_i^{(0)}$, $h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}$ принимают вид:

$$h_i^{(0)}+\kappa h_i^{(1)}+\kappa^2 h_i^{(2)}+...=0. \qquad (12)$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (10) являются функции $u_j^{\{m\}(1)}$, $\varepsilon_{kl}^{\{m\}(0)}$, $\sigma_{ij}^{\{m\}(0)}$, зависящие от локальной координаты ξ и входных данных этой задачи – перемещений $u_j^{\{m\}(0)}\left(x_J\right)$. Решением задачи (11) являются функции $u_j^{\{m\}(n+1)}$, $\varepsilon_{kl}^{\{m\}(n)}$, $\sigma_{ij}^{\{m\}(n)}$, а функции $u_j^{\{m\}(n)}$, $\varepsilon_{kl}^{\{m\}(n-1)}$, $\sigma_{ij}^{\{m\}(n-1)}$ в этой задаче – входные данные.

Решение задачи нулевого приближения. Решение уравнений равновесий с граничными условиями в локальной задаче нулевого приближения (10) имеет вид:

$$\sigma_{i3}^{\{m\}(0)}=0,\ \ \forall\xi:-0,5<\xi<0,5. \qquad (13)$$

Подставляя (13) в определяющие соотношения системы (3) для

$\sigma_{i3}^{\{m\}(0)}$, получим:

$$C_{I3k3}^{\{m\}}\varepsilon_{k3}^{\{m\}(0)}=0,\ C_{33KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)}+C_{3333}^{\{m\}}\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)}. \tag{14}$$

Отсюда находим

$$\varepsilon_{I3}^{\{m\}(0)}=0,\ \varepsilon_{33}^{\{m\}(0)}=-Z_{3KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)},\ Z_{3KL}^{\{m\}}=C_{3333}^{\{m\}-1}C_{33KL}^{\{m\}}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в определяющие соотношения для $\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}$, находим

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}=C_{IJKL}^{\{m\}(0)}\varepsilon_{KL}^{(0)}; \tag{16}$$

$$C_{IJKL}^{\{m\}(0)}=C_{IJKL}^{\{m\}}-C_{IJ33}^{\{m\}}Z_{3KL}^{\{m\}}. \tag{17}$$

Подставляя (15) в соотношения Коши для $\varepsilon_{I3}^{\{m\}(0)}$, $\varepsilon_{33}^{\{m\}(0)}$ в системе (10), находим уравнения для перемещений $u_I^{\{m\}(1)}$ и $u_3^{\{m\}(1)}$

$$u_{I/3}^{\{m\}(1)}=-u_{3,I}^{(0)},\ u_{3/3}^{\{m\}(1)}=-Z_{3KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)}. \tag{18}$$

Проинтегрируем эти уравнения по ξ,

$$\begin{aligned} u_I^{\{m\}(1)}&=-\xi u_{3.I}^{(0)}+U_I^{\{m\}},\\ u_3^{\{m\}(1)}&=-\xi Z_{3KL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL}^{(0)}+U_3^{\{m\}}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $U_I^{\{m\}}$, $U_3^{\{m\}}$ — константы интегрирования. Для их определения подставим (19) в граничные условия системы (10) на поверхности раздела $\xi=a_1$, а также условие нормировки [13–15] $<u_i^{(1)}>=0$, тогда для $U_I^{\{m\}}$, $U_3^{\{m\}}$ получим систему следующего вида:

$$\begin{gathered} U_I^{\{2\}}=U_I^{\{1\}}+\theta\sigma_{I3}^{\{1\}(1)}\left(a_1\right),\\ U_I^{\{1\}}\left(a_1+\frac{1}{2}\right)+U_I^{\{2\}}\left(\frac{1}{2}-a_1\right)=0,\\ U_3^{\{1\}}=U_3^{\{2\}}+\varepsilon_{KL}^{(0)}(Z_{3KL}^{\{1\}}-Z_{3KL}^{\{2\}})a_1,\\ U_3^{\{1\}}\left(a_1+\frac{1}{2}\right)+U_3^{\{2\}}\left(\frac{1}{2}-a_1\right)-\frac{1}{2}\varepsilon_{KL}^{(0)}(Z_{3KL}^{\{1\}}-Z_{3KL}^{\{2\}})\left(a_1^2-\frac{1}{4}\right)=0. \end{gathered} \tag{20}$$

Отсюда находим

$$U_I^{\{1\}}=\left(a_1-\frac{1}{2}\right)\theta\sigma_{I3}^{\{1\}(1)}(a_1),$$

$$U_I^{\{2\}} = \left(a_1 + \frac{1}{2}\right)\theta\sigma_{I3}^{\{1\}(1)}(a_1),$$

$$U_3^{\{1\}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{KL}^{(0)}(Z_{3KL}^{\{1\}} - Z_{3KL}^{\{2\}})\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad (21)$$

$$U_3^{\{2\}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{KL}^{(0)}(Z_{3KL}^{\{1\}} - Z_{3KL}^{\{2\}})\left(a_1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Подставляя константы (21) в (19), находим выражения для перемещений в слоях

$$u_I^{\{m\}(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)} + \theta\Phi^{\{m\}}\sigma_{I3}^{\{1\}(1)}(a_1),$$

$$u_3^{\{m\}(1)} = -\varepsilon_{KL}^{(0)}U_{3KL}^{\{m\}},$$

$$\Phi^{\{m\}} = \left(a_1 + \frac{(-1)^m}{2}\right), \qquad (22)$$

$$U_{3KL}^{\{m\}} = \xi Z_{3KL}^{\{m\}} + \frac{1}{2}(Z_{3KL}^{\{1\}} - Z_{3KL}^{\{2\}})\left(a_1 + \frac{(-1)^m}{2}\right)^2.$$

Решение локальных задач для высших приближений. Рассмотрим локальные задачи (11) для более высоких приближений. Решение уравнений равновесия в (11) вместе с граничными условиями $\sigma_{i3}^{\{m\}(n+1)} = -p^{\{m\}}\delta_{i3}\delta_{n2}$ на поверхностях $\xi = \pm 0,5$ имеет вид:

$$\sigma_{i3}^{\{1\}(n+1)} = -p^{\{1\}}\delta_{i3}\delta_{n2} - \int_{-0.5}^{\xi}\sigma_{iJ,J}^{\{1\}(n)}d\xi + h_i^{(n)}(\xi + 0.5), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\sigma_{i3}^{\{2\}(n+1)} = -p^{\{2\}}\delta_{i3}\delta_{n2} + \int_{\xi}^{0.5}\sigma_{iJ,J}^{\{2\}(n)}d\xi + h_i^{(n)}(\xi - 0.5), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (23)$$

Подставляя (23) в граничные условия $\sigma_{i3}^{\{1\}(n)} = \sigma_{i3}^{\{2\}(n)}$ системы (11) на поверхности $\xi = a_1$ контакта слоев, получаем соотношения для нахождения функций $h_i^{(n)}$

$$-p^{\{1\}}\delta_{i3}\delta_{n2} - \int_{-0.5}^{a_1}\sigma_{iJ,J}^{\{1\}(n)}d\xi + 0, h_i^{(n)} =$$

$$= -p^{\{2\}}\delta_{i3}\delta_{n2} + \int_{a_1}^{0.5}\sigma_{iJ,J}^{\{2\}(n)}d\xi - 0,5h_i^{(n)}. \qquad (24)$$

Отсюда, находим

$$h_i^{(n)} = -\Delta p \delta_{i3}\delta_{n2} + < \sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n)} >, \qquad \Delta p = p^{\{2\}} - p^{\{1\}}. \tag{25}$$

С учетом (25) выражения (23) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{\{1\}(n+1)} = -\left\{\sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n)}\right\}_{1\xi} - \left(p^{\{1\}} + \Delta p\left(\xi + 0.5\right)\right)\delta_{i3}\delta_{n2}, \ n = 0,1,2,...$$
$$\sigma_{i3}^{\{2\}(n+1)} = \left\{\sigma_{iJ,J}^{\{m\}(n)}\right\}_{2\xi} - \left(p^{\{2\}} + \Delta p\left(\xi - 0.5\right)\right)\delta_{i3}\delta_{n2}, \ n = 0,1,2,... \tag{26}$$

Формулы (26) являются рекуррентными, подставляя последовательно эти формулы друг в друга при различных n, вычислим напряжения $\sigma_{i3}^{\{m\}(n+1)}$ до 3-го приближения

$$\sigma_{I3}^{\{1\}(1)} = -\left\{\sigma_{IJ,J}^{\{m\}(0)}\right\}_{1\xi}, \ \sigma_{I3}^{\{1\}(2)} = -\left\{\sigma_{IJ,J}^{\{m\}(1)}\right\}_{1\xi},$$
$$\sigma_{33}^{\{1\}(1)} = -\left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(0)}\right\}_{1\xi} = 0, \ \sigma_{33}^{\{1\}(2)} = -\left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(1)}\right\}_{1\xi} = \left\{\left\{\sigma_{IJ,IJ}^{\{m\}(0)}\right\}_{1\xi}\right\}_{1\xi},$$
$$\sigma_{33}^{\{1\}(3)} = -\left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(2)}\right\}_{1\xi} - \left(p^{\{1\}} + \Delta p\left(\xi + 0,5\right)\right) =$$
$$= \left\{\left\{\sigma_{IJ,IJ}^{\{m\}(1)}\right\}_{1\xi}\right\}_{1\xi} - \left(p^{\{1\}} + \Delta p\left(\xi + 0,5\right)\right), \tag{27}$$

$$\sigma_{I3}^{\{2\}(1)} = \left\{\sigma_{IJ,J}^{\{m\}(0)}\right\}_{2\xi}, \ \sigma_{I3}^{\{2\}(2)} = -\left\{\sigma_{IJ,J}^{\{m\}(1)}\right\}_{2\xi},$$
$$\sigma_{33}^{\{2\}(1)} = -\left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(0)}\right\}_{2\xi} = 0, \ \sigma_{33}^{\{2\}(2)} = \left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(1)}\right\}_{2\xi} = \left\{\left\{\sigma_{IJ,IJ}^{\{m\}(0)}\right\}_{2\xi}\right\}_{2\xi},$$
$$\sigma_{33}^{\{2\}(3)} = \left\{\sigma_{3J,J}^{\{m\}(2)}\right\}_{2\xi} - \left(p^{\{2\}} + \Delta p\left(\xi - 0,5\right)\right) =$$
$$= \left\{\left\{\sigma_{IJ,IJ}^{\{m\}(1)}\right\}_{2\xi}\right\}_{2\xi} - \left(p^{\{1\}} + \Delta p\left(\xi + 0.5\right)\right). \tag{28}$$

В эти выражения входят напряжения $\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}$ и $\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)}$. Подставляя формулу (16) для $\sigma_{IJ}^{\{m\}(0)}$ в выражения (27) (28) для сдвиговых напряжений, находим

$$\sigma_{I3}^{\{m\}(1)} = -A_{IJKL}^{\{m\}}\varepsilon_{KL,J}^{(0)},$$
$$A_{IJKL}^{\{1\}} = \left\{C_{IJKL}^{\{1\}(0)}\right\}_{1\xi}, \tag{29}$$
$$A_{IJKL}^{\{2\}} = -\left\{C_{IJKL}^{\{2\}(0)}\right\}_{2\xi}.$$

Для вычисления $\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)}$ используем определяющие соотношения в задаче (11) при $n = 1$

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)} = C_{IJKL}^{\{m\}} \varepsilon_{KL}^{\{m\}(1)} + C_{IJ33}^{\{m\}} \varepsilon_{33}^{\{m\}(1)}. \tag{30}$$

Чтобы найти деформации $\varepsilon_{33}^{\{m\}(1)}$, воспользуемся еще одной группой определяющих соотношений системы (11)

$$\sigma_{33}^{\{m\}(1)} = C_{33KL}^{\{m\}} \varepsilon_{KL}^{\{m\}(1)} + C_{3333}^{\{m\}} \varepsilon_{33}^{\{m\}(1)}. \tag{31}$$

Так как согласно (27) и (28) $\sigma_{33}^{\{m\}(1)} = 0$, то получаем аналог формулы (15) для первого приближения

$$\varepsilon_{33}^{\{m\}(1)} = -Z_{3KL}^{\{m\}} \varepsilon_{KL}^{\{m\}(1)}. \tag{32}$$

Подставляя (32) в соотношение (30), находим аналог формулы (16) для первого приближения

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)} = C_{IJKL}^{\{m\}(0)} \varepsilon_{KL}^{\{m\}(1)}. \tag{33}$$

Деформации $\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(1)}$, входящие в эту формулу, находим из кинематических соотношений в системе (11)

$$\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{\{m\}(1)} + u_{J,I}^{\{m\}(1)}). \tag{34}$$

Подставляя формулу (22) в (34), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IJ}^{\{m\}(1)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{\{m\}(1)} + u_{J,I}^{\{m\}(1)}) = \\ &= -\xi u_{3,IJ}^{(0)} + \frac{1}{2}\theta \Phi^{\{m\}}(\sigma_{I3,J}^{\{1\}(1)}(a_1) + \sigma_{J3,I}^{\{1\}(1)}(a_1)). \end{aligned} \tag{35}$$

С помощью формул (29) найдем сдвиговые напряжения $\sigma_{I3}^{\{1\}(1)}(a_1)$ на поверхности раздела слоев, входящие в уравнение (35)

$$\sigma_{I3}^{\{1\}(1)}(a_1) = -A_{IJKL}^{\{1\}}(a_1) \varepsilon_{KL,J}^{(0)}. \tag{36}$$

Подставляя (36) в (35), получаем

$$\varepsilon_{IJ}^{(1)} = -\xi u_{3,IJ}^{(0)} - \theta \Phi_{IJMKLN}^{\{m\}} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)}, \tag{37}$$

где обозначено

$$\Phi_{IJMKLN}^{\{m\}} = \frac{1}{2}\Phi^{\{m\}}(A_{IMKL}^{\{1\}}(a_1)\delta_{JN} + A_{JMKL}^{\{1\}}(a_1)\delta_{IN}). \tag{38}$$

Подставляя теперь формулу (37) в (33), находим напряжения

$$\sigma_{IJ}^{\{m\}(1)} = -\xi C_{IJKL}^{\{m\}(0)} u_{3,KL}^{(0)} - \theta W_{IJMKLN}^{\{m\}} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)}, \tag{39}$$

где

$$W^{\{m\}}_{IJMKLN} = C^{\{m\}(0)}_{IJSP} \Phi^{\{m\}}_{SPMKLN}. \qquad (40)$$

Осредненные уравнения равновесия для двухслойной пластины с трением. Подставляя выражения (25) в асимптотическое разложение (12) уравнений равновесия пластины, получим

$$< \sigma^{\{m\}(0)}_{iJ,J} > + \kappa < \sigma^{\{m\}(1)}_{iJ,J} > + \kappa^2 (< \sigma^{\{m\}(2)}_{iJ,J} > - \Delta p \delta_{i3}) + ... = 0. \qquad (41)$$

Домножая асимптотическое разложение уравнений равновесия пластины (1) на $\xi\kappa$ и проинтегрируем их по толщине, получаем следующее вспомогательное уравнение

$$\begin{gathered} \kappa(< \xi\sigma^{\{m\}(0)}_{IJ,J} > - < \sigma^{\{m\}(1)}_{I3} >) + \\ + \kappa^2 (< \xi\sigma^{\{m\}(1)}_{IJ,J} > - < \sigma^{\{m\}(2)}_{I3} >) + ... = 0. \end{gathered} \qquad (42)$$

Здесь учтено, что $< \xi\sigma^{\{m\}(1)}_{I3/3} >= - < \sigma^{\{m\}(1)}_{I3} >$, $< \xi\sigma^{\{m\}(2)}_{I3/3} >= - < \sigma^{\{m\}(2)}_{I3} >$ в силу граничных условий на $\Sigma_{3-} : \sigma^{\{1\}(n)}_{I3} = 0,$ и $\Sigma_{3+} : \sigma^{\{2\}(n)}_{I3} = 0.$

Введем стандартным образом [13–19] усилия T_{IJ}, моменты M_{IJ} и перерезывающие силы Q_I в пластине

$$\begin{gathered} T_{IJ} = < \sigma^{\{m\}(0)}_{IJ} > + \kappa < \sigma^{\{m\}(1)}_{IJ} > + \kappa^2 ..., \\ Q_I = \kappa < \sigma^{\{m\}(1)}_{I3} > + \kappa^2 < \sigma^{\{m\}(2)}_{I3} > + ..., \\ M_{IJ} = \kappa < \xi\sigma^{\{m\}(0)}_{IJ} > + \kappa^2 < \xi\sigma^{\{m\}(1)}_{IJ} > + \kappa^3 ... . \end{gathered} \qquad (43)$$

Тогда из (41) и (42) получаем уравнения равновесия и моментов для двухслойной пластины, которые совпадают с соответствующими уравнениями для пластин без трения

$$\begin{gathered} T_{IJ,J} = 0, \; Q_{J,J} = \Delta\overline{p}, \\ M_{IJ,J} - Q_I = 0, \end{gathered} \qquad (44)$$

здесь обозначено $\Delta\overline{p} = \kappa^2 \Delta p$.

Подставим в формулы (43) для T_{IJ} и M_{IJ} выражения для напряжений $\sigma^{\{m\}(0)}_{IJ}$ и $\sigma^{\{m\}(1)}_{IJ}$, вычисляемых по формулам (16) и (39), тогда получим определяющие соотношения для пластины со проскальзыванием слоев

$$\begin{gathered} T_{IJ} = \overline{C}_{IJKL} \varepsilon^{(0)}_{KL} + B_{IJKL} \eta_{KL} - \theta H_{IJKLMN} \varepsilon^{(0)}_{KL,MN}, \\ M_{IJ} = B_{IJKL} \varepsilon^{(0)}_{KL} + D_{IJKL} \eta_{KL} - \theta F_{IJKLMN} \varepsilon^{(0)}_{KL,MN}. \end{gathered} \qquad (45)$$

Здесь обозначены $\bar{C}_{IJKL}$ — мембранные; B_{IJKL} — смешанные; D_{IJKL} — изгибные жесткости пластины, которые совпадают с классическими жесткостями пластин без трения, а также жесткости пластины H_{IJKLMN} и F_{IJKLMN}, обусловленные трением

$$\begin{gathered}\bar{C}_{IJKL} =< C_{IJKL}^{\{m\}(0)} >,\ B_{IJKL} = \kappa < \xi C_{IJKL}^{\{m\}(0)} >,\\ D_{IJKL} = \kappa^2 < \xi^2 C_{IJKL}^{\{m\}(0)} >,\\ H_{IJKLMN} = \kappa < W_{IJMKLN}^{\{m\}} >,\ F_{IJKLMN} = \kappa^2 < \xi W_{IJMKLN}^{\{m\}} > .\end{gathered} \tag{46}$$

В (45) введены также обозначения для компонент тензора искривлений пластины η_{KL}, которые вместе с соотношениями для деформаций $\varepsilon_{IJ}^{(0)}$ замыкают осредненную систему уравнений (44) и (45)

$$\begin{gathered}\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)},\\ \varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}).\end{gathered} \tag{47}$$

После подстановки (47) в (45), и (45) в (44), получим систему 3-х уравнений относительно 3 неизвестных функций — прогиба $u_3^{(0)}$ и продольных перемещений $u_I^{(0)}$, как и в классической теории пластин Кирхгофа–Лява (ТПКЛ) с идеальным контактом слоев. Однако в отличие от ТПКЛ, система уравнений асимптотической теории пластин с проскальзыванием слоев (АТПП) за счет проскальзывания слоев имеет более высокий (5-ый вместо 3-го) порядок производных относительно продольных перемещений $u_I^{(0)}$ функций.

Решение задачи изгиба пластины с учетом трения между слоями. Рассмотрим задачу об изгибе двухслойной пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного постоянного давления $\Delta\bar{p}$. Оба слоя пластины будем полагать ортотропными. Граничные условия выберем соответствующими условиям шарнирного закрепления краев пластины:

$$\begin{aligned} x = 0: &\qquad u_3^{(0)} = 0,\ M_{11} = 0,\ u_1^{(0)} = 0,\ u_{1,111}^{(0)} = 0;\\ x = 1: &\qquad u_3^{(0)} = 0,\ M_{11} = 0,\ T_{11} = 0,\ u_{1,111}^{(0)} = 0; \end{aligned} \tag{48}$$

$$x_2 = 0 \text{ и } x_2 = b: \qquad u_2^{(0)} = 0,\ u_{2,222}^{(0)} = 0,\ M_{22} = 0,\ u_{3,2}^{(0)} = 0, \tag{49}$$

здесь $x_1 = x$ — безразмерная продольная координата пластины, b — безразмерная ширина пластины.

Решение системы уравнений (44)–(47) с граничными условиями (48) будем искать в виде:

$$u_1^{(0)} = u_1^{(0)}(x), u_3^{(0)} = u_3^{(0)}(x), u_2^{(0)} = 0. \tag{50}$$

С учетом ортотропии материалов слоев пластины тождественно ненулевыми функциями будут следующие: $\eta_{11}, \varepsilon_{11}^{(0)}, T_{11}\ T_{22}, M_{11}\ M_{22}$ - все они также зависят только от координаты x. Тогда система уравнений (44)–(47) принимает вид

$$\begin{gathered} \bar{C}_{1111} u_{1,11}^{(0)} - B_{1111} u_{3,111}^{(0)} - \theta H_{111111} u_{1,1111}^{(0)} = 0, \\ B_{1111} u_{1,111}^{(0)} - D_{1111} u_{3,1111}^{(0)} - \theta F_{111111} u_{1,11111}^{(0)} - \Delta\bar{p} = 0. \end{gathered} \tag{51}$$

Граничные условия (49) с учетом (50) удовлетворяются тождественно, поэтому к системе (51) присоединяем только условия (48).

Система уравнений (51) имеет 5-й порядок производных относительно функции $u_1^{(0)}$, поэтому граничные условия (48) дополним еще одним — условием нулевой деформации $\varepsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)}$ на защемленном торце:

$$x_1 = 0: \quad u_{1,1}^{(0)} = 0. \tag{52}$$

Выражая из 2-го уравнения системы (51) производную $u_{3,1111}^{(0)}$ и подставляя ее в первое уравнение этой системы, продифференцированное предварительно по x, получим следующее уравнение только для продольного перемещения $u_1^{(0)}$

$$\bar{C} u_{1,111}^{(0)} - \theta F u_{1,11111}^{(0)} + S\Delta\bar{p} = 0, \tag{53}$$

где обозначены коэффициенты

$$\bar{C} = \bar{C}_{1111} - \frac{(B_{1111})^2}{D_{1111}},\ F = H_{1111} - \frac{B_{1111} F_{111111}}{D_{1111}},\ S = \frac{B_{1111}}{D_{1111}}. \tag{54}$$

Обозначая $v = u_{1,111}^{(0)}$, уравнение (53) запишем в виде

$$\theta F v_{,11} - \bar{C} v = S\Delta\bar{p}. \tag{55}$$

Общее решение этого уравнения, для случая, когда $\Delta\bar{p} = const$ имеет вид

$$v = V_0 e^{\alpha x} + V_1 e^{-\alpha x} - S_2 \Delta\bar{p}, \tag{56}$$

где $S_2 = \frac{S}{\bar{C}}$, $\alpha = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\theta F}}$, а V_0, V_1 — константы интегрирования.

Тогда, решая уравнение $u^{(0)}_{1,111} = v$ вместе с (56), находим общий вид функции $u^{(0)}_1$

$$u^{(0)}_1 = \frac{V_0}{\alpha^3} e^{\alpha x} - \frac{V_1}{\alpha^3} e^{-\alpha x} - \frac{S_2}{6} \Delta\bar{p} x^3 + \frac{V_2}{2} x^2 + V_3 x + V_4, \tag{57}$$

где V_2, V_3, V_4, — константы интегрирования.

Подставим теперь функцию (56) во второе уравнение системы (51) ,тогда получим уравнение относительно $u^{(0)}_3$

$$u^{(0)}_{3,1111} = V_0 Z e^{\alpha x} + V_1 Z e^{-\alpha x} - Z_1 \Delta\bar{p}, \tag{58}$$

где обозначены константы

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{D_{1111}}(B_{1111} - \alpha^2 \theta F_{111111}) = \\ &= \frac{1}{D_{1111}}(B_{1111} - \frac{F_{111111}(\bar{C}_{1111} D_{1111} - (B_{1111})^2)}{H_{1111} D_{1111} - B_{1111} F_{111111}}), \\ Z_1 &= \frac{1}{D_{1111}}(1 + B_{1111} S_2) = \frac{1}{D_{1111}}(1 + \frac{(B_{1111})^2}{\bar{C}_{1111} D_{1111} - (B_{1111})^2}). \end{aligned} \tag{59}$$

Интегрируя уравнение (58), находим общее его решение

$$u^{(0)}_3 = \frac{V_0 Z}{\alpha^4} e^{\alpha x} + \frac{V_1 Z}{\alpha^4} e^{-\alpha x} - \frac{Z_1}{24} \Delta\bar{p} x^4 + \frac{C_3}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_1 x + C_0, \tag{60}$$

где $C_0 \ldots C_3$ — константы интегрирования.

Вычислим усилие T_{11} и момент M_{11}, используя формулы (45),(57) и (60) и

$$\begin{aligned} T_{11} &= \bar{C}_{1111} u^{(0)}_{1,1} - B_{1111} u^{(0)}_{3,11} - \theta H_{111111} u^{(0)}_{1,111} = \\ &= R_0(V_0 e^{\alpha x} + V_1 e^{-\alpha x}) - (R_1 x^2 - \theta H_{111111} S_2)\Delta\bar{p} + \\ &\quad + (\bar{C}_{1111} V_2 - B_{1111} C_3) x + (\bar{C}_{1111} V_3 - B_{1111} C_2); \\ M_{11} &= B_{1111} u^{(0)}_{1,1} - D_{1111} u^{(0)}_{3,11} - \theta F_{111111} u^{(0)}_{1,111} = \\ &= N_0(V_0 e^{\alpha x} + V_1 e^{-\alpha x}) - (N_1 x^2 - \theta F_{111111} S_2)\Delta\bar{p} + \\ &\quad + (B_{1111} V_2 - D_{1111} C_3) x + (B_{1111} V_3 - D_{1111} C_2). \end{aligned} \tag{61}$$

Здесь обозначены

$$R_0 = (\bar{C}_{1111} - B_{1111}Z)/\alpha^2 - \theta H_{111111},\ R_1 = (\bar{C}_{1111}S_2 - B_{1111}Z_1)/2,$$
$$N_0 = (B_{1111} - D_{1111}Z)/\alpha^2 - \theta F_{111111},\ N_1 = (B_{1111}S_2 - D_{1111}Z_1)/2. \quad (62)$$

Подставляя (57) и (60) в граничные условия (48), (52) при $x = 0$, находим часть системы уравнений для констант интегрирования

$$V_0 - V_1 + \alpha^3 V_4 = 0,\ V_0 + V_1 + \frac{\alpha^4}{Z} C_0 = 0,$$
$$V_0 + V_1 - S_2\Delta\bar{p} = 0,\ V_0 + V_1 + \alpha^2 V_3 = 0, \quad (63)$$
$$N_0(V_0 + V_1) + \theta H_{111111}S_2\Delta\bar{p} + (B_{1111}V_3 - D_{1111}C_2) = 0.$$

Из этой системы находим константы C_0, C_2 и V_3, а константы V_1 и V_4 выражаем через V_0

$$C_0 = -\frac{Z}{\alpha^4} S_2\Delta\bar{p},\ V_3 = -\frac{S_2}{\alpha^2}\Delta\bar{p},$$
$$V_1 = -V_0 + S_2\Delta\bar{p},\ V_4 = \frac{S_2}{\alpha^3}\Delta\bar{p} - \frac{2V_0}{\alpha^3}, \quad (64)$$
$$C_2 = \frac{1}{D_{1111}}(\theta F_{111111} + N_0 - B_{1111}/\alpha^2)S_2\Delta\bar{p}.$$

Подставляя (57) и (60) в граничные условия (48) при $x = 1$, находим оставшуюся часть системы уравнений для констант интегрирования

$$\frac{V_0 Z}{\alpha^4} e^{\alpha} + \frac{V_1 Z}{\alpha^4} e^{-\alpha} - \frac{Z_1}{24}\Delta\bar{p} + \frac{C_3}{6} + \frac{C_2}{2} + C_1 + C_0 = 0,$$
$$V_0 e^{\alpha} + V_1 e^{-\alpha} - S_2\Delta\bar{p} = 0,$$
$$R_0(V_0 e^{\alpha} + V_1 e^{-\alpha}) - (R_1 - \theta H_{111111}S_2)\Delta\bar{p} +$$
$$+(\bar{C}_{1111}V_2 - B_{1111}C_3) + (\bar{C}_{1111}V_3 - B_{1111}C_2) = 0, \quad (65)$$
$$N_0(V_0 e^{\alpha} + V_1 e^{-\alpha}) - (N_1 - \theta F_{111111}S_2)\Delta\bar{p} +$$
$$+(B_{1111}V_2 - D_{1111}C_3) + (B_{1111}V_3 - D_{1111}C_2) = 0.$$

Подставляя (64) в (65), из 2-го уравнения находим константу V_0, а затем и V_1

$$V_0 = \frac{1 - e^{-\alpha}}{2\mathrm{sh}\alpha} S_2\Delta\bar{p},\ V_1 = \frac{e^{\alpha} - 1}{2\mathrm{sh}\alpha} S_2\Delta\bar{p}. \quad (66)$$

После подстановки (64) и (66) в третье и четвертое уравнения системы (65), получаем 2 уравнения для вычисления констант V_2 и C_3,

решая которые, находим

$$V_2 = \frac{1}{\Delta}(B_{1111}W - D_{1111}U),\ C_3 = \frac{1}{\Delta}(C_{1111}W - B_{1111}U), \tag{67}$$

где обозначено:

$$\begin{gathered} U = -R_0(V_0 e^{\alpha} + V_1 e^{-\alpha}) + (R_1 - \theta H_{111111} S_2)\Delta\overline{p} - \\ -(\overline{C}_{1111}V_3 - B_{1111}C_2), \\ W = -N_0(V_0 e^{\alpha} + V_1 e^{-\alpha}) + (N_1 - \theta F_{111111} S_2)\Delta\overline{p} - \\ -(B_{1111}V_3 - D_{1111}C_2) \\ \Delta = B_{1111}^2 - D_{1111}C_{1111}. \end{gathered} \tag{68}$$

Из первого уравнения системы (65) находим последнюю константу C_1.

$$C_1 = -C_0 - \frac{V_0 Z}{\alpha^4} e^{\alpha} - \frac{V_1 Z}{\alpha^4} e^{-\alpha} + \frac{Z_1}{24}\Delta\overline{p} - \frac{C_3}{6} - \frac{C_2}{2}. \tag{69}$$

После этого решение задачи (48), (51), (52) полностью найдено.

Численные результаты. Численные расчеты были проведены для 2-х слойной композитной пластины, каждый слой которой представлял собой однонаправленный материал (1D материал), армированный системой нитей, ориентированной под углом ϕ_m. Каждый слой 1 и 2 состоял из 2-х подслоев, углы армирования которых отличались только знаком ($\tilde{\phi}_1 = -\phi_1, \tilde{\phi}_2 = -\phi_2$). Границы раздела подслоев были идеальными, а на поверхности раздела слоев 1 и 2 выполнялись условия проскальзывания. Компоненты тензора модулей упругости слоев 1 и 2 вычислялись по формуле

$$C_{ijkl}^{\{m\}} = C_{snpq}^0 Q^{\{m\}}{}_{is} Q^{\{m\}}{}_{jn} Q^{\{m\}}{}_{kp} Q^{\{m\}}{}_{\ell q},$$

здесь $Q^{\{m\}}{}_{\ell q}$ — элементы матрицы поворота слоя с номером m на угол ϕ_m, а C_{snpq}^0 — компоненты тензора модулей упругости однонаправленного композита в собственной системе координат $O\xi_i^{\{m\}}$, связанной с направлением армирующих волокон. Тензор C_{snpq}^0 является обратным к тензору упругих податливостей: $C_{snpq}^0 = (\Pi_{snpq}^0)^{-1}$, который вычисляется через технические константы упругости 1D материала: E_l — продольный модуль упругости нити в направлении ее укладки; E_t — поперечный модуль упругости нити; ν_l — продольный коэффи-

циент Пуассона; ν_t — поперечный коэффициент Пуассона нити; G_l — продольный модуль сдвига, $G_t = \dfrac{E_t}{2(1+\nu_t)}$ — поперечный модуль сдвига нити, по известным формулам [18]. Технические характеристики 1D элемента, в свою очередь, вычисляются через характеристики матрицы и волокон: E_f , ν_f — модуль упругости и коэффициент Пуассона волокон; E_m и ν_m — модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы; φ_f — относительное объемное содержание волокон в нитях. Для этих констант в расчетах были приняты следующие значения:

$$E_f = 200 ГПа,\ \nu_f = 0,25,\ E_m = 1 ГПа,\ \nu_m = 0,35,$$
$$\varphi_f = 0,6,\ \ \phi_1 = 45^\circ,\ \phi_2 = 60^\circ.$$

Численные расчеты проводились при значении параметра $\kappa = 0,02$. Значения давления были выбраны следующими: $p^{\{2\}} = 10^{-4} ГПа$, $p^{\{1\}} = 0$. Относительная толщина первого слоя $h_1 = 0,5 + a_1$ варьировалась в диапазоне от 0,5 до 0,8. Значение безразмерного параметра θ скольжения слоев также варьировалось в диапазоне от 0 до 10^3. Рассматривался также вариант расчета при идеальном контакте слоев, когда $\theta = 0$.

Результаты расчетов перемещений представлены на рис. 1–4. На рис. 1 показаны распределение прогиба пластины $u_3^{(0)}$ в зависимости от координаты x_1 для различных значений параметра скольжения θ, а также для случая идеального контакта слоев, для случая $h_1 = 0,5$. Расчеты позволяют сделать вывод, что при одном и том же давлении пластина с идеальным контактом слоев всегда имеет минимальный прогиб по сравнению со случаем проскальзывания слоев. Эффект проскальзывания слоев приводит к снижению общей жесткости системы слоев и поэтому прогиб пластины возрастает. С увеличением параметра скольжения от 0,1 до 10^3 прогиб возрастает более, чем в 3 раза.

На рис. 2 показана зависимость прогиба пластины $u_3^{(0)}$ в зависимости от координаты x_1 для значения параметра скольжения $\theta = 10^3$, для различных значений h_1 соотношений слоев. Наибольший прогиб $u_3^{(0)}$ пластины реализуется при равных толщинах слоев, проскальзывающих друг относительно друга, когда значение параметра $h_1 = 0,5$. При

других значениях параметра h_1 прогиб пластины уменьшается и приближается к прогибу пластины с идеальным контактом слоев.

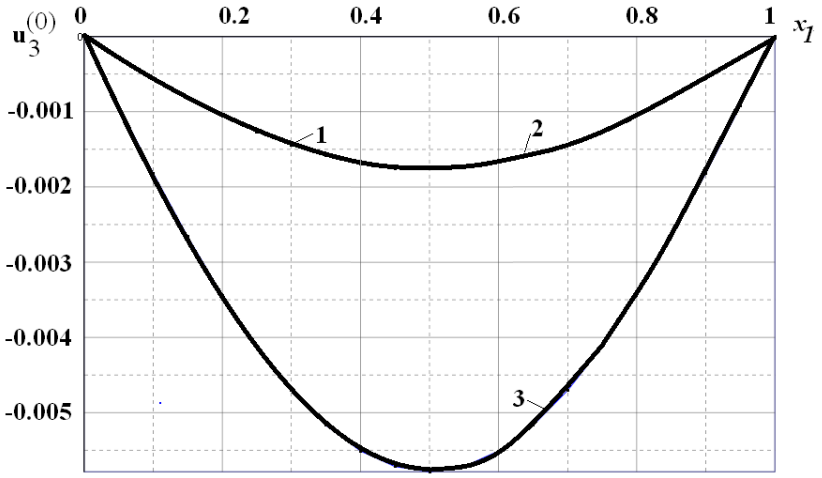


Рис. 1. Зависимость прогиба двухслойной композитной пластины $[\pm 45/\pm 60]$ с проскальзыванием от продольной координаты x_1 для разных значений коэффициента θ:

1 — идеальный контакт между слоями, $\theta = 0$; 2 — $\theta = 0{,}1$; 3 — $\theta = 1000$

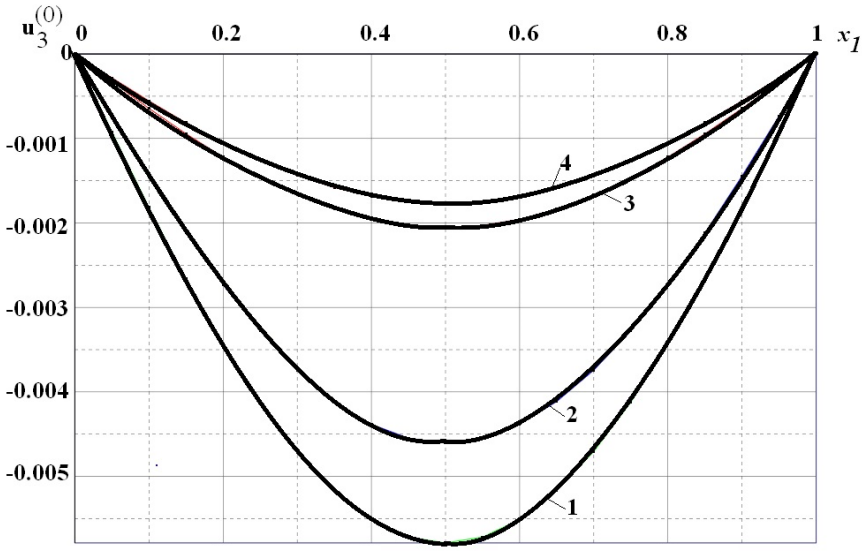


Рис. 2. Зависимость прогиба двухслойной композитной пластины $[\pm 45/\pm 60]$ с проскальзыванием от продольной координаты x_1 для разных значений относительной толщины слоев h_1:
1 — $h_1 = 0{,}5$; 2 — $h_1 = 0{,}6$; 3 — $h_1 = 0{,}8$;
4 — идеальный контакт между слоями, $h_1 = 0$

На рис. 3 показана зависимость максимального прогиба пластины $W = u_3^{(0)}(0{,}5)$ в средней точке при $x_1 = 0{,}5$, от коэффициента скольжения θ. На графике использована полулогарифмическая шкала значений. Эта зависимость $W = W(\lg\theta)$ имеет сложный немонотонный характер, с наличием точек разрыва. При малых значениях коэффициента скольжения, при которых $\lg\theta < 0$, влияние проскальзывания слоев мало влияет на прогиб W. Однако функция $W = W(\lg\theta)$ имеет дискретный набор критических значений θ_k, при переходе через которые прогиб W не только существенно меняет значения, но и даже знак.

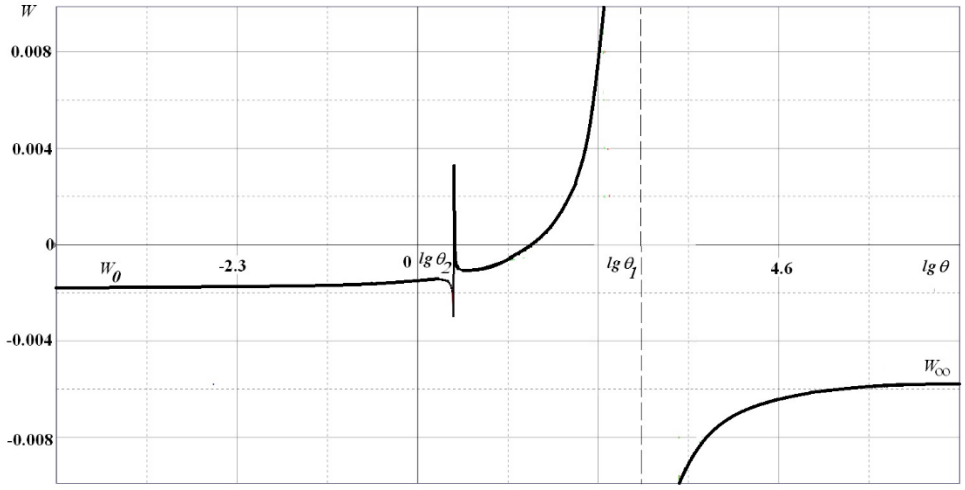


Рис. 3. Зависимость максимального прогиба $W = u_3^{(0)}(0{,}5)$ двухслойной композитной пластины $[\pm 45/\pm 60]$ с проскальзыванием от коэффициента скольжения θ

Эти критические значения θ_k соответствуют собственным значениям системы уравнений (51). Существование собственных значений является специфической особенностью деформирования пластины с проскальзывающими слоями. Физически, случаи $\theta = \theta_k$ соответствуют резкому, волновому процессу деформирования пластины. Если коэф-

фициент скольжения θ меняется непрерывно, переходя через критическую точку, то при достижении значения $\theta = \theta_k$ пластина не может деформироваться квазистатически и происходит быстрое, динамическое изменение прогиба. Это решение, естественно, не описывается системой (51) (для его нахождения следует решать динамическую задачу), поэтому пики прогиба W, уходящие в бесконечность при $\theta = \theta_k$, являются не физическими.

На интервале между 1-м и 2-м критическими значениями при $\theta_2 < \theta < \theta_1$ значение прогиба меняет знак, при таких значениях коэффициента скольжения пластина выгибается по направлению к источнику усилия. Это специфическое деформирование пластины с проскальзыванием, обусловленное особенностями граничного условия на правом крае, которое, в случае потери устойчивости при деформировании, допускает отрицательные перемещения $u_1^{(0)}(1)$.

При $\theta \to \infty$ и $\theta > \theta_1$ прогиб является отрицательным, как и в случае пластины с идеальным контактом слоев, но значение прогиба W_∞ примерно в 3 раза больше, чем для случая пластины с идеальным контактом. Функция $W = W(\lg\theta)$ имеет конечный предел W_∞ при $\theta \to \infty$, поэтому, прогиб при бесконечном возрастании коэффициента скольжения — не увеличивается, а стабилизируется.

Следует заметить, что рассмотренная модель деформирования двухслойной пластины с проскальзыванием является идеализированной линеаризованной схемой процесса деформирования реальных пластин, у которых, как правило, при неидеальном контакте существует нелинейное трение. Поэтому это установленные особенности решения рассмотренной модели. Вопрос о реализуемости данных эффектов требует изучения еще более сложной задачи с нелинейными граничными условиями.

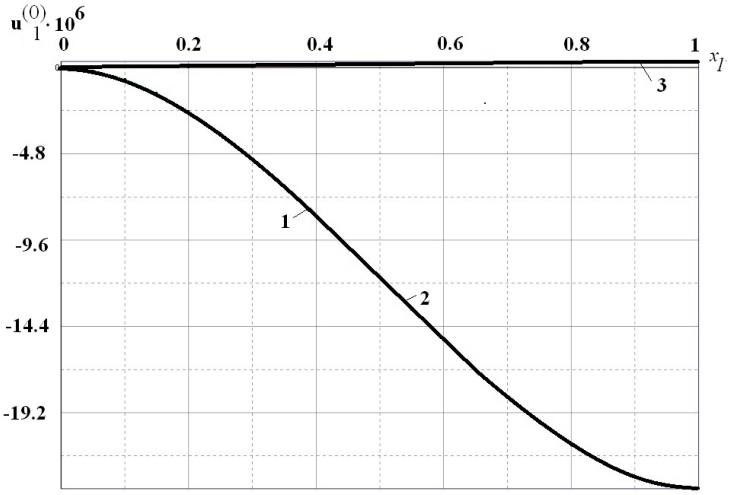


Рис. 4 . Зависимость продольного перемещения двухслойной композитной пластины $[\pm 45/\pm 60]$ с проскальзыванием от продольной координаты x_1 для разных значений коэффициента θ:
1 — идеальный контакт между слоями, $\theta = 0$; 2 — $\theta = 0{,}1$; 3 — $\theta = 1000$

На рис. 4 показано распределение продольного перемещения $u_1^{(0)}$ в зависимости от координаты x_1 для различных значений параметра скольжения θ, а также для случая идеального контакта слоев. В силу незакрепленного $x_1 = 1$ края пластины, ее продольное перемещение при изгибе является отрицательным (происходит продольное сжатие срединной линии пластины) при идеальном контакте слоев и относительно малом параметре скольжения. При больших значениях коэффициентах скольжения продольное перемещение $u_1^{(0)}$ становится близким к нулевому значению, слой 2 при этом на поверхности $\xi = 0{,}5$ сжимается, а первый слой на поверхности $\xi = -0{,}5$ — растягивается.

Выводы. Предложена асимптотическая теория деформирования тонких двухслойных пластин с эффектом проскальзывания слоев, для исследования которого рассмотрены линеризованные условия на границе контактирующих слоев.

Получена рекуррентная последовательность локальных задач теории упругости для пластины с проскальзыванием слоев. Найдено аналитическое рекуррентное решение этих задач, которое позволяет определить все компоненты тензора напряжений в пластине.

Выведена осредненная система уравнений теории тонких двухслойных пластин с проскальзыванием слоев, которая имеет повышенный порядок частных производных по сравнению с теорией пластин с идеальным контактом.

Рассмотрена задача об изгибе двухслойной пластины с проскальзыванием слоев под равномерным давлением. Найдено аналитическое решение этой задачи и проведен численный анализ решения на примере 2-х слойной композитной пластины. Установлены специфические эффекты деформирования пластины, обусловленные эффектом проскальзывания слоев.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва, ОНТИ, 1935, 674 с.

[2] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. Москва, Наука, 1966, 635 с.

[3] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272 с.

[4] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.

[5] Scott W. H. A model for a two-Layered Plate with interfacial slip. *International Series of Numerical Mathematics.* V.118. 1994. pp.143–170.

[6] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct*, 1984, pp. 333–350.

[7] F. Gruttmann, W. Wagner. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross–sections. *Computational mechanics*, 2001, vol. 27, pp. 199–207.

[8] Y.M. Ghugal, R.P. Shmipi. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.

[9] Francesco Tornabene. Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 2011, no. 200, pp. 931–952.

[10] Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.

[11] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.

[12] С.А. Назаров, Г.Х. Свирс, А.С. Слуцкий. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.

[13] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–99.

[14] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.

[15] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Губарева Е.А. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 36–57.

[16] Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1 (1), с. 36–56.

[17] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Шалыгин И.С. Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории

упругости. *Инженерный журнал: науки и инновации*, 2015, № 5 (41), с. 1–19.

[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, № 12 (60), с. 1–25.

[19] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин. *Наука и образование. Электронный журнал*, № 10, 2014, с. 359–382. DOI: 10.7463/1014.0730105.

[20] Yu.I. Dimitrienko, I. D. Dimitrienko and S.V. Sborschikov Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220.

[21] Yu.I. Dimitrienko, I.D. Dimitrienko Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15 (3), pp. 219–237.

[22] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды*, в 4 т., т. 4. *Основы механики твердого тела.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[23] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа. 2001, 576 с.

Статья поступила в редакцию 28.10.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория тонких двухслойных упругих пластин с проскальзыванием слоев. *Математическое моделирование и численные методы.* 2019. № 1. с. 3–26.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 370 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области механики сплошных сред, математического моделирования, механики композитов, механики контактного взаимодействия. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Asymptotic theory of thin two-layer elastic plates with layer slippage

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem of deformation of thin two-layer plates, for which a slip condition is specified at the interface between the layers, instead of the classical case of ideal contact, is considered. The method of asymptotic analysis of the general equations of the 3-dimensional theory of elasticity is used to solve this problem under the influence of transverse pressure,

longitudinal and shear forces on the end surfaces. Asymptotic analysis is performed using a small geometric parameter representing the ratio of thickness to the characteristic length of the plate. Recurrent formulations of local quasi-one-dimensional problems of elasticity theory with slippage are obtained. For these problems, explicit analytical solutions are obtained. The averaged equations of elastic equilibrium of a two-layer plate with slippage of layers are derived. It is shown that, due to slippage, the order of the averaged equations of the theory of plates increases to 5 orders of magnitude, in contrast to the classical 4th order, which takes place in the theory of Kirchhoff – Love plates. Additional boundary conditions to this 5th order system are formulated and its analytical solution is obtained for the case of a rectangular plate under the influence of uniform pressure. A numerical analysis of the solution of the averaged problem is carried out. It is shown that the presence of layer slippage significantly increases the deflection of the plate in comparison with the conditions of ideal contact of the layers.

Keywords: *asymptotic theory, small parameter, thin plates, elasticity, layer slippage, bending*

REFERENCES

[1] Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge. University Press, 1927, 674 p. [In Russ.: Love A.E.H. *Matematicheskaya teoriya uprugosti.* Moscow, ONTI Publ., 1935, 674 p.].

[2] Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 635 p.

[3] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 272 p.

[4] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Mekhanika kompozitnykh materialov –Mechanics of Composite Materials*, 1989, vol. 24, no. 4, pp. 698–704.

[5] Sheshenin S.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 2006, no. 6, pp. 71–79.

[6] Scott W Hansen A model for a two-Layered Plate with interfacial slip. *International Series of Numerical Mathematics.* V.118. 1994. pp. 143-170.

[7] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct*, 1984, pp. 333–350.

[8] F. Gruttmann, W. Wagner. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross–sections. *Computational mechanics*, 2001, vol. 27, pp. 199–207.

[9] Y.M. Ghugal, R.P. Shmipi. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.

[10] Francesco Tornabene. Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 2011, no. 200, pp. 931–952.

[11] Zveryaev E.M., Makarov G.I. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of applied mathematics and mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 308–321.

[12] Nazarov S.A, Sweers G.H, Slutskiy A.S. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 8, pp. 41–80.

[13] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–99.

[14] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompositsionnykh materialov i konstruktsiy — Mechanics of composite materials and structures*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.
[15] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Gubareva E.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 36–57.
[16] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no.1 (1), pp. 36–56.
[17] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Shalygin I.S. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, no. 5 (41), pp. 1–19.
[18] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, no. 12 (60), pp. 1-25. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-12-1557
[19] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. *Nauka i Obrazovanie. Elektronny zhurnal – Science and Education: scientific edition of Bauman MSTU*, 2014, no. 10. DOI: 10.7463/1014.0730105. pp. 359-382.
[20] Yu.I. Dimitrienko, I. D. Dimitrienko, S.V. Sborschikov. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220.
[21] Yu.I. Dimitrienko, I.D. Dimitrienko. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15 (3), pp. 219–237.
[22] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. In 4 vols. Vol. 4. *Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Foundations of mechanics of solid media]. BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[23] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and Nonlinear Tensor Functions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2002, 680 p. [In Russ.: Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 576 p.].

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University; Director, Scientific and Educational Centre for Supercomputer-based Engineering Simulation and Software Development, Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of over 370 scientific publications in the field of continuum mechanics, computational mechanics, gas dynamics, mechanics and thermomechanics of composites, mathematical modeling in the science of materials. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Gubareva E.A., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Deputy Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 60 scientific publications in the field of continuum mechanics, mathematical modeling, composites mechanics, contact interaction mechanics. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru